国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第5期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 5 1999

基于SDTFM理论的平面问题广义超级单元*

黄壮飞　周建平

(国防科技大学航天技术系　长沙　410073)

摘　要　根据平面问题条形传递函数方法理论，提出了平面问题广义超级单元的概念，并推导了其刚度矩阵和结点力矢量表达式，从而将条形传递函数方法应用范围推广到任意几何形状的平面区域。

关键词　条形传递函数方法，广义超级单元，平面问题

分类号　O343.1

Generalized Super-Element based on Strip Distributed Transfer Function Method

Huang Zhuangfei　Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　Based on the theory of strip distributed transfer function method (SDTFM), a new element, called generalized super-element (GSE) is given for 2-D problems and its stiffness matrix and nodal force vector are derived. With the use of generalized super-element, the application of SDTFM is extended to the 2-D problems of arbitary geometrical boundary.

Key words　SDTFM, generalized super-element, 2-D problems

近来，一种新的精确方法——分布传递函数方法[1]，受到越来越多的关注。用分布传递函数方法求解一维问题已经得到了非常深入的讨论。受有限条法的启发、从分布传递函数方法发展而来的条形分布传递函数方法(SDTFM)[2,3]，在求解由多个矩形子区域组成的平面区域的线弹性问题时，比有限元方法(FEM)具有明显的优势，例如所需的数据存储空间小、求解精度高等。但SDTFM只能求解由矩形子区域组成的平面问题。

本文在SDTFM理论基础上进一步提出了广义超级单元的概念，并推导出广义超级单元的刚度矩阵结点力矢量表示式。广义超级单元不但克服了SDTFM的局限性，而且可以和有限元单元相协调组合，从而将SDTFM的应用范围推广到任意几何形状的平面区域。

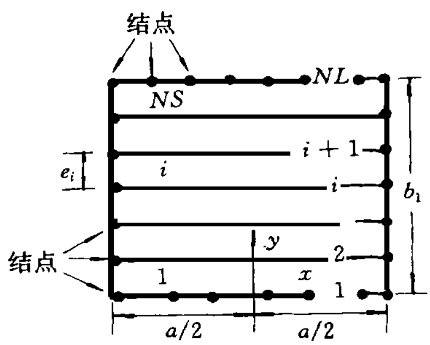


图1　广义超级单元及其边界结点

Fig.1　GSE and the nodes at its boundaries

1　广义超级单元分析

如图1所示，将超级单元的上下两条边界结线(也可以仅其中的一条)用若干结点离散，这个超级单元就称为广义超级单元。

显然，广义超级单元内存在两类结线：连续型结线和离散型结线。与结线的分类相对应，超级单元的条形单元也分为两类：结线连续型条形单元和结线离散型条形单元。

1.1　条形单元分析

$\{\Psi_i(x)\}$ 表示为广义超级单元的第 i 条结线沿 x 方向的位移矢量

* 国家自然科学基金资助项目

1999年4月2日收稿

第一作者：黄壮飞，男，1965年生，博士生

$$\{\Psi_i(x)\} = \{u_i(x)\ v_i(x)\}^{\mathrm T} \tag{1}$$

对于离散结线, $\{\Psi_i(x)\}$ 通过结点位移和多项式函数的插值得到

$$\{\Psi_i(x)\} = [\boldsymbol N(x)]\{\boldsymbol d\} = \sum_{j=1}^{ND}[\boldsymbol N_i^j(x)]\{\boldsymbol d^j\} \tag{2}$$

其中, $\{\boldsymbol d\} = \{\boldsymbol d_1^{\mathrm T}\ \boldsymbol d_2^{\mathrm T} \cdots \boldsymbol d_{ND}^{\mathrm T}\}^{\mathrm T}$, ND 表示离散结线上的结点数。

场函数定义为条形单元内部沿 x 和 y 坐标方向的位移, 它可以通过结线的位移函数插值得到

$$\{\boldsymbol u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\bar{\boldsymbol N}(\xi)]\{\Psi_i^{\mathrm T}(x)\ \ \Psi_{i+1}^{\mathrm T}(x)\}^{\mathrm T} \tag{3}$$

对于结线离散型条形单元, 将 (2) 式代入 (3) 式, 场位移函数可以写成

$$\{\boldsymbol u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\boldsymbol N_d(x,\xi)]\{\boldsymbol d\} + [\bar{\boldsymbol N}_c(\xi)]\{\Psi(x)\} \tag{4}$$

这里, $[\boldsymbol N_d(x,\xi)]_k = [\bar{\boldsymbol N}_i(\xi)][\boldsymbol N(x)]_k$, $[\bar{\boldsymbol N}_c(\xi)]_k = [\bar{\boldsymbol N}_{i+1}(\xi)]$, $\{\Psi(x)\}_k = \{\Psi_{i+1}^{\mathrm T}(x)\}^{\mathrm T}$。

对于结线连续型条形单元, (4) 式右边的第一项不再存在, 而$[\bar{\boldsymbol N}_c(\xi)]_k = [\bar{\boldsymbol N}(\xi)]_k$。

1.2 势能原理

根据势能原理, 离散型条形单元的势能可以写成

$$\pi = \int_\Omega\left(\frac{1}{2}\{\epsilon\}^{\mathrm T}[\boldsymbol E]\{\epsilon\} - \{\boldsymbol p\}^{\mathrm T}\{\boldsymbol u\}\right)\mathrm d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma}\{\bar{\boldsymbol t}_\sigma\}^{\mathrm T}\{\boldsymbol u\}\,\mathrm d\Gamma_\sigma \tag{5}$$

这里, Γ_σ 代表外力已知的边界, $\{\boldsymbol p\}$ 是体积力矢量, $\{\bar{\boldsymbol t}_\sigma\}$ 是作用在单元边界上的已知外力矢量。应该指出的是, 如果连续型结线是结线离散型条形单元的部分边界, 则作用在其上的外力应当作线体积力处理。

将$\{\Phi(x)\}$ 定义为所有连续结线位移矢量之和, $\{\boldsymbol D_d\}$ 定义为所有离散结线上结点位移矢量之和, 则

$$\{\Phi(x)\} = \{\Psi_1^{\mathrm T}(x)\ \ \Psi_2^{\mathrm T}(x)\ \cdots\ \Psi_{NCL}^{\mathrm T}(x)\}^{\mathrm T} \quad \{\boldsymbol D_d\} = \left\{\{\boldsymbol d\}_1^{\mathrm T}\{\boldsymbol d\}_2^{\mathrm T}\cdots\{\boldsymbol d\}_{NDD}^{\mathrm T}\right\}^{\mathrm T} \tag{6}$$

超级单元的势能可以写成

$$\begin{aligned}\Pi_e = \sum\pi = &\int_{-\frac a2}^{\frac a2}\frac{1}{2}(\{\Phi'\}^{\mathrm T}[\boldsymbol K_{11}]\{\Phi'\} + 2\{\Phi\}^{\mathrm T}[K_{01}]\{\Phi'\} + \{\Phi\}^{\mathrm T}[\boldsymbol K_{00}]\{\Phi\} + 2\{\boldsymbol D_d\}^{\mathrm T}[\boldsymbol K_0]\{\Phi\}\\ &+ 2\{\boldsymbol D_d\}^{\mathrm T}[\boldsymbol K_1]\{\Phi'\} - 2\{\Phi\}^{\mathrm T}\{\boldsymbol F_0\})\,\mathrm dx + \frac{1}{2}\{\boldsymbol D_d\}^{\mathrm T}[\boldsymbol K_2]\{\boldsymbol D_d\} - \{\boldsymbol D_d\}^{\mathrm T}\{\boldsymbol F_1\}\\ &- \{\Phi\}^{\mathrm T}\{\boldsymbol F_3\}\Big|_{x=\pm\frac a2} - \{\boldsymbol D_d\}^{\mathrm T}\{\boldsymbol F_2\}\Big|_{x=\pm\frac a2}\end{aligned} \tag{7}$$

这里, $[\boldsymbol K_{qr}](q,r=0,1)$ 和$[\boldsymbol K_q](q=0,1,2)$ 是从条形单元的刚度矩阵$[\boldsymbol k_{qr}](q,r=0,1)$ 和$[\boldsymbol k_q](q=0,1,2)$ 组合而成的广义超级单元的总体刚度矩阵; $\{\boldsymbol F_q\}(q=0,1,2,3)$ 是由条形单元的力矢量$\{\boldsymbol f_q\}(q=0,1,2,3)$ 组合而成的总体结点力矢量。它们的组合方法同有限元理论中使用的方法是一样的。

根据势能原理, 应有 $\delta\Pi_e = 0$, 由此可以得出在结线和结点上的力的平衡条件

$$\{\delta\Phi\}^{\mathrm T}\{-[\boldsymbol K_{11}]\{\Phi''\} + ([\boldsymbol K_{01}] - [\boldsymbol K_{01}]^{\mathrm T})\{\Phi'\} + [\boldsymbol K_{00}]\{\Phi\} + ([\boldsymbol K_0]^{\mathrm T} - [\boldsymbol K_1]_x^{\mathrm T})\{\boldsymbol D_d\} - \{\boldsymbol F_0\}\} = 0$$

$$x\in\left(-\frac a2,\frac a2\right) \tag{8a}$$

$$\{\delta\Phi\}^{\mathrm T}\left(\left([\boldsymbol K_{11}]\{\Phi'\} + [\boldsymbol K_{01}]^{\mathrm T}\{\Phi\} + [\boldsymbol K_1]^{\mathrm T}\{\boldsymbol D_d\}\right)\Big|_{-\frac a2}^{\frac a2} - \{\boldsymbol F_3\}\Big|_{x=\pm\frac a2}\right) +$$

$$\{\delta\boldsymbol D_d\}^{\mathrm T}\left(\int_{-\frac a2}^{\frac a2}\left([\boldsymbol K_0]\{\Phi\} + [\boldsymbol K_1]\{\Phi'\}\right)\mathrm dx + [\boldsymbol K_2]\{\boldsymbol D_d\} - \{\boldsymbol F_1\} - \{\boldsymbol F_2\}\Big|_{x=\pm\frac a2}\right) = 0 \tag{8b}$$

1.3 刚度矩阵和结点力矢量

方程 (8a) 可以用状态空间技术求解。定义状态空间矢量$\{\eta\}$ 为

$$\{\eta\} = \{\Phi^{\mathrm T}\ \ \Phi'^{\mathrm T}\} \tag{9}$$

方程 (8a) 可以写成

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dx}\eta(x) = [\boldsymbol F]\eta(x) + [\boldsymbol A_1]\{\boldsymbol D_d\} + \{\boldsymbol f_\eta\} \tag{10}$$

其中，$[\boldsymbol{F}]=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{N\times N} & \boldsymbol{I}_{N\times N}\\ [\boldsymbol{K}_{11}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{00}] & [\boldsymbol{K}_{11}]^{-1}([\boldsymbol{K}_{01}]-[\boldsymbol{K}_{01}]^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{A}_1]=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{N\times N}\\ [\boldsymbol{K}_{00}]^{-1}([\boldsymbol{K}_0]^{\mathrm{T}}-[\boldsymbol{K}_1]^{\mathrm{T}}_{,x})\end{bmatrix}$，
$\{\boldsymbol{f}\eta\}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}_{N\times 1}\\ -[\boldsymbol{K}_{00}]^{-1}\{\boldsymbol{F}_0\}\end{Bmatrix}$，$N$ 表示 Φ 中未知位移的个数。

用矢量$\{\boldsymbol{D}_c^L\}$ 和$\{\boldsymbol{D}_c^R\}$ 分别表示所有未知位移的连续型结线两端点的位移

$$\{\boldsymbol{D}_c^L\}=\left\{\Phi\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}\quad,\quad\{\boldsymbol{D}_c^R\}=\left\{\Phi\left(\frac{a}{2}\right)\right\}\tag{11}$$

则方程 (10) 的边界条件可以写成

$$[\boldsymbol{M}]\left\{\eta\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}+[\boldsymbol{N}]\left\{\eta\left(\frac{a}{2}\right)\right\}=\{\boldsymbol{D}_c\}\tag{12}$$

这里，$$[\boldsymbol{M}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N}\\ \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N}\end{bmatrix},[\boldsymbol{N}]=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N}\\ \boldsymbol{I}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N}\end{bmatrix},\{\boldsymbol{D}_c\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}_c^L\\ \boldsymbol{D}_c^L\end{Bmatrix}$$

状态空间方程 (10) 在边界条件 (12) 下的精确解可以写成

$$\{\eta(x)\}=\{\overline{\boldsymbol{F}}(x)\}+[\boldsymbol{H}_1(x)]\{\boldsymbol{D}_c\}+[\boldsymbol{H}_2(x)]\{\boldsymbol{D}_d\}\tag{13}$$

将式 (13) 代入式 (8b) 并整理可得广义超级单元的位移平衡方程

$$[\boldsymbol{K}^e]\{\boldsymbol{D}^e\}=\{\boldsymbol{R}^e\}\tag{14}$$

这里，
$$\{\boldsymbol{D}^e\}=\{\boldsymbol{D}_c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\tag{15}$$

$$[\boldsymbol{K}^e]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^{(1)}]+[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^{(2)}] & [\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}^{(1)}]+[\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}^{(2)}]+[\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}^{(3)}]\\ [\boldsymbol{K}_{\beta\alpha}^{(1)}]+[\boldsymbol{K}_{\beta\alpha}^{(2)}]+[\boldsymbol{K}_{\beta\alpha}^{(3)}] & [\boldsymbol{K}_{\beta\beta}^{(1)}]+[\boldsymbol{K}_{\beta\beta}^{(2)}]+[\boldsymbol{K}_{\beta\beta}^{(3)}]+[\boldsymbol{K}_{\beta\beta}^{(4)}]+[\boldsymbol{K}_2]\end{bmatrix}\tag{16}$$

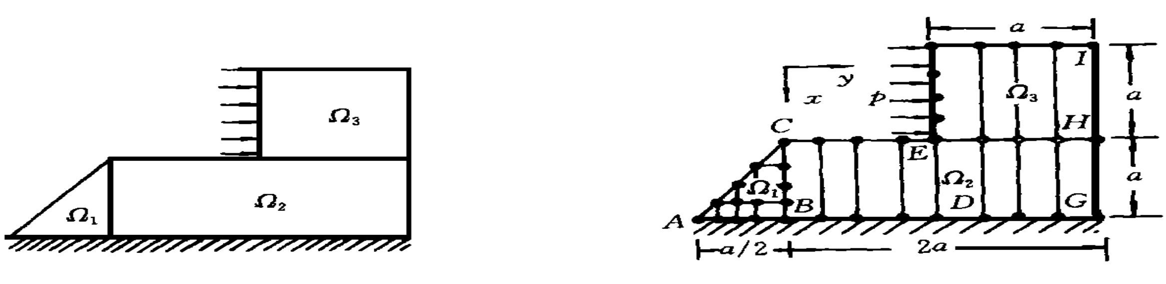
$$\{\boldsymbol{R}^e\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_\alpha\\ \boldsymbol{F}_\beta^{(1)}+\boldsymbol{F}_\beta^{(2)}+\boldsymbol{F}_1\end{Bmatrix}\tag{17}$$

式 (16) 便是广义超级单元的刚度矩阵，式 (17) 是结点力矢量。$[\boldsymbol{K}^e]$ 和$\{\boldsymbol{R}^e\}$ 中各项子矩阵的表达式可在整理过程中求得，这里省略。

2 算例分析

用广义超级单元结合有限元单元求解图 2 (a) 所示的平面结构。Ω_1 子区域用有限元二次单元划分来计算刚度矩阵和结点力矢量，Ω_2 和 Ω_3 看作广义超级单元，单元划分如图 2(b) 所示。为单元组合时满足协调条件起见，Ω_2 的离散结线上离散结点间位移采用分段二次插值模式(QM)，结线间的位移插值均采用 QM 模式。将该区域在 6 节点三角形单元和 8 节点等参元划分下的有限元解作为参考解，具体划分为：Ω_1 为 20 个 6 节点三角形单元 + 210 个 8 节点等参元，Ω_2 为 20 × 40 个 8 节点等参元，Ω_3 为 20×20 个 8 节点等参元。

从表 1 可以看出，在条形单元数与有限元单元数对应的情况下，广义超级单元求解方法比有限元



(a) 复杂平面区域　　(b) 有限元及广义超级单元划分

Plane of complex shape　　Division of the plane with FEM and GSE

图 2 算例

Fig. 2 Example

方法精度高、收敛速度快。从图3可以看出，对于应力奇异点 G，有限元在单元划分为 (4+ 6) + 4×8+ 4×4 的情况下，其解的精度比较低，而对应的广义超级单元的解，则对 G 点附近的应力奇异性给出了较好的描述。

表1　H 点的位移和应力($a=1, p=1$; 材料特性: $E=1, \mu=0.3$)

Tab.1　The displacement and stress at point H ($a=1, p=1$; mat. property: $E=1, \mu=0.3$)

计算方法	单元划分			u	v	σ_x	σ_y
	Ω_1	Ω_2	Ω_3				
广义超级单元	三角单元+四边形单元=	条形单元=					
	1+2	4	2	2.9422	3.1741	−2.2879	−0.0502
	4+6	8	4	2.9501	3.2204	−2.4082	−0.0025
有限元	三角单元+四边形单元=	四边形单元=					
	2+1	4×2	2×2	2.2543	3.0721	−2.1124	−0.0763
	4+6	8×4	4×4	2.6402	3.1749	−2.3427	−0.0228
参考解				2.9598	3.2482	−2.4139	−0.0013

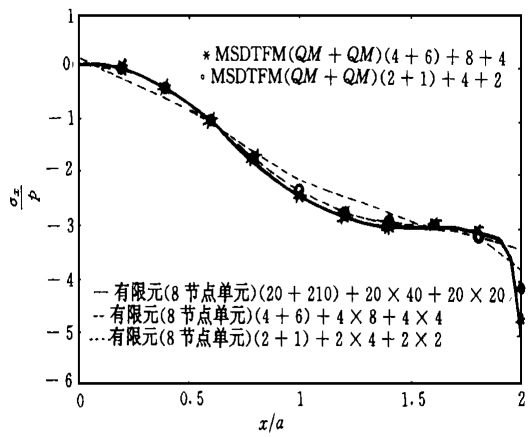


图3　IG边应力 σ_x 的分布

Fig.3　Distribution of stress σ_x along side IG

3　结论

本文在SDTFM理论基础上，提出了广义超级单元的概念，并给出了其刚度矩阵和结点计算公式。广义超级单元将SDTFM的应用范围推广到任意几何形状的平面区域，具有求解精度高、求解速度快等优点。

参考文献

1　Yang B, Tan C A. Transfer Functions of One Dimensional Distributed Parameter Systems. ASME J. Appl. Mech., 1992, 59: 1009～1014

2　Yang B, Zhou J P. Semi-Anatical Solution of 2-D Elasticity Problems by the Strip Distributed Transfer Function Method. Ins. J. Solids Structures, 1996, 27: 3983～4005

3　Zhou J P, Yang B. Strip Distributed transfer Function Method for Analysis of Plates. Int. J. for Numerical Method in Engineering, 1996, 39: 1915～1932