弹性地基上的压杆横向振动频率方程的一般表达式*

黄炎

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘 要 推导出弹性地基上的等截面受压直杆横向振动频率方程的一般表达式。在杆的各种端点条件下进行了分析和讨论。

关键词 压杆，横向振动，频率

分类号 O326

The General Expression for the Lateral Vibration Frequency Equations of Compressed Bars on Elastic Foundations

Huang Yan

(Department of Aerospace Technology，NUDT，Changsha，410073)

Abstract The general expression for the lateral vibration frequency equations of compressed straight bars with constant cross section on elastic foundations is deduced in this paper. Each particular case under the conditions at the end of the bar is analysed and discussed.

Key words compressed bar，lateral vibration，frequency

直杆是工程中常见的构件之一。当直杆受横向弯曲振动时,常同时承受着轴向压力,此时杆的频率将随之下降。若杆处于弹性地基上,则频率又随之上升。因此有必要确定受压直杆的固有频率。文献[1]推导出梁的横向振动频率方程的一般表达式。文献[2]推导出弹性压杆稳定性的一般表达式。本文在此基础上更广泛地推导出弹性地基上受压直杆横向振动频率的一般表达式。

1 弹性地基上压杆固有频率的一般表达式

压杆横向振动的运动方程为[3]

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \tag{1}$$

式中w 为杆随时间变化的挠度, EI 为弯曲刚度, P 为轴向压力, ρ 为材料密度, F 为横截面积, q 为载荷。当 $q = -kw$[4], k 为地基弹性系数, 则上式成为弹性地基上压杆横向自由振动的运动方程。令

$$w = y\sin pt$$

式中p 为频率, 将上式代入(1) 式可得

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \alpha^2\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^4 y = 0$$

式中

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho F p^2 - k}{EI} \tag{2}$$

上式特征方程的根为

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^4 + 4\lambda^4} + \alpha^2}{2}}, \quad a_2 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^4 + 4\lambda^4} - \alpha^2}{2}} \tag{3}$$

挠度y 的一般解为

* 1999 年 3 月 8 日收稿
第一作者：黄炎，男，1924 年生，教授

$$y = C_1\sin a_1x + C_2\cos a_1x + C_3\mathrm{sh}\,a_2x + C_4\mathrm{ch}\,a_2x \tag{4}$$

设直杆两端横向位移支承的弹性系数分别为 K_1、K_2 (产生每单位位移所需的力)。转角位移支承的弹性系数分别为 $\bar{K}_1$、$\bar{K}_2$ (产生每单位转角所需的力偶矩)。当杆的一端为坐标原点时, 如图 1 所示, 端点条件为

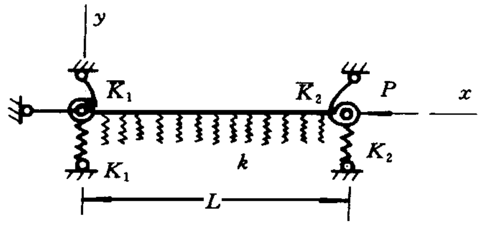

图 1 物理模型

Fig. 1 Physical model

$$K_1y(0) = -[EIy'''(0) + Py'(0)],\quad \bar{K}_1y'(0) = EIy''(0)$$

$$K_2y(L) = -[EIy'''(L) + Py'(L)],\quad \bar{K}_2y'(L) = -EIy''(L)$$

式中 L 为直杆的长度。将(4) 式及其一阶、二阶、三阶导数代入上式, 并应用到(2) 式和(3) 式, 整理后得

$$\begin{bmatrix} EIa_1a_2^2 & -K_1 & -EIa_1^2a_2 & -K_1 \\ \bar{K}_1a_1 & EIa_1^2 & \bar{K}_1a_2 & -EIa_2^2 \\ K_2\sin a_1L + EIa_1a_2^2\cos a_1L & K_2\cos a_1L - EIa_1a_2^2\sin a_1L & K_2\mathrm{sh}\,a_2L - EIa_1^2a_2\mathrm{ch}\,a_2L & K_2\mathrm{ch}\,a_2L - EIa_1^2a_2\mathrm{sh}\,a_2L \\ \bar{K}_2a_1\cos a_1L - EIa_1^2\sin a_1L & -\bar{K}_2a_1\sin a_1L - EIa_1^2\cos a_1L & \bar{K}_2a_2\mathrm{ch}\,a_2L + EIa_2^2\mathrm{sh}\,a_2L & \bar{K}_2a_2\mathrm{sh}\,a_2L + EIa_2^2\mathrm{ch}\,a_2L \end{bmatrix}$$

$$[C_1\ C_2\ C_3\ C_4]^T = [0\ 0\ 0\ 0]^T$$

要使齐次线性联立方程组具有非零解, 上列系数行列式必为零。展开简化后可得频率方程的一般表达式为

$$\begin{aligned} &\left[K_1K_2\bar{K}_1\bar{K}_2(a_1^2 - a_2^2) - (K_1K_2 - \bar{K}_1\bar{K}_2)E^2I^2(a_1^2 + a_2^2) + (K_1\bar{K}_1\right. \\ &\left.+ K_2\bar{K}_2)E^2I^2a_1^2a_2^2(a_1^2 - a_2^2) - E^4I^4a_1^2a_2^2(a_1^6 - a_2^6)\right] \\ &\sin a_1L\,\mathrm{sh}\,a_2L - \left[(\bar{K}_1 + \bar{K}_2)(K_1K_2 - E^2I^2a_1^2a_2^4) + (K_1 + K_2)(\bar{K}_1\bar{K}_2 - E^2I^2a_1^2)a_1^2\right] \\ &EIa_2(a_1^2 + a_2^2)\sin a_1L\,\mathrm{ch}\,a_2L + \left[(\bar{K}_1 + \bar{K}_2)(K_1K_2 + E^2I^2a_1^4a_2^2)\right. \\ &\left.- (K_1 + K_2)(\bar{K}_1\bar{K}_2 + E^2I^2a_2^2)a_2^2\right] EIa_1(a_1^2 + a_2^2)\cos a_1L\,\mathrm{sh}\,a_2L \\ &+ \left[2K_1K_2\bar{K}_1\bar{K}_2 - (K_1\bar{K}_2 + K_2\bar{K}_1)E^2I^2(a_1^2 + a_2^2)^2\right. \\ &\left.- (K_1\bar{K}_1 + K_2\bar{K}_2)E^2I^2(a_1^4 + a_2^4) + 2E^4I^4a_1^4a_2^4\right] a_1a_2\cos a_1L\,\mathrm{ch}\,a_2L \\ &- 2(K_1\bar{K}_1 + E^2I^2a_1^2a_2^2)(K_2\bar{K}_2 + E^2I^2a_1^2a_2^2)a_1a_2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

2 两端支承相同时的各种解

两端支承相同时可得出比较简单的算式。此时 $K_1 = K_2 = K$、$\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \bar{K}$ 。下面分别就 K 或 $\bar{K}$ 等于零或∞的情形进行分析。

2.1 两端自由横向移动

此时令 $K_1 = K_2 = 0$, $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \bar{K}$, 代入(5) 式可得

$$\begin{aligned} &\sin a_1L\,\mathrm{sh}\,a_2L\left[\frac{\bar{K}}{EI}(a_1^2 + a_2^2)\right]^2 + 2(a_1^3\cos a_1L\,\mathrm{sh}\,a_2L + a_2^3\sin a_1L\,\mathrm{ch}\,a_2L)\frac{\bar{K}}{EI}(a_1^2 + a_2^2) \\ &+ (a_2^6 - a_1^6)\sin a_1L\,\mathrm{sh}\,a_2L + 2a_1^3a_2^3(\cos a_1L\,\mathrm{ch}\,a_2L - 1) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

应用二次方程的一般解法可以解得

$$\frac{\bar{K}}{EI}(a_1^2 + a_2^2) = \begin{cases} -a_1^3\dfrac{\cos a_1L + 1}{\sin a_1L} - a_2^3\dfrac{\mathrm{ch}\,a_2L + 1}{\mathrm{sh}\,a_2L} = -a_1^3\dfrac{1}{\tan u_1} - a_2^3\mathrm{cth}\,u_2 \\ a_1^3\dfrac{\cos a_1L - 1}{\sin a_1L} - a_2^3\dfrac{\mathrm{ch}\,a_2L - 1}{\mathrm{sh}\,a_2L} = a_1^3\tan u_1 - a_2^3\mathrm{th}\,u_2 \end{cases} \tag{7}$$

式中

$$u_1 = \frac{a_1L}{2},\quad u_2 = \frac{a_2L}{2}$$

令(7) 式中的 $\bar{K} = 0$, 即为两端自由的情形。

2.2 两端可自由转动

$\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = 0,\ K_1 = K_2 = K$，同样可得

$$\frac{K}{EI}\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} = \begin{cases} a_1^3\dfrac{\mathrm{ch}a_2L - 1}{\mathrm{sh}a_2L} - a_2^3\dfrac{\cos a_1L - 1}{\sin a_1L} = a_1^3\mathrm{th}u_2 + a_2^3\tan u_1 \\ a_1^3\dfrac{\mathrm{ch}a_2L + 1}{\mathrm{sh}a_2L} - a_2^3\dfrac{\cos a_1L + 1}{\sin a_2L} = a_1^3\mathrm{cth}u_2 - a_2^3\dfrac{1}{\tan u_1} \end{cases} \tag{8}$$

2.3 两端不能横向移动

先将(5)式除以 K_1K_2，然后令 $K_1 = K_2 = \infty,\ \bar{K}_1 = \bar{K}_2 = K$，可以解得

$$\frac{EI}{\bar{K}}(a_1^2 + a_2^2) = \begin{cases} a_1\dfrac{\cos a_1L - 1}{\sin a_1L} - a_2\dfrac{\mathrm{ch}a_2L - 1}{\mathrm{sh}a_2L} = - a_1\tan u_1 - a_2\mathrm{th}u_2 \\ a_1\dfrac{\cos a_1L + 1}{\sin a_1L} - a_2\dfrac{\mathrm{ch}a_2L + 1}{\mathrm{sh}a_2L} = a_1\dfrac{1}{\tan u_1} - a_2\mathrm{cth}u_2 \end{cases} \tag{9}$$

令 $\bar{K} = \infty$ 即为两端固定的情形。

2.4 两端不能转动

$\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \infty,\ K_1 = K_2 = K$，同样可得

$$\frac{EI}{K}a_1a_2(a_1^2 + a_2^2) = \begin{cases} a_1\dfrac{\mathrm{ch}a_2L + 1}{\mathrm{sh}a_2L} + a_2\dfrac{\cos a_1L + 1}{\sin a_1L} = a_1\mathrm{cth}u_2 + a_2\dfrac{1}{\tan u_1} \\ a_1\dfrac{\mathrm{ch}a_2L - 1}{\mathrm{sh}a_2L} + a_2\dfrac{\cos a_1L - 1}{\sin a_1L} = a_1\mathrm{th}u_2 - a_2\tan u_1 \end{cases} \tag{10}$$

3 对称型和反对称型

两端支承相同时，杆的结构是对称的。杆的全部基本振型也是对称的和反对称的。为此，如果选取杆的中点为坐标原点，则(3)式中 $\sin a_1x$ 和 $\mathrm{sh}a_2x$ 为反对称函数，$\cos a_1x$ 和 $\mathrm{ch}a_2x$ 为对称函数。因此对称振型时可令 $C_1 = C_3 = 0$；反对称振型时可令 $C_2 = C_4 = 0$。这样可以较容易地分别求解两类振型的基本频率。此时端点条件为

$$K_1y\left(-\frac{L}{2}\right) = -\left[EIy'''\left(-\frac{L}{2}\right) + Py'\left(-\frac{L}{2}\right)\right],\qquad \bar{K}_1y'\left(-\frac{L}{2}\right) = EIy''\left(-\frac{L}{2}\right)$$

$$K_2y\left(\frac{L}{2}\right) = EIy'''+ Py'\left(\frac{L}{2}\right),\qquad \bar{K}_2y'\left(\frac{L}{2}\right) = -EIy''\left(\frac{L}{2}\right)$$

将(4)式及其一、二、三阶导数代入以上各式，并令 $K_1 = K_2 = K,\ \bar{K}_1 = \bar{K}_2 = K$，则对称振型时，令 $C_1 = C_2 = 0$ 可得

$$\begin{aligned} &(K\cos u_1 - EIa_2a_2^2\sin u_1)C_2 + (K\mathrm{ch}u_2 - EIa_1^2a_2\mathrm{sh}u_2)C_4 = 0 \\ &(\bar{K}a_1\sin u_1 + EIa_1^2\cos u_1)C_2 - (\bar{K}\mathrm{sh}u_2 + EIa_2^2\mathrm{ch}u_2)C_4 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

令系数行列式等于零，可得对称振型的频率方程为

$$\begin{aligned} &EI\bar{K}a_1a_2(a_1^2 + a_2^2)\sin u_1\mathrm{sh}u_2 - (K\bar{K} - E^2I^2a_2^4)a_1\sin u_1\mathrm{ch}u_2 \\ &- (K\bar{K} - E^2I^2a_1^4)\cos u_1\mathrm{sh}u_2 - EIK(a_1^2 + a_2^2)\cos u_1\mathrm{ch}u_2 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

令 $K = 0$ 或 $\bar{K} = 0$，或将上式除以 K 或 $\bar{K}$，然后令 $K = \infty$ 或 $\bar{K} = \infty$，则可得出各种支承情形的结果。也就是上一节中四种支承相对应算式的第一式。由(11)式的第一式(或第二式)可得

$$C_4 = \frac{K\cos u_1 + EIa_1a_2^2\cos u_1}{EIa_1^2a_2\mathrm{sh}u_2 - K\mathrm{ch}u_2}C_2$$

将上式代入(4)式，可得对称振型的挠度函数为

$$y = C_2\left[\cos a_1x + \frac{K\cos u_1 - EIa_1a_2^2\sin u_1}{EIa_1^2a_2\mathrm{sh}u_2 - K\mathrm{ch}u_2}\mathrm{ch}a_2x\right] \tag{13}$$

同样，令 $C_2 = C_4 = 0$ 可得反对称振型的频率方程为

$$EIK(a_1^2 + a_2^2)\sin u_1\mathrm{sh}u_2 + (K\bar{K} - E^2I^2a_1^4)a_2\sin u_1\mathrm{ch}u_2$$

$$-\left(K\bar{K}-E^2I^2a_2^4\right)a_1\cos u_1\operatorname{sh}u_2+EI\bar{K}a_1a_2\left(a_1^2+a_2^2\right)\cos u_1\operatorname{ch}u_2=0 \quad (14)$$

各种支承情形的结果, 也就是上一节相对应算式的第二式。反对称振型的挠度函数为

$$y=C_1\left(\sin a_1x+\frac{K\sin u_1+EIa_1a_2^2\cos u_1}{EIa_1^2a_2\operatorname{ch}u_2-K\operatorname{sh}u_2}\operatorname{sh}a_2x\right) \quad (15)$$

由以上公式可以直接求解两端为平夹或简支的结果。对两端为平夹的情形: $K=0$, $\bar{K}=\infty$。对称时, 由(12)式可得 $\sin u_1=0$, 即 $u_1=\frac{a_1L}{2}=n\pi$。由(13)式可得 $y=C_2\cos\frac{2n\pi}{L}x$. 反对称时, 由(14)式可得 $\cos u_1=0$, 即 $a_1=(2n-1)\frac{\pi}{L}$, 由(15)式可得 $y=C_1\sin\frac{(2n-1)\pi}{L}x$, 且均有 $n=1,2,3,\cdots$。

同样, 对两端简支的情形: $\bar{K}=0$, $K=\infty$。对称时可得 $a_1=(2n-1)\frac{\pi}{L}$, $y=C_2\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}x$。反对称时, $a_1=\frac{2n\pi}{L}$, $y=C_1\sin\frac{2n\pi}{L}x$, 且均有 $n=1,2,3,\cdots$。

两种支座的挠度函数都是不同的。平夹时最小频率是反对称型的。铰支时最小频率是对称型的。两种支座的全部基频参数均为 $a_1=\frac{n\pi}{L}$, $n=1,2,3,\cdots$, 应用到(2)式和(3)式可以求得基频为

$$P_n=\sqrt{\frac{1}{\rho F}\left[\left(EI\frac{n^2\pi^2}{L^2}-P\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+K\right]}$$

最小频率为 $n=1$ 时, 由上式可以看出: 压力 P 将降低固有频率的值, 通常应远小于压杆相应的临界压力。上式亦适用于轴向力为拉力的情形, 此时 P 为负值。拉力时和弹性地基作用相同, 均提高频率的值。

4 两端支承不同时的各种解

4.1 一端为平夹的情形

将(5)式除以 $\bar{K}_1$, 并令 $K_1=0$, $\bar{K}_1=\infty$ 可得

$$\bar{K}_2EIa_1a_2\left(a_1^2+a_2^2\right)\sin a_1L\operatorname{sh}a_2L-\left(K_2\bar{K}_2-E^2I^2a_2^4\right)a_1\sin a_1L\operatorname{ch}a_2L$$
$$-\left(K_2\bar{K}_2-E^2I^2a_1^4\right)a_2\cos a_1L\operatorname{sh}a_2L-K_2EI\left(a_1^2+a_2^2\right)\cos a_1L\operatorname{ch}a_2L=0$$

将上式和(12)式比较, 可以看出二式是完全相同的, 只需将 K 改为 K_2, $\bar{K}$ 改为 $\bar{K}_2$, u_1 改为 a_1L, u_2 改为 a_2L。这是因为在上节对称振型的情形下, 杆中点的转角和剪力等于零。即相当于 $K_1=0$ 和 $\bar{K}_1=\infty$, 故杆的右边一半相当于这里杆的全长。因此, 第2节中各种支座的第一个算式(即对称型算式) 即为一端为平夹, 另一端为相对应支座的频率方程式, 仅需将 K 改为 K_2, $\bar{K}$ 改为 $\bar{K}_2$, u_1 改为 a_1L, u_2 改为 a_2L。

4.2 一端为铰支的情形

将(5)式除以 K_1, 并令 $K_1=\infty$, $\bar{K}_1=0$ 可得与(14) 式相似的方程式。同理得出: 第二节中各种支座的第二个算式, 即为一端为铰支, 另一端为对应支座的频率方程式, 仅需将 K、$\bar{K}$、u_1、u_2 分别改为 K_2、$\bar{K}_2$、a_1L、a_2L。

参考文献

1 卓曙君, 葛玉君. 梁的横向振动频率的一般表达式. 国防科技大学学报, 1988, 10(3)
2 卓曙君. 弹性压杆稳定性的一般表达式. 国防科技大学学报, 1990, 12(2)
3 Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering, McGraw-Hill, 1955
4 黄炎. 弹性地基上的矩形板弯曲问题的解析解法. 国防科技大学学报, 1992, 14(2)