变截面梁的数值传递函数解法*

李海阳 周建平 冯志刚

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘 要 本文在对一阶变系数微分方程组的数值解分析的基础上，提出了一种数值传递函数方法，作为对传递函数方法的一种直接推广。利用这种方法可以很方便地把传递函数方法扩展到各种变系数微分方程问题，本文以变截面梁为例进行了讨论，并建立了一种通用单元以减少计算。数值算例表明本方法具有精度高、应用灵活的特点。

关键词 数值传递函数，通用单元，变系数微分方程

分类号 O242

Numerical Distributed Transfer Function Method for Wedge Beam

Li Haiyang Zhou Jianping Feng Zhigang

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract A numerical distributed transfer function method (NDTFM) is introduced for the analysis of state space equations of distributed parameter systems with variable coefficients. The method is the extension of DTFM (distributed transfer function method), and it is easy to use for various physical-mathematical problems with variable parameters. Wedge beam is analyzed using this method, and a general element is derived to raise numerical efficiency. Numerical results show that this method is efficient and easy to use.

Key words NDTFM, general element, variable coefficients

传递函数方法是近年来由Yang、Tan[1]等引入进行分布参数系统的求解的，由于方法本身的特点，在求解具有变系数微分方程的问题时存在一定的困难。一般的处理方法是与摄动方法相结合，求传递函数的摄动解[2]，但这种方法的推导繁琐，难以形成一套通用的方法。本文在对一阶变系数微分方程组的数值分析基础上，对传递函数方法进行了扩展。本方法在形式上与传递函数方法非常相似，可以很方便地用于对变截面梁、圆锥壳、不规则板等问题的分析。本文将以变截面梁为例对本方法的具体应用进行讨论。

1 变系数方程的传递函数近似解

本文研究具有如下形式的变系数分布参数系统的数值传递函数方法的数值方法：

$$\eta' = \boldsymbol{F}(x)\eta \tag{1}$$

将区间 $[x_0, x]$ 分成 n 个区间，区间长度 Δ_i，上方程的解可以表示为

$$\eta = \lim_{n\to\infty}\left(e^{F(x)\Delta_n}e^{F(x_{n-1})\Delta_{n-1}}\cdots e^{F(x_1)\Delta_1}\right)\eta_0 = \Phi(x_0, x)\eta_0 \tag{2}$$

容易推得函数 $\Phi(x_0, x)$ 的性质

$$\frac{d\Phi(x_0, x)}{dx} = \boldsymbol{F}(x)\Phi(x_0, x) \quad \Phi(x_0, x) = \Phi(x, x_0)^{-1} \tag{3}$$

对函数 $\Phi(x_0, x)$ 可采用数值方法进行计算。易知当 $\boldsymbol{F}(x)$ 的特征向量不随 x 变化时有

* 国家自然科学基金资助
1998年10月11日收稿
第一作者：李海洋，男，1972年生，博士生

$$\Phi_F(x_0, x) = e^{\int_0^x F(x)\,dx} \tag{4}$$

设数值积分通式为

$$g(x_0, x) = \int_0^x f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \tag{5}$$

将 (5) 式代入 (4) 并参照 (2) 可将其近似推广到特征向量可变的情况，有

$$\Phi_F(x_0, x) \approx e^{F(x_n)A_n} e^{F(x_{n-1})A_{n-1}} \cdots e^{F(x_1)A_1} \tag{6}$$

由 (2) 式可知当 n 取得足够大时 (6) 可以收敛到精确解。用这种方法可以把标量数值积分的各种方法，如高斯积分、梯形积分等等，直接近似推广到对 $\Phi_F(x_0, x)$ 的求解中。

得到齐次方程 (1) 式的解后，可以很容易地得到非齐次方程的解。设方程为

$$\eta' = \boldsymbol{F}(x)\eta + \boldsymbol{f}(x) \tag{7}$$

边界条件：

$$\boldsymbol{M}\eta(-a) + \boldsymbol{N}\eta(a) = \boldsymbol{d}$$

其中，η 为状态向量，$\boldsymbol{d}$ 为节点位移向量，η 为状态向量，局部坐标 $x \in [-a, a]$，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 为系数矩阵。方程 (7) 的解可以表示为

$$\eta(x) = \boldsymbol{H}(x)\boldsymbol{d} + \boldsymbol{f}(x)$$

其中，

$$\boldsymbol{H}(x) = \Phi_F(0, x)[\boldsymbol{M}\Phi_F(0, -a) + \boldsymbol{N}\Phi_F(0, a)]^{-1}$$

$$\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{H}(x)\int_{-a}^{a} \boldsymbol{G}(x, \xi)\Phi_F(\xi, 0)\boldsymbol{f}(\xi)\,d\xi$$

$$\boldsymbol{G}(x, \xi) = \begin{cases} \boldsymbol{M}\Phi_F(0, -a) & \xi < x \\ -\boldsymbol{N}\Phi_F(0, a) & \xi > x \end{cases}$$

由 (8) 式出发，采用与解析传递函数类似的方法可对各种物理问题进行分析。

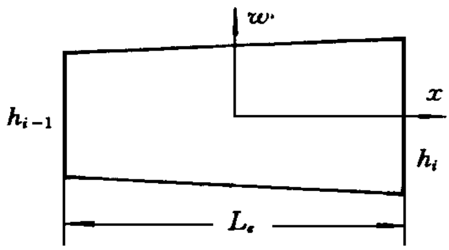

图 1 变截面梁单元

Fig. 1 A wedge element

2 变截面梁的通用单元构造

设矩形变截面梁，宽度为 b，高度成线性分布，左端高度为 h_0，右端高度为 h_n，梁长度为 L。构造一个矩形变截面梁单元，如图 1 所示，取其局部坐标为 $x \in [-a_x, a_x]$。

梁的静力平衡方程为：

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\,\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right) = f_e(x) \tag{9}$$

梁中弯矩、剪力的表达式为

$$M = EI(x)\,\frac{d^2}{dx^2}w(x) \qquad Q = \frac{d}{dx}\left[EI(x)\,\frac{d^2}{dx^2}w(x)\right] \tag{10}$$

其中，

$$EI(x) = \frac{Eb}{12}(\bar{h} + \epsilon x)^3 = C(h(x))^3 \quad \epsilon = \frac{h_n - h_0}{L}, \quad h(x) = \bar{h} + \epsilon x, \quad C = \frac{Eb}{12}$$

采用前述方法求解，把方程 (5) 改写成标准形式 (7)，然后对局部坐标 x 进行线性变换 $x = k\xi$。这样方程 (7) 可以转化为

$$\eta_\xi' = \boldsymbol{F}_\xi(\xi)\eta_\xi + \boldsymbol{f}_\xi(\xi) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{M}\eta_\xi(-a) + \boldsymbol{N}\eta_\xi(a) = \boldsymbol{d}_\xi$$

其中，$\eta_\xi = \{w \quad w_\xi' \quad w_{\xi^2}'' \quad w_{\xi^3}'''\}^{\mathrm{T}}$ $\quad \boldsymbol{d}_\xi = \{w(-a) \quad w'(-a) \quad w(a) \quad w'(a)\}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{F}_\xi(\xi)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-\dfrac{6B^2}{(1+B\xi)^2}&-\dfrac{6B}{(1+B\xi)}\end{bmatrix}\quad \bar{\boldsymbol{f}}_\xi(\xi)=\left\{0\quad 0\quad 0\quad \frac{f_e(k\xi)}{E_c(1+Bx)^3}\right\}^{\mathrm{T}}$$

$$B=\frac{\epsilon k}{\bar{h}}、E_c=\frac{C\bar{h}^3}{k^4}=\frac{C\epsilon^3}{kB^3}、a=ka_x、\boldsymbol{d}_\xi=T_{\xi x}\boldsymbol{d}、T_{\xi x}=\mathrm{diag}(1,k,1,k)$$

从方程(11)可以看出，对单元长度Le以及变换系数k适当选取,可以使B、a对不同的单元为常数。这样根据问题的线性性质就可以得到一个通用单元划分,在这种情况下只需要对一个单元的刚度矩阵(以及某些分布情况下的节点载荷)进行计算,其它单元都可以由它们进行简单变换得到。

设单元总数为n,单元i的长度为L_i,中点高度为$\bar{h}_i$,左、右端点高度分别为h_{i-1}、h_i,左、右端点坐标分别为x_{i-1}、x_i,单元i的变换系数为k_i,$i=1\cdots n$。经过推导可得各量之间的关系

$$L_1=\frac{h_0}{\epsilon}\left(\sqrt[n]{1+\frac{\epsilon}{h_0}}-1\right)\quad c=1+\frac{\epsilon}{h_0}L_1\quad L_i=c^{i-1}L_1$$

$$x_i=\left(\frac{1-c^n}{1-c}\right)L_1\quad h_i=h_0+\epsilon x_i\quad \bar{h}_i=\frac{h_{i-1}+h_i}{2}\quad k_i=\frac{Bh_i}{\epsilon}\tag{12}$$

由上式即可确定高度成线性分布的变截面梁的通用单元划分。对其它高度分布的梁可以用本文单元分段近似，并且也可以得到通用单元划分。如果用两个单元，一个作为通用单元，另一个作调节，则可以很方便地对各种截面分布的梁进行划分，而不须对长度作特殊的限制，此时通用单元只需满足比例关系$L_i=c^{i-1}L_1$。

3 变截面梁的传递函数解

方程(11)的解由(8)给出。由(8)、(10)式可以得到单元平衡方程

$$\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}_e+\boldsymbol{F}_e\tag{13}$$

从式(13)出发，对单元刚度矩阵和节点力组集，可以得到总体平衡关系

$$\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{d}_s=\boldsymbol{f}_s+\boldsymbol{F}_s\tag{14}$$

其中，总体刚度矩阵$\boldsymbol{K}_s$、节点位移向量$\boldsymbol{d}_s$和节点力向量$\boldsymbol{f}_s$、$\boldsymbol{F}_s$分别由单元刚度矩阵$\boldsymbol{K}_e$、单元节点位移向量$\boldsymbol{d}$和单元节点力向量$\boldsymbol{f}_e$、$\boldsymbol{F}_e$组集得到。

与有限元相同,对式(14)引入边界约束之后求解可以得到总节点位移向量$\boldsymbol{d}_s$,从而得到各单元的节点位移向量$\boldsymbol{d}_e$。回代可以得到任意点的位移和内力。

根据上一部分的分析,笔者编制了程序对两端固定、受均布载荷变截面梁进行了分析计算,并与其它方法的结果进行了比较。选取参数$h_0=0.01\mathrm{m}$,$h_1=0.1\mathrm{m}$,$L=10\mathrm{m}$,$E=100\mathrm{GPa}$,$q=1000\mathrm{N/m}$。结果如表1所示。

表1 两端固定变截面梁挠度解($h_1=0.1$,$h_0/h_1=0.1$,$L=10$)

Table 1 displacement of clamped wedge($h_1=0.1$, $h_0/h_1=0.1$, $L=10$)

		$w(2.5)$	$w(5.0)$	$w(7.5)$
本文解(10单元)	2点矩形求积	0.041091	0.027488	0.0079109
	4点矩形求积	0.041030	0.027446	0.0078985
	6点矩形求积	0.041018	0.027438	0.0078962
	8点矩形求积	0.041014	0.027435	0.0078954
有限元(500单元)[2]		0.040956	0.027429	0.0079047
传递函数阶梯解(100单元)		0.040937	0.027404	0.0078891
传递函数摄动解(10阶)[2]		0.038378	0.027120	0.0095545
精确解		0.041009	0.027432	0.0078943

以上算例表明，本文方法能够很快收敛于精确解，并且有很好的精度，是一种很有发展前途的方法。

4 结论

在对一阶变系数微分方程组的数值解分析的基础上，提出了一种数值传递函数方法，把各种数值积分推广到对传递函数的求解中，应用方便，并且解析传递函数方法是它的真子集，它可以用传递函数方法直接扩展而得到。本文把这种方法应用于对变截面梁的分析，为了减少计算量，文中给出了一种通用变截面梁单元，这种单元利用了单元之间的相似性，通过变换得到各单元之间的关系。本文方法可以很好地推广到更复杂的情况，比如，动力学问题、圆锥壳、等参板条等等。

参考文献

1 Yang B, Tan C A. Transfer Function of One-Dimensional Distributed Parameter Systems. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59: 1009～1014.

2 冯志刚. 分布参数系统瞬态响应的传递函数方法. 国防科技大学博士学位论文, 1997

3 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解. 计算力学及其应用, 1995, 12 (3): 253-260