

含压电片梁的振动控制*

林西强 任钧国

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 借助阶梯函数,建立了含有任意分布的用作执行器的压电片的梁横向振动方程,并利用模态法,进行了梁的振动控制研究。仿真结果表明,无论对自由振动还是受迫振动,控制效果都十分明显。

关键词 梁, 压电材料, 振动控制

分类号 V250

Vibration Control Of Beam Containing Piezoelectric Patches

Lin Xiqiang Ren Junguo

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract By applying heaviside function, the vibration equation governing the beam that possesses spatially distributed piezoelectric patches has been established. Based on this equation and using the modal method, some problems about the vibration control have been discussed. Numerical examples have been presented to illustrate the efficacy of the control to both free and forced vibration.

Key words beam, piezoelectric material, vibration control

20 世纪 80 年代以来,由于航天工程的刺激和驱动,以叠层材料制造技术、微电子技术和功能材料耦合特性的利用为基础而发展起来的智能结构越来越受到人们的重视^[1~3]。压电材料同时具有压电效应和逆压电效应,既可用作传感器,也可用作执行器,而且作为成品出售的压电片可以做得很薄,特别适合于柔性结构,因而成为智能结构中最常使用的一种功能材料^[3,4]。

1 含压电片梁的振动方程

1.1 含压电片梁的应力计算

含压电片的梁如图 1 所示。 z 轴为梁横截面的中性轴, xoy 平面为梁的主惯面。共有 n 块压电片,其中编号为 $1, 2, \dots, m$ 的位于梁的内部,编号为 $m+1, m+2, \dots, n$ 的粘贴于梁的上下表面。利用阶梯函数可以写出第 i 块压电片的位置函数

$$L_i(x, y, z) = [H(x - x_{i1}) - H(x - x_{i2})][H(y - y_{i1}) - H(y - y_{i2})][H(z - z_{i1}) - H(z - z_{i2})] \quad (1)$$

对于含压电片的梁的弯曲,仍采用材料力学中关于纯弯梁的两个基本假设。此外,还假定压电片和梁之间是理想粘贴,即两者之间在变形时无相对滑移。这在粘贴层比较薄时,不会带来多少误差。

由此设弯曲后梁的中性轴的曲率半径为 R ,离中性层为 y 处的应变为 $\epsilon = -y/R$,应力为 $\sigma = E\epsilon$,其中 E 是基体材料的弹性模量。

设第 i 个压电片上所加电压是 V_i ,由于压电片一般较薄,故可认为其电场强度沿极化方向(y 轴方向)是均匀分布的,大小为 $V_i/(y_{i2} - y_{i1})$ 。由压电学知识^[5,6]可知,外加电压引起的 x 方向的应变是 $\Lambda_i = d_i V_i/(y_{i2} - y_{i1})$,其中 d_i 是第 i 个压电片的压电应变常数。

采用和热应力类似的处理方法,可得 $\sigma = E_i^p(\epsilon - \Lambda_i)$,其中 E_i^p 是第 i 个压电片的弹性模量。

再利用位置函数 (1),可以写出含压电片的梁的统一的应力应变关系式

* 1998 年 6 月 29 日收稿

第一作者: 林西强,男,1974 年生,博士生



图1 含压电片的梁

Fig. 1 Beam containing piezoelectric patches

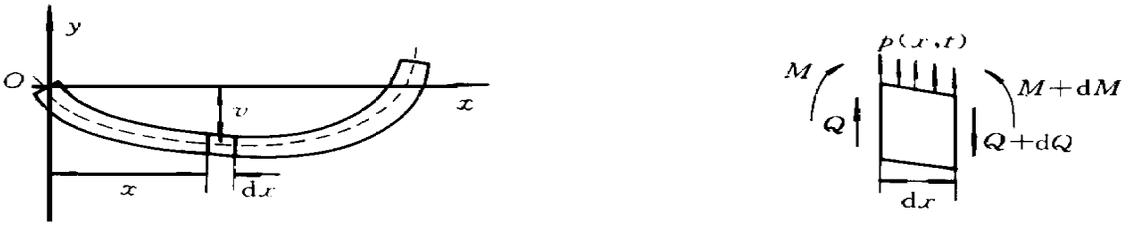


图2 梁横向振动示意图

Fig. 2 Transverse vibration of beam

$$\sigma = E\epsilon + \sum_{i=1}^n E_i^p (\epsilon - \Lambda_i) L_i(x, y, z) - E\epsilon \sum_{i=1}^m L_i(x, y, z) \quad (2)$$

1.2 含压电片梁的振动方程

图2所示含压电片梁在xoy平面内作横向振动, 静止时 $v(x, 0) = 0$. 在某种激励下梁离开了平衡位置, 从梁的任一截面 x 处取出一小段 dx , 根据牛顿第二定律, 可得方程

$$p(x, t) dx - \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3)$$

式中 ρ 代表密度。

分析单元体受力, 可得

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (4)$$

假设共有 k 对压电片对称地粘贴在梁的上下表面, 记

$$c_i = -E_i^p b_i (h + h_i^p) d_i V_i$$

利用(2)对(4)求导, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \sum_{i=1}^k c_i [H''',x(x - x_{i1}) - H''',x(x - x_{i2})] \quad (5)$$

将(5)代入(3)得

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) + \sum_{i=1}^k c_i [H''',x(x - x_{i1}) - H''',x(x - x_{i2})] \quad (6)$$

这就是含压电片的梁的横向振动方程。

2 梁的振动控制

2.1 控制律

我们以简支梁为例来说明如何用压电片进行梁的振动控制。使用模态分析法, 先求解自由振动问题的振型函数 W_m , 以及与之对应的频率 ω_n , 取 $v = C \cos \omega W(t)$, 代入自由振动方程(令式(6)右边为零), 化简整理后, 可得振形微分方程

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{\omega^2 \rho A}{EI} W \quad (7)$$

取振型函数为 $W_m = \sin(m\pi x/l)$, 其中 m 为整数, 可以满足边界条件, 代入(7) 可得自然频率 $\omega_m^2 = EI\pi^4 m^4 / (\rho A l^4)$, 为了求解(6) 式, 将挠度和动荷载都展为振形函数的级数

$$\begin{cases} v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) W_m(x) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} p(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) W_m(x) \end{cases} \quad (8b)$$

$$\begin{cases} c_i [H^{n,x}(x - x_{i1}) - H^{n,x}(x - x_{i2})] = \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^{\infty} C_{mi} V_i(t) W_m(x) \end{cases} \quad (8c)$$

上式中, $V_i(t)$ 是加给压电片的电压。将(8) 代入(6), 并利用(7), 消去 W_m , 可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 T_m}{dt^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 T_m = \frac{1}{\rho A} \sum_{m=1}^{\infty} \left[F_m + \sum_{i=1}^k C_{mi} V_i \right] \quad (9)$$

由(9) 式可见, 为了利用模态法进行进行振动控制, 只需把反馈电压取为模态位移和模态加速度的线性组合

$$V_i(t) = \alpha T_m + \beta d^2 T_m / dt^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (10)$$

这里 $\alpha = \rho A \omega_m^2 / C_{mi}$, $\beta = \rho A / C_{mi}$, 就可以有效地抑制振动, 若以前 k 阶模态为控制对象, 则

(9) 成为

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{d^2 T_m}{dt^2} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \omega_m^2 T_m = \frac{1}{\rho A} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \quad (11)$$

2.2 压电片尺寸和位置对控制电压的影响

由(8c) 及和差化积公式, 可得

$$C_{mi} = \frac{4m\pi E^p b_i (h + h^p) d_i \sin \frac{m\pi(x_{i1} + x_{i2})}{2l} \sin \frac{m\pi(x_{i2} - x_{i1})}{2l}}{l^2} \quad (12)$$

考察(10) 中各项的系数, 对控制第 m 阶模态的压电片可得如下结论:

① 为了保证反馈电压不是无穷大值, 有如下限制条件

对位置 $x_{i1} + x_{i2} = 2nl/m, \quad n = 1, 2, \dots, m-1.$

对尺寸 $x_{i2} - x_{i1} = 2nl/m, \quad n = 1, 2, \dots, [m/2].$

④在尺寸给定时, 使反馈电压取最小的压电片位置, 应满足下述方程

$$x_{i1} + x_{i2} = (2n+1)l/m, \quad n = 0, 1, \dots, [m-0.5].$$

(四)使反馈电压取最小的压电片位置和尺寸的理想组合是

$$x_{i1} + x_{i2} = (2n+1)l/m, \quad n = 0, 1, \dots, [m-0.5].$$

$$x_{i2} - x_{i1} = (2n+1)l/m, \quad n = 0, 1, \dots, [(m-1)/2].$$

注意结论(四)只有在 m 较大时, 所得到的压电片尺寸才有实用价值, 对一般控制低阶模态的问题, 结论④更为常用。

2.3 控制结果及分析

设压电片和梁的密度分别为 7600kg/m^3 , 2700kg/m^3 , 梁的长、宽、高分别为 $l = 508 \text{mm}$, $b = 30 \text{mm}$, $h = 3.718 \text{mm}$, 弹性模量 $E = 70 \text{GPa}$. 压电片弹性模量和压电应变常数^[7]分别是 $E^p = 63 \text{GPa}$, $d^p = 180 \times 10^{-12} \text{m/V}$, 厚度均为 $h^p = 0.254 \text{mm}$. 计算可知梁前两阶圆频率是 209.01Hz 和 836.02Hz . 共计算了三种情况: 自由振动, 受迫振动和共振。自由振动时, 假设梁的振动规律是

$$v(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1000} \frac{1}{m^2} \cos \omega_m t \sin \frac{m\pi x}{l}$$

受迫振动和共振时假定梁受到作用于中心点的余弦力 $p(t) = 10 \cos \omega t$, 频率分别是 500.0Hz 和 209.0Hz .

我们使用两块压电片抑制梁的前两阶模态的振动, 压电片都为 50mm 长, 最佳位置是: 控制第一阶模态的压电片中心点在 254mm 处, 控制第二阶模态的压电片中心点在 127mm 或 381mm 处。这正好是前两阶振形的峰值点。压电片所需的反馈电压可由(11) 式确定。我们计算了梁的中心点在控制前后的

响应曲线, 结果如图3~5所示。

由图中所给曲线可以看出, 在使用压电片进行梁的振动控制时, 对由结论④公式确定的位置和(11)式求出的反馈率, 无论对自由振动, 还是受迫振动, 控制效果都十分明显。需要指出的是, 在实际应用时, 要根据具体情况, 决定抑制哪几阶模态, 而且对反馈电压要进行检测, 以防击穿压电片, 造成整个控制失败。

4 结束语

本文借助阶梯函数, 建立了含压电片梁的横向振动方程。在此基础上, 利用模态法, 进行了梁的振动控制研究。仿真结果表明, 用压电片作为执行器, 无论对自由振动还是受迫振动, 控制效果都十分明显。将本文所用的方法作适当推广, 又可进行含压电片板的研究。这些工作都将为压电片能更好地在工程中得以应用打下基础。

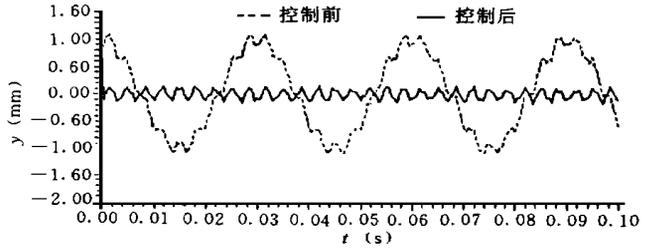


图3 自由振动时梁中心点响应曲线

Fig. 3 Free vibration response of the central point

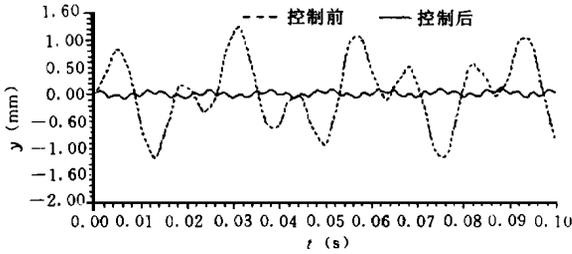


图4 受迫振动时梁中心点响应曲线

Fig. 4 Forced vibration response of the central point

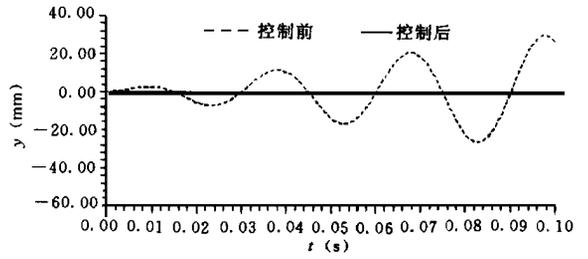


图5 共振时梁中心点响应曲线

Fig. 5 Resonance response of the central point

参考文献

- 1 Crawley E F. Intelligent Structures for Aerospace: A Technology Overview and Assessment. AIAA J, 1994, 32 (8): 1689 ~ 1699
- 2 Gandhi M V, Thompson B S. Smart Materials and Structures. Published by Chapman & Hall, 1992
- 3 董聪, 夏人伟. 智能结构设计与控制中的若干核心技术问题. 力学进展, 1996, 26 (2): 166 ~ 178
- 4 王晓明, 沈亚鹏, 尹林. 机敏材料和机敏结构的力学分析. 力学进展, 1995, 25 (2): 209 ~ 221
- 5 Crawley E F, de Luis J. Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures. AIAA J, 1987, 25 (10): 1373 ~ 1385
- 6 Im S, Atluri S N. Effect of Piezo-Actuators on a Finitely Deformed Beam Subjected to General Loading. AIAA J, 1989, 27 (12): 1801 ~ 1807
- 7 Agrawal S K, Tong D. Modeling and Shape Control of Piezoelectric Actuator Embedded Elastic Plates. Intel Mater Sys & Struc, 1994, 5: 514 ~ 521