落点散布鉴定中 Bayes 序贯截尾方法的运用*

张金槐

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 本文研究再入飞行器落点散布的鉴定方法。构造了 Bayes 序贯截尾方案; 分析了可能冒的风险, 给出了计算方法; 对于 Bayes 方法运用中的关键问题—— 验前信息的运用及验前概率的计算, 作了较详细的论述。文中提出的方法, 适用于小子样场合下的试验鉴定问题。

关键词 序贯假设检验, Bayes 统计决策

分类号 O213

The Research of Bayesian Sequential Truncated Dispersion Detecting Algorithm of the Reentry Vehicle´s Fall Points

Zhang Jin Huai

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we study the construction of dispersion detecting method of the falling points. when the stopping time is given, a sequential truncated detecting algorithm is designed, and then, the upper bounds of the probability of errors of two kinds are given. The using of prior information and the expression of prior probability of null bypothesis are also discussed.

Key words sequential festing hypothesis, Bayes statistical decision.

飞行器试验鉴定技术, 已有较多的论述。小子样下的 Bayes 鉴定理论和方法, 已越来越受到设计、试验和使用部门的重视。然而, 在使用中, 还有一些问题值得我们进一步探讨。例如, 在确定了最大试验数 (容许试验数) 之下, 如何构造一个序贯截尾方案, 并进行风险分析和计算、给出验前信息与试验信息 (现场标准条件下的试验信息) 的融合方法等。又如, 运用 Bayes 统计决策方法时, 要去给出最优停时、最优策略及其工程实现等, 都还有工作要做。为此, 下面将结合工程实践中的问题, 对上述有关命题进行研究。

1 Bayes 序贯决策鉴定方案

1.1 纵横向分别鉴定

当落点纵、横向的方差不相同时, 采用分别鉴定方法。这里讨论纵向落点散布鉴定问题。设 X 为纵向落点偏差, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 为落点系统偏差, σ^2 为待鉴定的参数。考虑竞择假设 $\mathscr{H}_0$: $\sigma = \sigma_0 \leftrightarrow \mathscr{H}_1$: $\sigma = \lambda\sigma_0 \triangleq \sigma_1$, $\lambda > 1$. 今运用 Bayes 决策方法。为此, 引入损入函数

$$L(\sigma, a_i) = \begin{cases} C_{i,0}, & \text{当 } \sigma = \sigma_0 \\ C_{i,1}, & \text{当 } \sigma = \sigma_1, (i = 0, 1) \end{cases}$$

其中 a_i 表示采纳 $\mathscr{H}_i$ ($i = 0, 1$) 的决策, $\{a_0, a_1\} \triangleq \mathscr{A}$ 为决策空间。$a_{i,j}$ 为 $\mathscr{H}_j$ 为真时, 采纳 $\mathscr{H}_i$ 所造成的损失。损失函数有多种定义, 它视实际需要而定[1]。常取 $C_{i,i} = 0$, $i = 0, 1$. 当进行了 n 次试验, 获得子样 $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \cdots, X_n)$, 此时, $\mathscr{H}_0$ 的验后概率为

$$P(\mathscr{H}_0 \mid \boldsymbol{X}_n) = \frac{P_{\mathscr{H}_0} p(\boldsymbol{X}_n \mid \sigma_0)}{P_{\mathscr{H}_0} p(\boldsymbol{X}_n \mid \sigma_0) + (1 - P_{\mathscr{H}_0}) p(\boldsymbol{X}_n \mid \sigma_1)} \tag{1.1}$$

* 1998 年 10 月修订
作者: 张金槐, 男, 1930 年生, 教授

其中 $p(\boldsymbol{X}_n|\sigma_i)$ 为 σ_i 为真时 X_n 的条件密度函数，即似然函数 $L(X_n;\sigma_i)$，$i=0, 1$. $P_{\mathscr{H}_0}$为 $\mathscr{H}_0$ 成立的验前概率。此时，易知 Bayes 决策为

$$d(P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n))=\begin{cases}\sigma_0, & \text{当 } P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)\geq \dfrac{C_{01}}{C_{01}+C_{10}}\\ \sigma_1, & \text{当 } P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)\geq \dfrac{C_{01}}{C_{01}+C_{10}}\end{cases}$$

此处 $d(\cdot)=\sigma_i$ 表示采纳 $\mathscr{H}_i$ $(i=0, 1)$ 的决策。决策的风险（平均损失）是

$$R(P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n))=P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)C_{10}I_{(0,C^*)}(P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n))+(1-P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n))C_{01}I_{[C^*,1]}(P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)) \tag{1.2}$$

今构成 Bayes 序贯决策方案。可运用似然比方法。事实上，记

$$\lambda(\boldsymbol{X}_n)=L(\boldsymbol{X}_n;\sigma_1)/L(\boldsymbol{X}_n\sigma_0)$$

引入常数 A，B，$0<A<B$，则当 $\lambda(\boldsymbol{X}_n)\geq B$ 时，采纳 $\mathscr{H}_0$，当 $\lambda(\boldsymbol{X}_n)\leq A$ 时，采纳 $\mathscr{H}_1$；当 $A<\lambda(\boldsymbol{X}_n)<B$ 时，不作决策，继续进行下一次试验。此处 $A=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$，$B=\dfrac{1-\beta}{\alpha}$，$\alpha$，$\beta$ 分别为序贯检验方案中犯弃真和采伪错误的概率。

注意到

$$P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)=\frac{P_{\mathscr{H}_0}}{P_{\mathscr{H}_0}+(1-P_{\mathscr{H}_0})\lambda(\boldsymbol{X}_n)} \tag{1.1'}$$

且 $P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)$ 是 $\lambda(\boldsymbol{X}_n)$ 的单调递减函数，于是得到下列 Bayes 序贯决策方案：

(1) 当 $\lambda(\boldsymbol{X}_n)\geq B\leftrightarrow P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)\leq\dfrac{1}{1+\dfrac{1-P_{\mathscr{H}_0}}{P_{\mathscr{H}_0}}B}\triangleq P_L$ 时，采纳假设 $\mathscr{H}_0$

(2) 当 $\lambda(\boldsymbol{X}_n)\leq A\leftrightarrow P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{1-P_{\mathscr{H}_0}}{P_{\mathscr{H}_0}}A}\triangleq P_u$ 时，采纳假设 $\mathscr{H}_1$

(3) 当 $A<\lambda(\boldsymbol{X}_n)<B$ 时，$\leftrightarrow P_L<P(\mathscr{H}_0|\boldsymbol{X}_n)<P_u$，此时不作决策，继续进行下一次试验。

上述方法，不过是 Wald 的序贯概率比检验（SPRT）的直接应用而已。这种方案，对于昂贵产品试验来说，工程实现将遇到困难。原因是不知何时停止试验（虽然可以计算出平均试验数)。为此，总是引入序贯截尾方法。截尾方法的关键在于选择停时之下，如何分割继续试验区为采纳 $\mathscr{H}_0$ 区和采纳 $\mathscr{H}_1$ 区。这里运用 Neyman- Pearson 引理，给出在固定样本容量 N（停时）之下的最优临界区域，从而确定截尾方案。事实上，当 $n=N$ 时，如果仍未作出决策，则由 Nayman- Pearson 引理，对于适当选定的 α'，有 k，使

$$P\{\lambda(\boldsymbol{X}_n)>k|\mathscr{H}_0\}=\alpha' \tag{1.3}$$

注意到

$$\lambda(\boldsymbol{X}_n)=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2}$$

于是（1. 3）式成为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2>\frac{\ln k-n\ln\dfrac{1}{\lambda}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}\,\middle|\,\mathscr{H}_0\right\}=\alpha'.$$

当 $\mathscr{H}_0$ 为真时，$\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi_n^2$，（当 μ 已知时）于是

$$\frac{\ln k-n\ln\dfrac{1}{\lambda}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}=\chi^2_{n,\alpha'}$$

解出k:

$$k = \gamma^{n} e^{-\frac{1}{2}(\gamma^2-1)\chi^2_{n,\alpha'}} \tag{1.4}$$

其中$\gamma = 1/\lambda$.

如果μ为未知，则以$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$代替，此时

$$k = \gamma^{n} e^{-\frac{\gamma^2-1}{2}\chi^2_{n-1,\alpha'}} \tag{1.4'}$$

这样，在做了$n = N$次试验之后，如果

$$P(\mathscr{H}_0 \mid \boldsymbol{X}_N) < \frac{1}{1 + \frac{1-P_{\mathscr{H}_0}}{P_{\mathscr{H}_0}} k} \triangleq P_s$$

则采纳$\mathscr{H}_1$，否则，即$P(\mathscr{H}_0 \mid X_N) \geq P_s$，则采纳$\mathscr{H}_0$因此，$N$次试验之后，必定结束试验，且作出采纳$\mathscr{H}_0$或$\mathscr{H}_1$的决策。

1.2 纵横向联合鉴定

设再入飞行器的落点偏差(ΔX, ΔZ)为二维正态变量，且ΔX，ΔZ独立，$\Delta X \sim N(0, \sigma^2)$ $\Delta Z \sim N(0, \sigma^2)$。为充分运用落点信息，这里运用纵横向联合鉴定方法。记$\gamma = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Z)^2}$，则$\gamma$服从瑞利(Releigh)分布，即$\gamma$的概率密度函数为

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sigma^2}\gamma e^{-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}}, \quad \gamma \geq 0$$

n次试验之后，有(ΔX_i, ΔZ_i)，$i = 1, \cdots, n$. 记

$$\gamma_i = \sqrt{(\Delta X_i)^2 + (\Delta Z_i)^2}, \quad i = 1, \cdots, n$$

以$\gamma_n = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$作为子样，此时似然函数

$$L(\gamma_1, \cdots, \gamma_n; \sigma) = \gamma_1, \cdots, \gamma_n (\sigma^2)^{-n} e^{-\frac{S_n^2}{2\sigma^2}},$$

此处$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2$. 考虑假设

$$\mathscr{H}_0: \sigma = \sigma_0 \leftrightarrow \mathscr{H}_1: \sigma = \lambda\sigma_0 \triangleq \sigma_1, \lambda > 1$$

此时的Bayes序贯检验方案只需将(1.1)中的$P(\mathscr{H}_0 \mid X_n)$改为$P(\mathscr{H}_0 \mid \gamma_n)$就可以了。而

$$\lambda(\gamma_n) = L(\gamma_n; \sigma_1)/L(\gamma_n; \sigma_0)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n} e^{-\frac{S_n^2}{2\sigma_0^2}\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}$$

于是用前面同样的方法，可得

$$k = \gamma^{2n} e^{-\frac{1}{2}(\gamma^2-1)\chi^2_{2n,\alpha'}} \tag{1.5}$$

其中$\gamma = \frac{1}{\lambda}$这样，便完全确定了Bayes序贯截尾方案。

如果落点具有系统偏差，且$\Delta X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$，$\Delta Z \sim N(\mu_Z, \sigma^2)$，$\mu_X$，$\mu_Z$为未知，则记

$$\gamma_i' = \sqrt{(\Delta X_i - \overline{\Delta X})^2 + (\Delta Z_i - \overline{\Delta Z})^2}, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\overline{\Delta X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i, \quad \overline{\Delta Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i$$

则在$\mathscr{H}_0$为真时，$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i')^2 \sim \chi^2_{2n-2}$，此时在(1.5)式中，只需将$\chi^2_{2n,\alpha'}$改成$\chi^2_{2n-2,\alpha'}$就可以了。

2 Bayes序贯截尾鉴定中犯两类错误的概率

当停时为$n = N$时，在N之前作序贯检验。当然有可能在N之前作出决策。如果在N之前未作出

决策，则在 N 时采用截尾决策方法。此时将继续试验区 $\{\gamma_N:\ P_L < P\ (\mathscr{H}_0\ \gamma_N)\ <\ P_u\}$ 划分为两个区域：

$$\mathscr{D}_1 = \{\gamma_N : P_L < P(\mathscr{H}_0\ \gamma_N) < P_s\}$$

$$\mathscr{D}_2 = \{\gamma_N : P_S < P(\mathscr{H}_0\ \gamma_N) < P_u\}$$

当子样 γ_N 落入 $\mathscr{D}_1$ 时，采纳 $\mathscr{H}_0$；当 $\gamma_N \in \mathscr{D}_2$，则采纳 $\mathscr{H}_1$。记此截尾方案为 T_N，记 $E^{(0)}$，$E^{(1)}$ 为序贯检验中采纳 $\mathscr{H}_0$ 和 $\mathscr{H}_1$ 的事件，则

$$P(E^{(1)}\ \mathscr{H}_0) = \alpha$$

$$P(E^{(0)}\ \mathscr{H}_1) = \beta$$

记 $G_N^{(1)}$ 为 T_N 方案中采纳 $\mathscr{H}_1$ 的事件，则 T_N 方案犯弃真错误的概率为

$$\alpha^n = P(G_N^{(1)}\ \mathscr{H}_0)$$

可以证明[2]

$$\alpha_N < \alpha + P\{P_S < P(\mathscr{H}_0\ \gamma_N) < P_u\ \mathscr{H}_0\}$$

记 σ 的验前分布函数为 $F^{\pi}(\sigma)$，则 Bayes 序贯截尾方案 T_N 的犯弃真错误的概率为

$$\alpha_{N\pi_0} = \underset{\sigma=\sigma_0}{S} \alpha_N\, dF^{\pi}(\sigma) = \alpha_N P_{\mathscr{H}_0} \triangleq \alpha_N \pi_0$$

犯采伪错误的概率为

$$\beta_{N\pi_1} = \beta_N\quad P_{\mathscr{H}_1} \triangleq \beta_N \pi_1$$

式中

$$\beta_N < \beta + P\{P_L < P(\mathscr{H}_0\ \gamma_N) < P_S\ \mathscr{H}_1\}$$

为了计算 $\alpha_{N\pi_0}$，$\beta_{N\pi_1}$ 的上界，只需计算 $P\ \{P_S < P\ (\mathscr{H}_0\ \gamma_N)\ < P_u\ \mathscr{H}_0\}$ 和 $P\ \{P_L < P\ (\mathscr{H}_0\ \gamma_N)\ < P_S\ \mathscr{H}_1\}$。先计算 $P\ \{P_S < P\ (\mathscr{H}_0\ \gamma_N)\ < P_u\ \mathscr{H}_0\}$。注意到

$$P(\mathscr{H}_0\ \gamma_N) = \frac{P_{\mathscr{H}_0}}{P_{\mathscr{H}_0} + (1 - P_{\mathscr{H}_0})\lambda(\gamma_N)}$$

其中

$$\lambda(\gamma_N) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2N} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}S_N^2}$$

因此 $P\ (\mathscr{H}_0\ \gamma_N)$ 为 $\lambda\ (\gamma_N)$ 的单调减少函数。于是可知当 $P\ (\mathscr{H}_0\ \gamma_N)$ 在 $(P_S,\ P_u)$ 变化时，$\lambda\ (\gamma_N)$ 在 $(A,\ k)$ 变化，这里

$$k = \gamma^{2N} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(r^2-1)\chi^2_{2N,\alpha'}}\quad \gamma = \frac{1}{\lambda}$$

因此

$$P\{P_S < P(\mathscr{H}_0\ \gamma_N) < P_u\ \mathscr{H}_0\} = P\{A < \lambda(\gamma_N) < k\ \mathscr{H}_0\}$$

$$= P\{C_1 < S_N^2/\sigma_0^2 < C_2\ \mathscr{H}_0\}$$

$$= K_{2N}(C_2) - K_{2N}(C_1)$$

$K_{2N}\ (\cdot)$ 为具有 2_N 个自由度的 χ^2- 分布函数，而

$$C_2 = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda^2}\left[\log k - 2N\ \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$C_1 = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda^2}\left[\log A - 2N\ \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

因此

$$\alpha_{N\pi_0} < \pi_0[\alpha + K_{2N}(C_2) - K_{2N}(C_1)]$$

同理算得

$$\beta_{N\pi_1} < \pi_1[\beta + K_{2N}(C_4) - K_{2N}(C_3)]$$

其中

$$C_4 = \frac{2}{\lambda^2 - 1}(\log k + 2N \log\lambda),$$

$$C_3 = \frac{2}{\lambda^2 - 1}(\log B + 2N \log\lambda)$$

对于纵(横)向分别检验的情况，只需在上述公式中将 $\mathcal{Y}_N$ 改为 $\boldsymbol{X}_N$，$2N$ 改为 N 就可以了。

3 验前信息的运用和验前概率的计算

Bayes 决策中的一个关键问题是验前信息的运用。在飞行器的试验鉴定问题中，可以提供作为验前信息的源，主要来自两方面：一是仿真信息；其次是少量的特殊试验状态下的信息，经过转换为标准状态下的信息。人们习惯地用 Bayes 公式获得现场试验之前的验前概率 $P_{\mathscr{H}_0}$。例如，设仿真所获得的子样为 $(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$。由 Bayes 公式，可知

$$P(\mathscr{H}_0 \mid \mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}) = \frac{P_{\mathscr{H}_0}^{(0)} p(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)} \mid \sigma_0)}{\sum_{i=0}^{1} P_{\mathscr{H}_i}^{(0)} p(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)} \mid \sigma_i)} \tag{3.1}$$

其中 $P_{\mathscr{H}_0}^{(0)}$ 为在仿真之前，关于原假设 $\mathscr{H}_0$ 成立的概率。如果仿真之前没有任何信息可利用，那末，按 Bayes 假设，认为 $P_{\mathscr{H}_0}^{(0)} = 50\%$. 这样，疑惑发生了：一种新设计、研制的产品，当成品制成之后，虽未经试验；总不能认为设计指标符合要求的可能性是 50%. 这种假设，研制单位是难于接受的！因此(3.1)式中计算 $P_{\mathscr{H}_0}^{(0)}$ 必须慎重。其次，还有一个问题值得商榷，就是仿真子样 $(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$ 与真实的试验结果所获得的子样未必属于同一总体！这是由于仿真模型(包括动力学模型和环境因素)并不能完全包括现场试验的情况，它带有近似性。因此仿真结果与现场试验结果的一致性，它的可信度，这是仿真方法学上提出的一个重要问题。

为此，下面考虑运用其他方法计算验后概率 $P(\mathscr{H}_0 \mid \mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$。我们将运用 Neyman-Pearson 最优检验理论，并结合 Monte-Carlo 方法来计算。事实上，当获得了 $(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$ 之后，对于竞择假设 $\mathscr{H}_0$: $\sigma = \sigma_0 \leftrightarrow \mathscr{H}_1$: $\sigma = \lambda\sigma_0 \triangleq \sigma_1$，$\lambda > 1$，在检验水平 α 之下，确定出最优临界区域 $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D} = \{(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}) : \lambda(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}) > k\},$$

其中

$$\lambda(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}) = L(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}; \sigma_1) / L(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}; \sigma_0)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n} e^{-\frac{S_n^2}{2\sigma_0^2} \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}$$

λ 为检出比，

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (\mathcal{Y}_i^{(1)})^2$$

而

$$k = \mathcal{Y}^{2n_1} e^{-\frac{1}{2}(\mathcal{Y}^2 - 1)\chi^2_{2n,\alpha}}, \quad \mathcal{Y} = 1/\lambda$$

这样，当 $\lambda(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}) > k$，则拒绝 $\mathscr{H}_0$；否则采纳 $\mathscr{H}_0$。为了得到 $P(\mathscr{H}_0 \mid \mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$，我们运用自助(Bootstrap)方法。由子样 $(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$ 作出经验分布 $F_n^*(\mathcal{Y})$，再从 $F_n^*(\mathcal{Y})$ 随机抽样，获得再生子样。假定产生了 N 个再生子样

$$(\mathcal{Y}_1^{*(j)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{*(j)}), \quad j = 1, \cdots, N$$

对于每个子样，应用最优检验，于是可得 N 次"试验"之下采纳 $\mathscr{H}_0$ 的次数 v. 以 $\frac{v}{N}$ 作为 $P(\mathscr{H}_0 \mid (\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)}))$ 的近似。当 N 甚大时，它是一致的逼近。记它为 $P_{\mathscr{H}_0}^{(1)}$。注意到仿真子样 $(\mathcal{Y}_1^{(1)}, \cdots, \mathcal{Y}_{n_1}^{(1)})$ 并不能当作真实试验的子样看待，必须考虑可信度。为此，将仿真子样与真实试验所获得的子样作一致性检验(如运用 Wilcoxon-Mann-Whitney 方法[1])记检验的置信度为 $1-\alpha_1$. 当通过检验后，此时仿真子样与真实试验所获取的子样之间的一致性可信度就是 $1-\alpha_1$。

令

$$P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0} = P\{\mathscr{H}_0\ (\mathscr{Y}_1^{(1)},\cdots,\mathscr{Y}_{n_1}^{(1)}),(\mathscr{Y}_1^{(1)},\cdots,\mathscr{Y}_{n_1}^{(1)})\ \text{与现场试验结果相一致}\},$$

那么，$P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0}$就是获得子样（$\mathscr{Y}_1^{(1)}$，…，$\mathscr{Y}_{n1}^{(1)}$）之后$\mathscr{H}_0$成立的概率。此时

$$P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0} = P\{\mathscr{H}_0\ (\mathscr{Y}_1^{(1)},\cdots,\mathscr{Y}_{n1}^{(1)})\}P\{(\mathscr{Y}_1^{(1)},\cdots,\mathscr{Y}_{n1}^{(1)})\ \text{与现场试验子样相一致}\} = P^{(1)}_{\mathscr{H}_0}\quad(1-\alpha_1)$$

如果仿真子样与现场试验子样完全一致，即$\alpha_1=0$，此时

$$P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0} = P^{(1)}_{\mathscr{H}_0}$$

这个结果在工程实践中是很难出现的。

记在特殊试验状态下所获得的子样，经过转换成标准状态下的子样为（$\mathscr{Y}_1^{(2)}$，…，$\mathscr{Y}_{n_2}^{(2)}$）$\triangleq \mathscr{Y}^{(2)}$，且它与现场试验所获得的子样间的一致性可信度为$1-\alpha_2$，则在获得$\mathscr{Y}^{(2)}$之后，以$P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0}$作为$\mathscr{H}_0$成立的验前概率，此时的验后概率为

$$P^{(*)(2)}_{\mathscr{H}_0} = P^{(2)}_{\mathscr{H}_0}(1-\alpha_2)$$

其中

$$\begin{aligned}
P^{(2)}_{\mathscr{H}_0} &= P\{\mathscr{H}_0\ \mathscr{Y}^{(2)}\} \\
&= \frac{P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0}P(\mathscr{Y}^{(2)}\ \sigma_0)}{P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0}P(\mathscr{Y}^{(2)}\ \sigma_0)+(1-P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0})P(\mathscr{Y}^{(2)}\ \sigma_1)} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1-P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0}}{P^{(*)(1)}_{\mathscr{H}_0}}\lambda(\mathscr{Y}^{(2)})}
\end{aligned}$$

其中$\lambda(\mathscr{Y}^{(2)})$为似然比：

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathscr{Y}^{(2)}) &= L(\mathscr{Y}^{(2)};\sigma_1)/L(\mathscr{Y}^{(2)};\sigma_0) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n_2}e^{-\frac{S_{N_2}}{2\sigma_0^2}\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}
\end{aligned}$$

在现场试验之前，$\mathscr{H}_0$的验前概率就是$P^{(*)(2)}_{\mathscr{H}_0}$

参考文献

1. 张金槐、唐雪梅. Bayes 方法。长沙：国防科技大学出版社，1992
2. 张金槐. 利用验前信息的一种序贯检验方法——序贯验后加权检验方法. 国防科技大学学报，1991，13（2）