

奇异积分方程在裂纹板条动态断裂分析中的应用 ( II )<sup>\*</sup>

袁杰红 唐国金 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 采用 Durbin 反演法, 将 Laplace 变换域中的动态应力强度因子转换为时域中的解。给出了数值算例, 证实了本文方法的合理性。通过对计算结果的分析, 得出了一系列有趣而有意义的结论。

**关键词** Laplace 反演, 动态应力强度因子, 应力波, 裂纹尖端

**分类号** O34

### The Application of Singular Integral Equation to the Dynamic Fracture Analysis of Cracked Strip ( II )

Yuan Jiehong Tang Guojin Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** By using Durbin's inverse Laplace transform method, the dynamic stress intensity factor in Laplace transform domain is transformed into the result in time domain. The numerical example is given and the reasonability of the method in this paper is verified. By analyzing the calculating result, some interesting and significant conclusions are presented.

**Key words** inverse Laplace transform, dynamic stress intensity factor, stress wave, crack tip

本文在获得了 Laplace 变换域中的动态应力强度因子的基础上, 对其作 Laplace 反演, 得到了动态应力强度因子在时域中的解。文中提供的数值算例证实了本文方法的正确性及实用性。同时通过对本文结果的分析, 得出了一系列有趣而有益的结论, 这些结论, 对于在动载下的结构断裂设计具有实际的参考价值。

## 1 数值 Laplace 反演及其参数选择

除了少数简单函数, 一般情况下, 想得到 Laplace 反演变换的封闭解几乎是不可能的, 因而只能采用数值方法求解。研究表明<sup>[1, 2]</sup>, Durbin 发展的反演法在整个时间段内精度较高。故本文中也采用该方法求解。在这种方法中, 先在变换域中对一系列离散参数  $p_k = a + 2\pi ki/T$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, NUSM$ ) 求解 ( $NUSM$  为反演次数), 得到一系列对应的离散值, 然后, 利用反演公式

$$K(t_j) = \frac{2e^{at_j}}{T} \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[K^*(a)] + \sum_{k=0}^{NUSM} \left( \operatorname{Re}\left[ K^*\left(a + ik \frac{2\pi}{T}\right) \right] \cos \frac{2\pi}{T} kt_j - \operatorname{Im}\left[ K^*\left(a + ik \frac{2\pi}{T}\right) \right] \sin \frac{2\pi}{T} kt_j \right) \right\}$$

即可求得动态应力强度因子在时域中的解。其中,  $t_j = j\Delta t = jT/N$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ )。

计算表明, 反演次数  $NUSM$  越多, 反演精度越高, 但 CPU 时间也将相应增加。故在一定精度条件下, 为节约机时, 应当取较小反演次数, 本文中  $NUSM$  取 100 左右时就能保证较好的精度。同时, 建议  $aT$  取其下限, 即  $aT = 5$ , 并且不采用过大的  $T$  值。

文中最终采用规一化的动态应力强度因子  $K(t) = K(t)/\sigma_0 \pi c_0$ 。

\* 1998 年 10 月 12 日收稿

第一作者: 袁杰红, 男, 1965 年生, 博士生

## 2 计算结果及讨论

### 2.1 算例

文 [3] 提供了一受均匀阶跃载荷带中心 Griffith 裂纹的线弹性矩形板算例。作为对本文方法及程序的检验, 这里采用该算例中除  $L$  外的所有参数进行了计算(因为本文方法中  $L$  为无限长), 并将计算结果与文 [3] 中给出的该算例的有限元结果进行了比较。如图 1 所示, 矩形板的几何尺寸与材料常数

$$L = 104\text{mm}, 2H = 40\text{mm}, 2c_0 = 24\text{mm}$$

$$E = 7500\text{kgf/mm}^2, \nu = 0.25, \rho = 2.45\text{g/cm}^3$$

设在时刻  $t = 0$  裂纹面受均布阶跃拉伸应力  $-\sigma_0 H(t)$  作用。

由上述可知, 算例中给出的是矩形板, 而本文方法仅针对无限长板条, 两者从几何结构上存在差异, 这样, 本文方法的计算结果与算例中的有限元结果比较是否还具有意义呢? 从波动的角度出发: 动态应力强度因子是由于初始应力波及其遇到自由边界后形成的反射应力波与裂纹尖端相互作用的结果。而最近的自由边界将最早反射应力波。由图 1 可知,  $L > H$ , 则  $y$  方向的边界是最近的自由边界, 这点与本文讨论的裂纹板条结构是相同的。因此, 从理论上可以肯定, 对于初始应力波及由最近的自由边界第一次反射的应力波与裂纹尖端作用所得到的动态应力强度因子, 本文结果与算例中的有限元结果将具有比较的价值。而随着时间的增长, 由于多次反射, 应力波将呈现非常复杂的形式, 而因为几何上的差异, 本文结果与算例中结果将无法进行比较。同时在工程实际中, 作用阶跃载荷后, 由于结构中的阻尼作用, 随着时间的增长, 应力波将越来越弱, 动态应力强度因子也将越来越趋近静态值, 所以上述更进一步的比较已无实际意义。

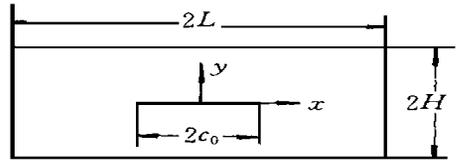


图 1 含 Griffith 裂纹的矩形板  
Fig. 1 A rectangular plate with a Griffith crack

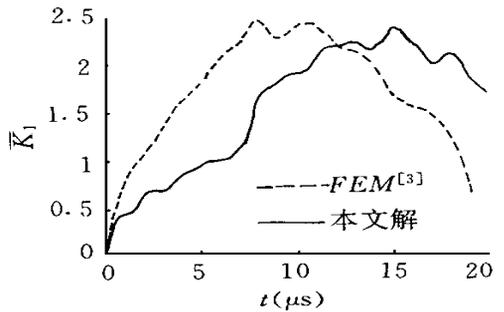


图 2 动态应力强度因子结果比较  
Fig. 2 The comparison of dynamic SIF

图 2 给出了本文结果及文 [3] 中有限元结果。从对比的情况看来, 两者的最大峰值非常接近, 但达到峰值的时间(相角)存在差异。研究表明<sup>[4]</sup>, 有限元等数值方法对波动问题的模拟都存在精度不足的问题。因此, 上述差异有可能由此引起。另外, 结构的差异和数值误差也可能是其中的原因。但作为动态断裂设计, 主要关心的还是动态应力强度因子的峰值。所以, 本文方法的结果对于实际结构中类似图 1  $L > H$  情形时的动态断裂分析和设计是具有参考价值的。

### 2.2 几何尺寸对动态应力强度因子的影响

当裂纹面承受阶跃载荷作用时, 将产生初始应力波。而裂纹尖端首先与初始应力波作用产生 P 波、SV 波和 Rayleigh 表面波。P 波和 SV 波经自由表面反射后又与裂尖发生作用, 将产生更多的应力波。而 Rayleigh 波将沿裂纹表面传到另一个裂纹尖端并与其发生作用也将产生别的应力波。所以, 要考察每一个应力波与裂尖的相互作用是不可能的事, 但对最初的几种应力波进行分析还是可能的。另一方面, 由于动态应力强度因子是应力波与裂尖相互作用的结果, 而各种应力波与裂尖的相互作用时间及先后顺序随着结构的几何尺寸变化而变化, 从而, 动态应力强度因子幅值及达到各幅值的时间将随几何尺寸的变化而变化。下面, 分几种情形考察几何尺寸对动态应力强度因子的影响:

(1) 当  $h/c_0$  时, 本文所讨论的板条将退化为一无限大平板。这样, 在有限的时间域内, 本文结果应与无限大平板的结果一致。为此, 本文作了计算, 并将计算结果在  $c_2 t/c_0 < 15$  时间段内与  $\text{Sih}^{[5]}$  的结果进行了比较。由于  $\text{Sih}^{[5]}$  对数据进行了拟合, 故这里也对本文结果作了拟合, 对比情况如图 3 所

示,可见两者吻合情况很好。很显然,由于板为无限大,便不会发生应力波的反射,只有 Rayleigh 波沿裂纹表面传到另一个裂纹尖端。而且,  $K(t)$  的最大值生在 Rayleigh 波传到另一个裂纹尖端的时刻。随着时间的增长,  $K(t)$  逐渐趋向于静态值 1。这一结果也正是本文所需要的事实,因为它从另一角度证明了本文方法的正确性。

(2) 当  $h/c_0 < c_1/c_3$  (其中,  $c_1$  为 P 波波速,  $c_3$  为 Rayleigh 波波速,一般地  $c_1 = 2.02c_3$ ) 时, Rayleigh 波传到另一裂尖的时刻早于 P 波经自由表面反射后与裂尖作用的时刻。图 4 中给出了  $h/c_0 = 2.5$  的计算结果。从已知的各种波速及板条的几何尺寸,可以计算得到如下的时间:  $(R_1 - O)$  表示初始应力波与裂尖作用后产生的 Rayleigh 波传到另一个裂纹尖端所需要的时间;  $(P_1 - O)$  表示初始应力波与裂尖作用后产生的 P 波从裂尖传播到自由表面,经过反射后再传播到裂纹尖端所需要的时间;  $(S_1 - O)$  表示初始应力波与裂尖作用后产生的 SV 波从裂尖传播到自由表面,经过反射后再传播到裂纹尖端所需要的时间;由于情况的复杂性,往后的波形分析从略。但从得到的计算和分析结果看来,动态应力强度因子的极值总是发生在应力波与裂纹尖端相互作用的时刻。

图 5 给出了几种不同几何尺寸下的动态应力强度因子曲线,可以看出,随着  $h/c_0$  的增大,动态应力强度因子的最大值将变小。同时,在第一次反射的 P 波传到裂尖之前的时间段内,动态应力强度因子有一个重合的过程,这个重合过程反映了上述各情形中 Rayleigh 波的传播过程是相同的。因而可以预计,随着  $h/c_0$  不断增大,动态应力强度因子将越来越趋近图 3 的结果。

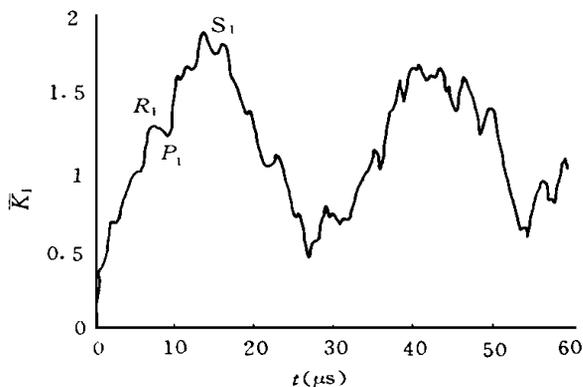


图 4 动态应力强度因子的时间变化曲线

Fig. 4 The curve of dynamic SIF vs time

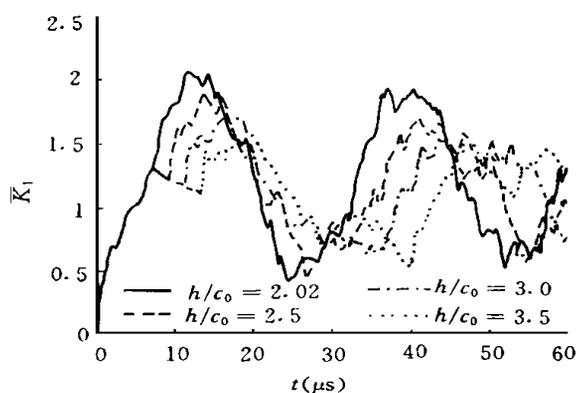


图 5 动态应力强度因子的时间变化曲线

Fig. 5 The curve of dynamic SIF vs time

(3) 当  $h/c_0 > c_1/c_3$  时, Rayleigh 波传到另一裂尖的时刻将迟于 P 波经自由表面反射后与裂尖作用的时刻。图 6 给出了几种不同尺寸下的动态应力强度因子曲线,可以看出,随着  $h/c_0$  的减小,动态应力强度因子的最大值将增大。

### 2.3 材料特性对动态应力强度因子的影响

在动载条件下,由于材料特性的变化将改变应力波的波速,所以,材料特性对动态应力强度因子将产生一定的影响。下面分别就不同的弹性模量  $E$ 、材料密度  $\rho$  和泊松比  $\nu$  进行计算,以研究材料特性对动态应力强度因子的影响,计算时取  $h/c_0 = 2.5$ ,计算结果如图 7 ~ 9 所示:

(1) 图 7 表明,  $\rho, \nu$  一定时,  $E$  的变化对动态应力强度因子的幅值几乎没有影响,但随着  $\rho$  的增大,动态应力强度因子达到最大值所需的时间将越短。

(2) 图 8 表明,  $E, \nu$  一定时,  $\rho$  的变化也几乎不改变动态应力强度因子的幅值,但随着  $\rho$  的增大,动态应力强度因子达到最大值所需的时间也将越长。

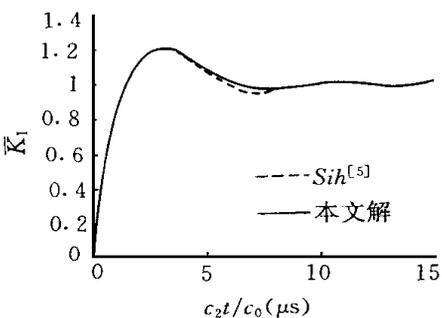


图 3 动态应力强度因子结果比较

Fig. 3 The comparison of dynamic SIF

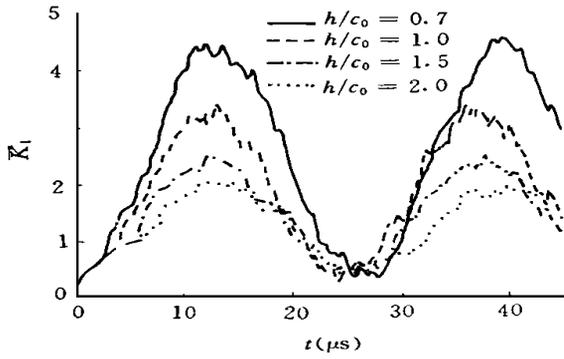


图6 动态应力强度因子的时间变化曲线

Fig. 6 The curve of dynamic SIF vs time

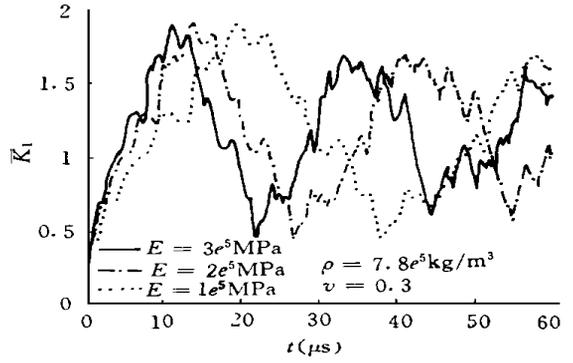


图7 动态应力强度因子的时间变化曲线

Fig. 7 The curve of dynamic SIF vs time

(3) 图9表明,  $E$ 、 $\rho$ 一定时,  $\nu$ 的变化仅使得动态应力强度因子的幅值及随时间的变化规律有稍微的变动。

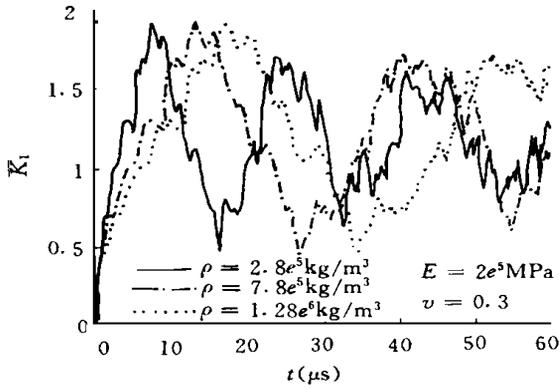


图8 动态应力强度因子的时间变化曲线

Fig. 8 The curve of dynamic SIF vs time

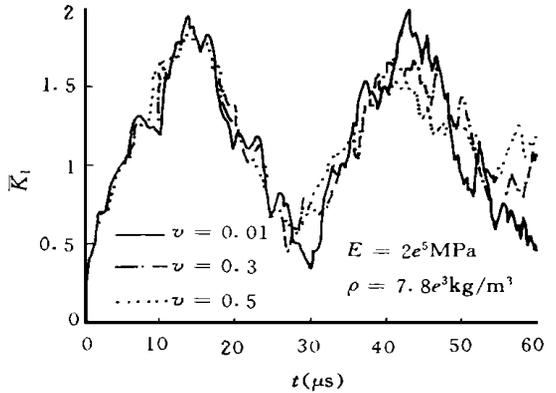


图9 动态应力强度因子的时间变化曲线

Fig. 9 The curve of dynamic SIF vs time

### 3 结论

- (1) 本文讨论的无限长板条动态断裂分析理论适用于某些含 Griffith 裂纹的有限平板的动态应力强度因子的计算, 并具有可靠的精度, 对动态断裂设计具有实际参考价值。
- (2) 利用本文的解析推导方法可得到应力波与裂纹尖端相互作用的物理概念。
- (3) 通过计算表明, 动态应力强度因子的极值一般在应力波与裂尖相互作用时出现。材料特性对动态应力强度因子大小的影响不大。但板的几何尺寸对动态应力强度因子具有较大的影响, 因此, 在动态断裂设计时, 合理考虑这一影响是非常重要的。

### 参考文献

- 1 Durbin F. Numerical inversion of the Laplace transform - An efficient improvement to Dubner and Abate's method. Computer J. 1974, 17: 371
- 2 Narayanan G V etc. Numerical operational methods for time dependent linear problems. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 1982, 18: 1829
- 3 范天佑. 断裂动力学引论. 北京理工大学出版社, 1990
- 4 张海联, 周建平. 波动问题有限元和有限差分研究比较. 中南工业大学学报. 1998, 29 (2): 7
- 5 Sih G C, Embley G T. Impact response of a finite crack in plane extension. Int. J. Solids Structures. 1972, 8: 977