国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第3期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.21 No.3 1999

金融危机与金融数学*

金治明 段小龙

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文从东南亚金融危机出发, 介绍了金融工程与金融数学的基本内容, 特别介绍了获得1997年诺贝尔经济学奖的Black-Scholes工作, 提出对开展金融数学研究的见解。

关键词 金融危机, 金融工程, 金融数学

分类号 O224

The Financial Crisis of Southeast Asia and Mathematical Finance

Jin Zhiming Duang Xiaolong

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, the financial crisis of Southeast Asia and the fundamental content, especially the job of Black and Scholes that won Nobel Prize in economics in 1997 is discussed. This paper also suggests that the research on mathema ties of finance should be carried out.

Key words financial conjuncture, financial engineering, financial mathematics

1 东南亚金融危机

1997年7月, 东南亚金融危机不期爆发。问题首先出现在泰国, 1997年5月, 泰国铢对美元的比价突然下跌, 货币投机商对泰铢的阻击从天而降, 伴随着抛售泰铢, 抢购美元的狂潮, 大批工厂倒闭, 公司纷纷裁员, 物价大幅上涨, 股市狂泄千里, 国民经济一片萧条。随着泰铢的大幅贬值, 菲律宾比索, 印尼盾, 马来西亚林吉特象多米诺骨牌般的纷纷倒下。

在这场金融危机中, 索罗斯和他领导的量子基金起着推波助澜的作用。他们通过 “高卖低买 ”的手段获取了巨额的利润, 量子基金仅在一个月内就获得20亿美元。他们在1997年2月大量买入泰国的一种远期合同, 这种远期合同规定买方以一定的价格用远期泰铢与卖方的即期美元交换。如果泰铢升值, 则合同的卖方将获益; 反之, 则买方盈利。到1997年4月, 投机商们持有约150亿美元的此类合同, 仅索罗斯一人就有40亿美元。1997年5月8日, 投机商们突然发难, 在外汇市场上大力抛售泰铢, 使泰铢对美元汇率一路猛跌, 泰国中央银行为了维护泰铢的国际信誉, 避免泰铢贬值以加重泰国的外债负担, 竭尽全力进行挽救, 仅5月份就抛出40亿美元购买泰铢, 但由于缺乏相应的监管机构, 金融机构没有应付此类事件的经验, 加之外汇储备不足, 国内人心不稳, 央行承受不住泰铢贬值的压力, 被迫于1997年7月2日宣布让泰铢自由浮动, 当天, 泰铢应声下跌20%。到了1997年9月, 泰铢对美元的比价已从危机前的1美元兑25泰铢跌到1美元兑36泰铢, 投机商们从中捞足了好处。

东南亚国家的金融危机的根源在各国的本身, 专家们分析认为主要可以归结在以下三个方面:

一、经济结构不良, 国际收支恶化, 以致经常性项目赤字越来越大, 外债增加, 国内经济极其不稳定。

二、地产泡沫严重。在80年代, 东南来国家房地产业过热, 金融贷款纷纷流向房地产业, 致使楼宇大量过剩, 银行呆账、坏账激增, 银行运作困难, 人民信心动摇, 频频引发挤提风潮, 造成金融动荡。

三、货币政策不当, 金融调控不力, 对外资缺乏有效管理。

* 1998年8月24日收稿
第一作者: 金治明, 男, 1941年生, 教授

危机告诉我们：一国经济的健康持续发展是由一些更深刻，更高层次和更大范围的因素决定的，过度依赖外资而又不能正确利用外资会给本国经济留下诸多隐患。其次，外国游资对金融市场的冲击决不可低估，因此必须加强对金融市场的研究。

2 金融工程

由东南亚金融危机看出，金融对于现代化国家的重要意义。现代化的战争不应只是电子战与信息战，不用一兵一卒的金融战无疑是战争的延伸与发展。由此可见金融不但具有经济意义，而且具有明显的国防意义。在冷战时代，两弹一箭是列强争霸的战略领域，在后冷战时代，信息工程、生物工程和金融工程则是全球竞争的战略领域。前美国政治学会会长，哈佛大学战略研究所所长Huntington在"文明冲突与重建世界秩序"中列举了西方文明控制世界的14个战略要点，其中第一条'控制国际银行系统"第二条'控制全部硬通货"第五条"掌握国际资本市场"都与金融有关，而把'控制高科技的军火工业"、'控制航天工业"放在倒数第一，第三的位置。

"金融工程"是1988年由J.D.Finnerty首次提出，他认为金融工程是设计、研制、发展和落实金融创新的工具与流程、用来创造性解决金融难题。哈佛大学的Tufano定义金融工程是应用定量金融理论以解决市场和企业面临的金融课题。金融工程在国外有不少成功的实例，这里举几个例子说明金融工程的应用。

我国三角债的一个重要来源是地方政府基建资金的缺口，而又缺乏新的金融工具筹集资金，老百姓手中的余钱只有一种低利率的银行存款的投资方式，缺乏积极性。美国的各级政府一直到中小学的学区，有数万机构有权发行市政债券。他们用未来的收入担保债券的发行，吸引了大量的民间游资。

房地产抵押贷款的二次证券化是美国政府金融创新的典型实例。在美国，一个人只要有稳定的收入，就可申请到15至30年的抵押贷款，每月分期付款的数额与房租相差无几。拥有对住房的预期所有权的住户就会妥善维护房产使之增值，和租户的短期心理不同。但是，利率固定的抵押贷款使银行的收益与风险并不对称。联邦地产证券公司采用所谓的风险对冲的证券组合，降低了房地产抵押证券的整体风险。

在目前国有企业改造中，采取企业的股份化是一条途径。法国一家国有生物化工公司，将公司股票在内部连续降价也销不出去，因为职工怕承担市场风险，这导致公司股票的市场价格下滑。后来，一家声誉很好的投资公司采用了适当的金融工具——职工股票期权解决风险不对称的问题。投资公司许诺：在四年半的时间内保证持股的职工能够得到不低于25%的回报率，条件是股票增值时，投资公司从中抽取1/3的收入。结果是职工踊跃认购企业股票，使得股价大增。化工公司走出困境，投资公司也得到很多的利益。

德克萨斯州有一大一小公司，大公司下有一个子公司M.W，其油田开采多年，出油率降低，陷于亏损，决定出售。而小公司由于发展出开采簿油田的技术，有意收购M.W.双方对M.W的资产评估出入不大。但卖方对未来天然气市场看好，而买方看淡，因此对预期收益差距较大，使得买卖双方价差约为交易额的10%.后来双方用金融工程设计的障碍期权得到了解决。双方协议订出未来天然气最高合理价与最低支持价，一旦天然气价格跌破最低支持价，则卖方需给买方补尝；反之买方需给卖方部分利润。

3 金融数学

上述的例子并不能概括金融工程的内容与意义。而且这些例子也只是概述，详细的细节必然要牵涉到许多数学问题。无论如何金融工程的基础是定量化的金融理论，也就是现代的'金融数学"。它的核心是Markowski的投资组合分析，Black-Scholes期权定价理论，以及Duffile-Schafer的非完全资产市场的均衡理论等。

Markowitz在1952年提出了投资组合理论。他把投资组合的价格看成是随机变量，以均值衡量它的收益，而以它的方差衡量风险。因为风险与收益总是一对不可分离的连体儿，为了得到大的收益必须冒

大的风险。所以我们往往只能求收益一定条件下，风险最小的问题，它可化为线性约束下的二次规划问题。Markowitz 的理论又称为均值- 方差分析。Sharpe 则提出资产定价模型(CAPM)，他利用投资组合的价格变化与"市场投资组合"的价格变化的关系，用回归的方法得到对股票交易风险的估计。这就是人们称为"华尔街第一次革命"的理论。并与 H. Meller 一起获得1990年诺贝尔经济奖。

经济学的科学化和定量化是20世纪30年代开始的，但定量的经济理论和金融市场相结合的突破则是在70年代。1973年 Fiscler Black 博士和 Myron Scholes 教授发表的期权定价理论和芝加哥期权市场的诞生被人们称之为第二次华尔街革命，标志着一个时代的开始。Scholes 当时是美国麻省理工学院的教授，而 Black 则在一家咨询公司工作，他们的论文投寄给一些金融学和经济学杂志，因为审稿人看不懂其中深刻的含义而多次被拒稿，后来经人推荐发表在'政治经济学报"上，成为现代金融学发展的一座辉煌的里程碑和基础。Black 和 Scholes 的工作发表后，很快被实际应用，不久德克萨斯就推出装有 Black- Schlos 公式的计算器，现在几乎所有从事期权交易的经纪人都有此类计算机。与应用发展的同时，理论上开展了进一步深入研究，哈佛大学的 Robert Merton 教授就是杰出的代表。由于期权定价理论的突出的贡献，Merton 和 Scholes 荣获1997年度的诺贝尔经济学奖。在发表的授奖背景材料中指出，对期权与衍生证券定价的企图已有70多年的历史，从1900年 Louis Bachelier 在他的博士论文提出的公式到1964年 Boness 所建议的公式，都含有未知的利率或假定无风险，这是难以被实际接受的。材料还指出，关于期权的定价公式有重要的科学意义，它不但解决了衍生证券的定价问题，而且在解决许多经济问题有重大的意义。

金融数学的兴起是金融界的一场数学革命，它使得数学规划、随机分析、随机最优控制、非线性分析、多元统计等数学工具在金融理论和实际中起着关键的作用，标志着金融学已经步入成熟的阶段。在国外，近几年已出现金融业大量雇佣和资助数学家为他们研究金融数学的高潮，"火箭科学家向华尔街的大规模转移"，一些大学的数学系纷纷开设金融数学的硕士、博士方向，这是一个我们值得引起重视的动向。下面简单地介绍这个重要的成果，这就不能不牵涉到许多概率论。

4 Black-Scholes 公式

4.1 期权与经济 Brownian 运动模型

假设市场有两种可投资的资产。一是固定利率(设为 r)的债券 B_t，它是没有风险的，二是股票或其它金融工具 S_t，它是有风险的。我们知道股票市场瞬息万变，股票交易具有较大的风险。而与某种股票(称为期权的标的物)相联系的期权的设立就可以降低风险。期权是投资者与证券发行商之间的远期合同，持有合同者在合同约定的期限(这里假定为 T)，有权以合同确定的价格(称为敲定价 Strikeprice)购买当时相应的股票。如果到期时，$S_t > K$ 则合同持有者，当然要实施他的期权，以获得收益 $f_T = S_T - K > 0$; 如果 $S_T < K$，则合同持有者可以不实施合同，此时他的损失就是购买合同的价格。例如某投资者购买100个 IBM 股票的看涨期权，$K = 140$，假定股票的现价为＄138，$T = 2$ (个月)，期权价格为＄5. 如果股票价格在到期日低于＄140，他当然放弃期权，损失是＄500，如果到期日股票价格为＄155，通过执行该期权，他将获利＄15×100- ＄5×100= ＄1000 (不记交易费用). 也就是说，他投资＄500，可能的赢利为＄1000. 这比直接买股票的初始投入要少得多。

在上述看涨期权中，称 $f_T \stackrel{\triangle}{=} \max(S_T - K, 0)$ 为欧式看涨期权的未定权益(contigent claim). 这里"未定"一词是指 f_T 为一个随机变量。金融工程的一个核心问题是如何为期权或其它的有价证券进行正确的估值与定价，这就是 Black-Scholes 的具有重大意义的工作。

股票和期权都有风险，风险来自于股票的价格是一个随机过程。所以第一个问题是为股票价格过程建立合适的数学模型。为了说明 B-S 的工作，我们考虑时间连续的情形。假设债券 $dB_t = rB_t dt$，而假定股票价格过程 S_t，$t \leq T$ 服从经济 Brownian 运动或对数正态分布，也即

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\}, \sigma > 0, \mu \in \mathbf{R} \quad (1)$$

这里 $(W_t)_{t\geq 0}$ 是 Brownian 运动，也即为零初值，增量 $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ 的独立增量过程。式

(1) 中，μ，σ为常数，前者称为飘移系数，后者称为扩散系数或波动率。

4.2 鞅与随机积分

为了说明B-S公式，我们不得不简单叙述一下近代随机分析的几个重要概念。设(S_t)，$0\le t\le T$ 为股票价格过程，$\Omega\overset{\triangle}{=}(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ 为所考虑的概率空间。令$\mathscr{F}_t=\sigma(S_0,\cdots,S_t)$，表示观察到$t$为止的全部信息。定义在$\Omega$上的随机过程$(X_t)$，$t\le T$ 称为是鞅，如果它满足：$\mathbf{E}(X_t\mid\mathscr{F}_s)=X_s$。如果把过程$(X_t)$解释为依赖于$(S_t)$的随机收益，那么鞅具有某种"公平性"。在知道$s$之前关于过程$(S_u)$信息的条件下，$t$时所得的条件期望就是$X_s$，也即$t$时的所得有可能大于，也有可能小于$X_s$，这种随机性正是"公平性"的体现。容易证明Brownian运动是一个鞅。

Brownian运动(S_t)是一个a.s.连续的过程，但它的轨道不是有界变差的，因此$\int f(s,\omega)\,\mathrm{d}W_s$不能看成是Sfiljies积分。但是如果$f(t)$是阶梯型函数$f(t)=\xi_j$，$t\in(t_j,t_{j+1}]$，其中$0=t_0<t_1<\cdots<t_T=T$ 则可定义

$$\int f(s)\,\mathrm{d}W_s=\sum_{0\le j\le k-1}\xi_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})+\xi_k(W_t-W_{t_k})\tag{2}$$

对于一般的适应可测函数（随机过程）$(f(t))$，如果它满足

$$\mathbf{E}\left[\int f^2(s)\,\mathrm{d}s\right]<\infty$$

则可以在均方意义下定义$\int f(s)\,\mathrm{d}W_s$为形如(2)式的极限。这就是对Brownian运动的随机积分。从而

$$\int a(s)\,\mathrm{d}s+\int b(s)\,\mathrm{d}W_s$$

在上述的意义下是可定义的。于是随机积分方程

$$X_t=\eta+\int a(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int b(s,X_s)\,\mathrm{d}W_s\tag{3}$$

有意义。我们把随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t=a(t,X_t)\,\mathrm{d}t+b(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t,\ X_0=\eta\tag{4}$$

看成与(3)同义。众知，通常的微积分有一个关于复合函数的微分公式。相应的随机微分公式，就是著名的Ito公式。

设随机过程(X_t)满足(4)，$f(t,x)$为关于t一次可微，关于x二次可微的函数，则

$$\mathrm{d}f(t,X_t)=f_x\mathrm{d}t+f_x\mathrm{d}X_t+\frac{1}{2}f_{xx}b^2(t)\,\mathrm{d}t\tag{5}$$

(5)就是Ito公式，显然头两项是通常微分所共有的，区别是有第三项。

现在考虑由(1)式确定的股票价格(S_t)，我们把它看成是$X_t=(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t$的函数，即设$S_t=f(X_t)$ 而$f(x)=S_0e^{x_t}$。那么$f_t=0$，$f_x=f_{xx}=S_0e^x$，由Ito公式得到

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t\tag{6}$$

因此，飘移系数μ表示股票价格的增长率或称为是期望的收益率，$\mu>0$，表示增长，而$\mu<0$则表示下跌。而σ则表示股票价格随机波动的大小。

4.3 Black-Scholes公式

称$\mathscr{F}_t$适应过程(θ_t^0,θ_t^1)为投资策略，表示投资者将用θ^0B_t投资于购买债券，而用θ^1S_t购买股票。因此t时投资者的资本为

$$X_t=\theta^0B_t+\theta^1S_t$$

满足$\mathrm{d}X_t=\theta_t^0\mathrm{d}B_t+\theta_t^1\mathrm{d}S_t$的策略称为是自筹资策略，它表明投资者资本的积累完全来自市场的赢利，既不追加又不消费。现考虑一般的欧式未定权益$\xi=f(S_T)$，其中f为$\mathbf{R}_+$上的连续函数，我们需要确定它在时间t时的价值。我们把它看成是在T时达到ξ的某种自筹资的投资策略(θ_t^1,θ_t^0)下，资本在t时的值。我们希望得到$X_t=F(t,S_t)$，的解，而$F(t,x)$关于t一阶可微，关于x二阶可微。因此

$$\theta_t^1 S_t + \theta_t^0 B_t = X_t = F(t, S_t) \tag{7}$$

由自筹资性质

$$\mathrm{d}X_t = (\mu\theta_t^1 S_t + r\theta_t^0 B_t)\mathrm{d}t + \sigma\theta_t^1 S_t \mathrm{d}W_t = \theta_t^0 \mathrm{d}B_t + \theta_t^1 \mathrm{d}S_t \tag{8}$$

而由Ito 公式

$$\mathrm{d}X_t = [F_t(t, S_t) + F_x(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}F_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2]\mathrm{d}t + F_x(t, S_t)\sigma S_t \mathrm{d}W_t \tag{9}$$

比较 (8), (9) 得到

$$\theta_t^1 = F_x(t, S_t), \theta_t^0 = (rB_t)^{-1}[F_t(t, S_t) + \frac{1}{2}F_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2] \tag{10}$$

下面将确定 $F(t, x)$，从而这两式也就确定了自筹资策略。由于

$$\theta_t^1 = B_t^{-1}(F(t, S_t) - F_x(t, S_t)S_t) \tag{11}$$

由上两式，以及 $F(T, S_T) = \xi = f(S_T)$ 得到 F 满足二阶偏微分方程与终端条件:

$$F_t(t, x) + rxF_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx}(t, x) - rF(t, x) = 0$$

$$F(T, x) = f(x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_+ \tag{12}$$

上式称为Black-Scholes 偏微分方程。

现在考虑欧式买入期权，即设 $\xi = (S_T - K)^+$，记它的价格为 $C(t, S_t)$，则由 (12)

$$C_t(t, x) + rxC_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(t, x) - rC(t, x) = 0$$

$$C(T, x) = f(x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_+ \tag{13}$$

由期权定价的经济意义，我们有边界条件

$$C(t, 0) = 0, C(t, x) \sim x \quad 当 x \to \infty.$$

为了解此热传导方程，引入变换

$$x = Ke^y, t = T - 2\tau/\sigma^2, C(t, x) = Ke^{-\alpha\tau + \beta y}U(\tau, y) \tag{14}$$

则当取 $\beta = -1/2(k_1 - 1)$，$\alpha = -1/4(k_1 + 1)^2$，$k_1 = 2r/\sigma^2$，可使 (13) 化简为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ U(0, y) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)y}, 0) \end{cases} \tag{15}$$

由 Fourier 变换的方法，解得

$$\begin{aligned} U(\tau, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}U(0, z)e^{-(y-x)^2/4\tau}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int^{\infty}(e^{-\theta_1 z} - e^{-\theta_0 z})e^{-(y-x)^2/4\tau}\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{16}$$

经计算,

$$C(t, x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{17}$$

而

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r + 1/2\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{18}$$

$$d_2 = \frac{\log(x/K) + (r - 1/2\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{19}$$

这就是得到诺贝尔奖的 Black-Scholes 公式。

Black-Scholes 公式的最主要特征是，公式中不含 μ，也即对于自然的未定权益，其期权价格不依赖于飘移系数 μ，这个事实的确有点使人惊奇，它首先被 Merton 在1973年发现。从经济学的观点看，这表明风险的中性。事实上，μ 是期望的收益率，r 是无风险利率，$\mu - r$ 度量了风险的程度。由于B-S 公式中不含 μ，因此，假定 $\mathrm{d}S_t = S_t(r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t)$ 将不影响欧式期权的定价，这就是所谓风险中性定价。

现在转而考虑所谓美式期权的问题。与欧式期权不同,美式期权允许在到期日之前的任何交易日实施权利。它的未定权益过程 (f_t), $0\leq t\leq T$ 一般假定为右连左极过程。实施权利的时间 τ 是一个随机变量,在概率论中称为停时,它满足 $\tau\leq t\in\mathscr{F}_t$ 也即 τ 的值是由期权所有者根据市场情形来决定的。这里出现两个问题:一是如何定价?二是何时实施权利对投资者最有利?在一些技术性条件下,我们得到如下结论:

1. 美式期权的定价 $C^* = \sup_\tau Ee^{-r\tau}f_\tau(S_\tau(r))$ 也即是 $(e^{rt}f_t, \mathscr{F}_t)$ 所谓最优停止问题的值。

2. 最佳的实施期就是上述问题的最优停时。

因为这要牵涉到最优停止理论,限于篇幅难以展开叙述。

几点注释:

从上面的叙述看出,期权的定价理论其实是解决了对一个满足某种条件的资产过程 (f_t),由它的终值 (f_T),来估计它在 t $(\leq T)$ 的值。当然要求这个过程有一个标的过程 (S_t),它是一个所谓的扩散过程,即满足

$$dS_t = S_t(a(t, St)d\tau + b(t, S_t))dW_t$$

系数 $a(t, x)$, $b(t, x)$ 要满足一定条件,而资产过程 f_t 依赖于 $(S_u)_{0\leq u\leq t}$. 或者说是一个可测泛函。因此,Black-Scholes 理论解决了一个资产评估的问题,在企业资产评估,拍卖都可以应用。认识期权的普遍性我们可以扩大视野,可以进一步推广期权的应用。在各种金融交易与财务活动中有许多隐蔽的期权,例如定期存款隐含着可以提前支取的期权;企业破产时,股票只承担有限债务蕴含着股东有放弃企业,将部分债务转移给债权人的期权。

期权的不同决定于未定权益的不同,也就是 Black-Scholes 偏微分方程(12) 的边界条件的不同。由此可见,对于不同的边界条件,可以得到各种不同的期权定价公式。关于金融工程的例子中职工股票期权,障碍期权也是对相应的不同的未定权益作出的。这就是说,我们可以根据不同的需要构造不同的期权以解决不同的金融问题。这就是Black-Scholes 工作的普遍意义。

金融数学的研究还有许多工作可以做。在理论研究上,模型的进一步修正是一个需要深入研究的问题。我们可以根据现实的金融市场考虑对 $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ 的修正,比如考虑 μ, σ 为另一个扩散过程;也有人考虑用 $d(N_t - \lambda t)$ 代替 dt,这里 N_t 为一个 Poisson 过程;在 B-S 公式中唯一的未知量 σ 如何用统计的方法获得?理论上,敲定价 K 可以随意选取,但如何选取最能被市场接受?在应用研究上,如何针对具体的金融问题设计新的期权?也不是所有期权都会有精确的定价公式,如何做各种近似计算?各类保险合同实际上也是一种特殊的期权,如何应用于保险事业?最重要的是如何结合中国的金融事业?这里有许多宏观与微观经济的问题需要解决。

从1990~1997年及1969年的9个年头获诺贝尔经济学奖的工作中,其中除1991~1993年外,都是数学家或数学家与经济学家的合作的工作。充分说明了数学的意义与作用,说明现代数学的参与对其它学科发展的意义。马克思精辟的论断仍然发人深思:"一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。"(自拉法格 《忆马克思》)

参考文献

1 严加安. Introduction to Martingale Methods in Option Pricing. Liu Bie Ju Centre for Mathematical Sciences, Lecture Totes in Mathematics 4, 1998

2 Shiryaev A N, Kabanov Y M, Kramkov D O, Mel´nikov A V. Toward he Theory of Opition of Both European and American Types I, Π. Theory Probab. 39 (1)