国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第3期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.21 No.3 1999

有色噪声下 FIR 模型相关辨识精度分析*

胡德文

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 本文针对离散控制系统的有限脉冲响应(FIR)函数模型,研究了在伪随机 m 序列输入的激励和有色噪声干扰下辨识的精度问题,纠正了参考文献中的错误,得到了有色噪声干扰下 FIR 参数估计精度的显式表达式。同时,给出了辨识精度的下界和上界,分析并得到了达到上下界的条件。文中有实例分析。

关键词 FIR 模型,相关辨识,伪随机序列,精度分析

分类号 TP271

Precision Analysis for Correlation Identification of FIR Models under Colored Noise Disturbunces

Hu Dewen

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper analyzes the identification precision of the finite impulse response (FIR) function models of discrete-time control systems under the pseudorandom m-sequences stimulation and colored-noise disturbances. The mistake in the reference document is corrected and an explicit formula of the correlation identification precision is given in the case of colored noises. Moreover, the lower and the upper bounds of the FIR identification precision are suggested, and the conditions of reaching the bounds are obtained. Two examples are given to support the analysis.

Key words FIR model, correlation identification, pseudorandom sequence, precision analysis

控制系统辨识的相关分析法是指在系统的输入和输出已知的情况下,利用输入自相关函数以及输入输出互相关函数或它们的功率谱密度和互功率谱密度来辨识系统的一种方法。从该方法的发展历史来看,最早是用在系统脉冲响应的辨识上,采有的输入主要是白噪声或各种伪随机序列[1~4]。

采用伪随机序列相关分析法最根本的目的是使辨识结果尽可能地不受测量噪声的影响,同时,也可以大大降低辨识中的计算量。虽然伪随机输入—相关分析法是系统辨识领域中最早的方法之一,而且在实际中也得了广泛的应用,但至目前为止,有关伪随机输入—相关分析法的统计特性的研究仍然是缺乏的。本文将针对线性离散时间系统有限脉冲响应(FIR)函数模型,研究在伪随机 m 序列输入激励和有色噪声干扰下相关辨识的精度问题。

1 FIR 模型辨识的相关分析法

考虑线性定常离散时间系统传递函数模型:

$$y(k) = G(z)u(k) + e(k) \tag{1}$$

其中$\{y(k)\}$, $\{u(k)\}$分别为系统的输出和输入, $\{e(k)\}$为输出观测噪声。如果传递函数 $G(z)$ 的根在单位圆 $|z| < 1$之内,则(1)可用如下模型逼近:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N} g_i u(k-i) + e(k) \tag{2}$$

这就是离散控制系统的有限脉冲响应(FIR)函数模型。设观测噪声序列$\{e(k)\}$是与输入不相关的宽平稳随机过程,均值为零 $E\{e(t)\}= 0$,自相关函数记为:

---

* 1999年1月4日收稿
第一作者:胡德文,男,1963生,教授

$$r(\tau) = E\{e(k)e(k-\tau)\} \tag{3}$$

记$\{y(k)\}$与$\{u(k)\}$的样本互相关函数为:

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k)u(k-\tau) \tag{4}$$

同时, $\{u(k)\}$的样本自相关函数为:

$$R_{uu}(i,j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u(k-i)u(k-j) \tag{5}$$

组成$N_s \times N_s$ 维矩阵 Ω_{uu}, 其(i,j)号元素为$R_{uu}(i,j)$。若再记:

$$\xi(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e(k)u(k-\tau) \tag{6}$$

由(2)式采用最小二乘估计, 可得到g_i 的估计$\hat{g}_i(i=1\sim N_s)$为:

$$[\hat{g}_1, \hat{g}_2, \cdots, \hat{g}_{N_s}]^{\mathrm{T}} = \Omega_{uu}^{-1}\ [R_{yu}(1), R_{yu}(2), \cdots, R_{yu}(N_s)]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

采用周期为 $N_p = N_s$, 幅度为 a 的 m 序列作为系统的输入信号, 从 $k=-N_s+1$时刻开始加入系统, 至 $k=N$ 时刻为止。N 为输出观测样本个数, 是周期 N_p 的整数倍。根据 m 序列的性质, 均值为:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u(k) = \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_p} u(k) = -\frac{a}{N_p} \tag{8}$$

自相关函数为:

$$R_{uu}(i,j) = \begin{cases} a^2, & i = j = 1 \sim N_p \\ -a^2/N_p, & i \neq j;\ i,j = 1 \sim N_p \end{cases} \tag{9}$$

参数向量 FIR 模型各参数估计值为:

$$\hat{g}_i = \frac{1}{a^2}\ \frac{N_p}{N_p+1}\left[R_{yu}(i) + \sum_{\tau=1}^{N_s} R_{yu}(\tau)\right],\ i = 1 \sim N_s \tag{10}$$

这就是 FIR 模型参数在 m 序列输入下的相关估计[1-3]。由于这个估计式中只包含输出输入的互相关函数, 是一种最典型的相关分析法。

2 FIR 模型相关辨识的精度分析

上面描述了采用伪随机 m 序列作为辨识信号时的 FIR 模型参数估计, 这种估计仅仅需要计算输出输入的互相关函数值 $R_{yu}(\tau)$, 故这种方法称之为相关分析法。下面研究在这种情况下 FIR 模型参数估计值的统计特性。

定理1 设观测噪声$\{e(t)\}$为零均值 $E\{e(k)\}=0$, 自相关函数满足:

$$\text{当}\ \tau > n_s\ \text{时},\ r(\tau) = 0,\ \text{且}\ n_s < N_s \tag{11}$$

则采用 m 序列时 FIR 模型相关辨识满足如下统计特性:

(1) 无偏性:

$$E\{\hat{g}_i\} = g_i,\ i = 1 \sim N_s \tag{12}$$

(2) 均方误差和:

$$\sum_{i=1}^{N_s} E\{(\hat{g}_i - g_i)^2\} = 2\ \frac{N_p}{N_{p+1}}\ \frac{N_s}{N}\ \frac{1}{a^2}\left[r(0) + \sum_{\tau=1}^{n_s}\left(1-\frac{\tau}{N}\right)r(\tau)\right] \tag{13}$$

证明 首先证明无偏性。当系统中不存在输出干扰噪声时, (10)式将给出 FIR 模型参数的真实值, 故有:

$$\hat{g}_i - g_i = \frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p+1}\left[\xi(i) + \sum_{\tau=1}^{N_s}\xi(\tau)\right] \tag{14}$$

因为:

$$E\{\xi(\tau)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E\{e(k)\}u(k-\tau) = 0 \tag{15}$$

故得:

$$E\{\hat{g}_i - g_i\} = \frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p+1}\left\{E\{\xi(i)\} + \sum_{\tau=1}^{N_s} E\{\xi(\tau)\}\right\} = 0 \tag{16}$$

从而无偏性得证。

下面证明性质(2)。利用(8)式,

$$\sum_{\tau=1}^{N_s}\xi(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[e(k)\sum_{\tau=1}^{N_p}u(k-\tau)\right] = -\frac{a}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k) \tag{17}$$

故

$$E\left\{\left[\sum_{\tau=1}^{N_s}\xi(\tau)\right]^2\right\} = \left(-\frac{a}{N}\right)^2 E\left\{\left[\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\} = \frac{a^2}{N}\left[r(0) + 2\sum_{\tau=1}^{N}\left(1-\frac{\tau}{N}\right)r(\tau)\right] \tag{18}$$

又因为:

$$E\left\{\xi^2(\tau)\right\} = E\left\{\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}e(i)e(j)u(i-\tau)u(j-\tau)\right\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}r(i-j)u(i-\tau)u(j-\tau)$$

根据m序列的自相关函数性质,有:

$$\sum_{\tau=1}^{N_s}E\left\{\xi^2(\tau)\right\} = \frac{N_p}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\left[r(i-j)R_{uu}(i,j)\right] = \frac{N_p}{N^2}\left\{Nr(0)a^2 + \sum_{0<|i-j|\le n_s}\left[r(i-j)\left(-\frac{a^2}{N_p}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{a^2}{N}\left[N_p r(0) - 2\sum_{\tau=1}^{N_s}\left(1-\frac{\tau}{N}\right)r(\tau)\right] \tag{19}$$

再根据(14)式,

$$\sum_{i=1}^{N_s}E\left\{(\hat{g}_i - g_i)^2\right\} = \left(\frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p+1}\right)^2\sum_{i=1}^{N_s}E\left\{\left[\xi(i) + \sum_{\tau=1}^{N_s}\xi(\tau)\right]^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p+1}\right)^2\left\{\sum_{\tau=1}^{N_s}E\left\{\xi^2(\tau)\right\} + (N_p+2)E\left\{\left[\sum_{\tau=1}^{N_s}\xi(\tau)\right]^2\right\}\right\}$$

将(18)和(19)式代入上式,最终得(13)式。

以上得到了在有色噪声的干扰下,利用m序列进行FIR模型参数相关辨识的精度的显式解析式。这样也纠正了教科书[1]的错误,[1]中得到的均方误差和为零,在N有限的情况,只有$\hat{g}_i \equiv g_i$才成立,在噪声干扰下,这是不可能的。

3 相关辨识的精度上界和下界

3.1 误差下界:

$$\sum_{i=1}^{N_s}E\left\{(\hat{g}_i - g_i)^2\right\} = \frac{N_p}{N_p+1}\frac{N_s}{N}\frac{1}{a^2}\left[r(0) + 2\sum_{\tau=1}^{N_s}\left(1-\frac{\tau}{N}\right)r(\tau) f r(0)\right]$$

$$= \frac{N_p}{N_p+1}\frac{N_s}{a^2}E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\} + \frac{N_p}{N_p+1}\frac{N_s}{N}\frac{r(0)}{a^2} \ge \frac{N_p}{N_p+1}\frac{r(0)}{a^2}\frac{N_s}{N} \tag{20}$$

当N_p充大时,$N_p/(N_p+1)\approx 1$。显然,$r(0)$即为观测噪声序列$\{e(t)\}$的功率值,而a^2是输入信号m序列的功率值。因此有如下结论。

定理2 对于一般的零均值平稳观测噪声$\{e(t)\}$,且当$\tau \ge N_s$时,$r(i)=0$,则采用m序列相关辨识时FIR模型参数估计误差下界等于系统的噪信比$r(0)/a^2$与阶次样本数比N_s/N的积。

3.2 误差上界:

根据$\tau > n_s$时$r(\tau)=0$的假设,可设噪声模型为滑动平均(MA)模型,即

$$e(k) = \sum_{i=0}^{n_s}c_i\epsilon(k-i) \tag{21}$$

其中$\{\epsilon(k)\}$是零均值方差为σ^2的白噪声序列,即

$$E\{\epsilon(k)\} = 0, E\{\epsilon(k)\}\epsilon(k-\tau)\} = \sigma^2\delta(\tau) \tag{22}$$

$\delta(\tau)$为Kronecker $\delta-$函数,即$\delta(0)=0$,而$\tau \ne 0$时$\delta(\tau)=1$。那么可证明:

$$E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\}=\frac{\sigma^2}{N^2}[c_0^2+(c_0+c_1)^2+\cdots(c_0+c_1+\cdots c_{n_s-1})^2$$
$$+(N-n_s)(c_0+c_1+\cdots c_{n_s})^2+(c_1+\cdots c_{n_s})^2+\cdots+(c_{n_s-1}+c_{n_s})^2+c_{n_s}^2] \tag{23}$$

根据不等式:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leq n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \tag{24}$$

其中等式仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。因此(23) 式满足:

$$E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\}\leq\frac{\sigma^2}{N}(n_s+1)(c_0^2+c_1^2+\cdots+c_{n_s}^2) \tag{25}$$

又知:

$$r(0)=E\{e^2(k)\}=\sigma^2\sum_{i=0}^{N_s}c_i^2 \tag{26}$$

因此,

$$E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\}\leq\frac{(n_s+1)}{N}r(0) \tag{27}$$

根据(20) 式推导的最后一个等式, 得:

$$\sum_{i=1}^{N_s}E\{(\hat{g}_i-g_i)^2\}=\frac{N_p}{N_p+1}\frac{N_s}{a^2}E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\}+\frac{N_p}{N_p+1}\frac{N_s}{N}\frac{r(0)}{a^2}$$
$$\leq(n_s+2)\frac{N_p}{N_p+1}\frac{N_s}{N}\frac{r(0)}{a^2} \tag{28}$$

因此有如下结论。

定理3 对零均值平稳噪声$\{e(t)\}$, 当 $\tau\geq n_s$ 时 $r(i)=0$, 且 $n_s<N_s$, 则采用 m 序列相关辨识时 FIR 模型参数估计误差上界等于系统噪信比 $r(0)/a^2$与阶次样本数比 N_s/N 积的(n_s+2) 倍。

特别地, 如果 MA 噪声模型(21) 中, $c_0=c_1=\cdots c_{n_s}\neq 0$, 那么由(25) 式的推导可知, 在样本数 $N/n_s\to\infty$的情况下, (25) 和(27) 式的等号成立。在这种情形下, 估计误差达到上界值。又因 $n_s\leq N_s-1$, 故估计误差上界最大可达到系统噪信比与阶次样本数比乘积的 N_s 倍。

根据(23) 式, 除非 $c_0=c_1=\cdots=c_{n_s}=0$, 否则总有:

$$E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)\right]^2\right\}>0 \tag{29}$$

这里值得指出的是, 上式中, 噪声的 N 个样本的平均值可能会出现为零的情况, 但这并不说明该样本均值的方差为零。如零均值白噪声序列, 在某个时刻的取值可能为零 $\epsilon(k)=0$, 但其平方的事件均值即其方差$E\{\epsilon^2(k)\}=\sigma^2>0$。这说明, 只要有干扰噪声存在, (20) 式的最后不等式的等号就不能成立, 即, 误差达到下界的条件是不存在的。

3.3 白噪声情形:

特别地, 若观测噪声是零均值方差为 σ^2的白噪声, 那么简单地有:

$$\sum_{i=1}^{N_s}E\{(\hat{g}_i-g_i)^2\}=2\frac{N_p}{N_p+1}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{N_s}{N} \tag{30}$$

因此有如下结论。

推论 在 m 序列输入下, FIR 模型参数估计的精度约为噪信比 σ^2/a^2与阶次样本数比N_s/N 乘积的2倍。

这一特殊情况下的结果与文献[2] 所推出的结果是完全相符的。

4 实例分析与结论

例1 若观测噪声模型为

$$e(t)=\epsilon(t)+\epsilon(t-1)+\epsilon(t-2) \tag{31}$$

则自相关函数为

$$r(0)=3\sigma^2, r(1)=2\sigma^2, r(2)=\sigma^2, r(\tau)=0, \tau\geq 3 \tag{32}$$

由定理1的(13)式得知，当 N, N_s 较大时有

$$\sum_{i=1}^{N_s} E\left\{(\hat{g}_i - g_i)^2\right\} \cong 4 \frac{N_s}{N} \frac{r(0)}{a^2} \tag{33}$$

对这一简单的MA噪声情形，采用 m 序列相关辨识法的系统参数估计误差等于采用 $A-$ 最优输入时估计误差的4倍，即噪信比 $r(0)/a^2$ 与阶次样本数比 N_s/N 乘积的4倍。这与用定理3的误差上界估计的结果是一致的。

例2 考虑噪声模型

$$e(t)-0.5e(t-1)=\epsilon(t) \tag{34}$$

这是一个简单的一阶自回归(AR)模型，不难得知：

$$r(0)=4\sigma^2/3, r(\tau)=(0.5)^{\tau} r(0) \tag{35}$$

当 $\tau\geq 10$ 时，$r(\tau)< 0.001r(0)$ 可以忽略。因此取 $N_p=N_s>10$ 而当 N/N_p 较大时，由定理1的(13)式得知，同样有(33)式成立，估计误差也约等于噪信比与阶次样本数比乘积的4倍。

这里指的是精确采用 m 序列二值自相关函数计算的情况。如果在辨识中忽略 m 序列非零点自相关函数值 $-a^2/N_p$，尽管该值相对很小，系统的估计误差将不随样本数 N 的增加而收敛。即使 $N_p\to\infty$，也不能认为伪随机 m 序列达到了白噪声的性质。

关于更一般的噪声情形($n_s\to\infty$，而 N_s 有限)，以及 $N_s\to\infty$ 时传递函数辨识精度分析即黑箱辨识精度分析，信号周期 N_p 的最优选取，初始值测量误差对辨识精度的影响及其消除方法等问题，是值得进一步深入研究的。

参考文献

1 韩光文. 辨识与参数估计. 北京: 国防工业出版社, 1980

2 李白男. 伪随机信号及相关辨识. 北京: 科学出版社, 1987

3 方崇智, 萧德云. 过程辨识. 北京: 清华大学出版社, 1988

4 Isermann R, Bauer U. Two step process identification with correlation analysis and least squares parameter estimation. Trans. of AMSE, Series G, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1974, 96: 425～432