国　防　科　技　大　学　学　报
第21卷 第5期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 5 1999

考虑质心流动与偏移的通用弹道仿真模型*

孙丕忠　唐国金　夏智勋

(国防科学技术大学航天技术系　长沙　410073)

摘　要　引入了质心坐标系的概念,对弹体坐标系的定义作了适当修正,给出了考虑质心流动与偏移的通用弹道仿真模型及相应的转动惯量与惯性积的计算公式。

关键词　质心坐标系,质心偏移,仿真

分类号　O31

The General Trajectory Simulation Model Considering Mass Center's Flow and Bias

Sun Pizhong　Tang Guojin　Xia Zhixun

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　The concept of mass center coordinate system is introduced. The definition of missile coordinate system is modified. The general trajectory simulation model with mass center's flow and bias under consideration is presented and the respective formulas for moment of inertia and product of inertia are given.

Key words　mass center coordinate system, mass center bias, simulation

在空中飞行的导弹作为一般运动刚体,其运动可以分解为随基点的平动和绕基点的转动,该基点可以在弹体上任意选取,通常取为导弹实际质心,也可取为几何中心。基点不同,导弹运动方程略有差别,转动惯量、惯性积及外力矩的计算也不同。实际上,由于生产工艺误差,导弹质心总有一定程度的偏心,而且导弹在飞行过程中质心具有流动性,当考虑导弹质心的流动与偏移时,文献[1]将导弹的运动以几何中心为基点进行分解,方程形式复杂;文献[2, 3]以实际质心为基点对导弹的运动规律进行了研究,但弹体坐标系的定义不够完善,而且忽略了质心移动与偏移对转动惯量与惯性积的影响。从理论上讲,质心偏移引起的转动惯量与惯性积的变化为二阶小量,可以忽略;但由于质心移动因不同导弹而异,且不能视为小量,因此,忽略质心移动对转动惯量与惯性积的影响没有依据。本文先从变质量力学基本理论出发,分别以导弹几何中心及实际质心为基点,给出了导弹一般运动方程,并进行了比较,指出以实际质心为基点的导弹运动方程形式相对简单。然后在考虑质心流动与偏移情况下对弹体坐标系的定义进行了讨论,并作了适当修正,引入了质心坐标系的概念,给出了相应的转动惯量与惯性积的计算公式,给出了相应算例。

1　导弹一般运动方程

文献[2]从变质量力学基本理论[4]出发,对导弹一般运动方程作了详细推导。现分别以导弹几何中心和实际质心为基点,给出其一般运动方程。

1.1　对导弹几何中心而言

其基点平动方程为

$$m\mathring{\boldsymbol{V}} = \Sigma\boldsymbol{F} - 2\omega\times\int_m\frac{\delta\rho}{\delta t}\mathrm{d}m - \int_m\frac{\delta^2\rho}{\delta t^2}\mathrm{d}m - \int_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times\rho\mathrm{d}m - \int_m\omega\times(\omega\times\rho)\mathrm{d}m$$

即

$$m\mathring{\boldsymbol{V}}_a = \sum\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k' + \boldsymbol{F}_{rel}' - \int_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times\rho\mathrm{d}m - \int_m\omega\times(\omega\times\rho)\mathrm{d}m \tag{1}$$

* 国家部委项目资助
1999年4月9日收稿
第一作者:孙丕忠,男,1969年生,博士

其中: m—— 导弹质量; $\boldsymbol{V}_a$—— 导弹几何中心对惯性坐标系的绝对速度; ω—— 导弹弹体相对惯性坐标系的角速度; ρ—— 导弹质量微元到导弹几何中心的距离; $\sum \boldsymbol{F}$—— 导弹所受外力的矢量和; $\boldsymbol{F}_k' = -2\omega \times \int_n \frac{\delta\rho}{\delta t}\mathrm{d}m$—— 附加哥氏力; $\boldsymbol{F}_{rel}' = -\int_n \frac{\delta^2\rho}{\delta t^2}\mathrm{d}m$—— 附加相对力。

绕基点转动方程为

$$[J_1] \odot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega \times ([J_1] \odot \omega) = \sum \boldsymbol{M}_{O_1} - \int_n \rho \times \frac{\delta^2\rho}{\delta t^2}\mathrm{d}m - 2\int_n \rho \times \left(\omega \times \frac{\delta\rho}{\delta t}\right)\mathrm{d}m - \int_n \rho \times \boldsymbol{a}_a \mathrm{d}m$$

即

$$[J_1] \odot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega \times ([J_1] \odot \omega) = \sum \boldsymbol{M}_{O_1} + \boldsymbol{M}_k' + \boldsymbol{M}_{rel}' - \int_n \rho \times \boldsymbol{a}_a \mathrm{d}m \tag{2}$$

式中

$[J_1]$—— 导弹对过几何中心固连于弹体的某一直角坐标系的惯量张量; $\sum \boldsymbol{M}_{O_1}$—— 作用于导弹上的外力对几何中心的力矩; $\boldsymbol{M}_{rel}' = -\int_n \rho \times \frac{\delta^2\rho}{\delta t^2}\mathrm{d}m$—— 附加相对力矩; $\boldsymbol{M}_k' = -2\int_n \rho \times \left(\omega \times \frac{\delta\rho}{\delta t}\right)\mathrm{d}m$—— 附加哥氏力矩。

1.2 对导弹实际质心而言

按质心定义有 $\int_n \rho_c \mathrm{d}m = 0$, 因而质心平动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{V}}_{ca} = \sum \boldsymbol{F} - 2\omega \times \int_n \frac{\delta\rho_c}{\delta t}\mathrm{d}m - \int_n \frac{\delta^2\rho_c}{\delta t^2}\mathrm{d}m = \sum \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{kc}' + \boldsymbol{F}_{relc}' \tag{3}$$

其中

$\boldsymbol{V}^{ca}$—— 导弹实际质心对惯性坐标系的绝对速度; ρ_c—— 导弹质量微元到导弹实际质心的距离。

绕质心转动方程为

$$[J_c] \odot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega \times ([J_c] \odot \omega) = \sum \boldsymbol{M}_{O_c} - \int_n \rho_c \times \frac{\delta^2\rho_c}{\delta t^2}\mathrm{d}m - 2\int_n \rho_c \times \left(\omega \times \frac{\delta\rho_c}{\delta t}\right)\mathrm{d}m$$

即

$$[J_c] \odot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega \times ([J_c] \odot \omega) = \sum \boldsymbol{M}_{O_c} + \boldsymbol{M}_{kc}' + \boldsymbol{M}_{relc}' \tag{4}$$

式中

$[J_c]$—— 导弹对过实际质心瞬时固连于弹体的某一直角坐标系的惯量张量; $\sum \boldsymbol{M}_{O_c}$—— 作用于导弹上的外力对实际质心的力矩。

分别比较(1)式与(3)式、(2)式与(4)式可看出: 以几何中心为基点的导弹平动方程和转动方程都比以实际质心为基点的导弹平动方程和转动方程在形式上多一些附加项, 因此, 用(3) 式与(4)式计算导弹的运动规律较为方便。值得指出的是: 虽然两种情况下的附加相对力及附加相对力矩、附加哥氏力及附加哥氏力矩和惯量张量在形式上相同, 但量值都不同, 建立弹道仿真模型时应正确理解不同情况下方程中各项含义。附加相对力及附加相对力矩、附加哥氏力及附加哥氏力矩的详细计算公式见文献[2]。

2 质心坐标系的引入

计算导弹六自由度刚体运动时, 文献[2, 3]都将导弹的运动规律分解为随质心的平动和绕质心的转动, 且在研究转动规律时都定义了一个弹体坐标系, 其定义为[2]: 原点在导弹质心, ox_1 轴为弹体外壳对称轴, 指向头部为正, oy_1 轴在弹体纵向对称面内垂直于 ox_1 轴, 指向上为正, oz_1 轴由右手定则确定, 该坐标系与弹体固连。实际上, 当考虑导弹质心的流动与偏移时, 该定义不够完善。一方面, 当导弹存在质心偏心时, 按该定义则弹体坐标系原点不在 ox_1 轴上, 定义矛盾; 另一方面, 由于导弹在飞行过程中质心具有流动性, 因此, 与质心固连的弹体坐标系对弹体具有瞬时性, 即按上述定义的弹体坐标系只能瞬时与弹体固连。

为了既能准确给出导弹某些特征参量(如转动惯量、惯性积、推力作用点等)相对于弹体的定量描

叙, 又为了研究弹体运动的方便, 本文对弹体坐标系的定义作适当修正, 并引入质心坐标系的概念。

弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$: 原点为导弹初始发射时刻质心所在横截面与弹体纵轴的交点(或理论尖点), ox_1 轴与弹体纵轴重合指向头部为正, oy_1 轴在弹体纵向对称面内垂直于 ox_1 轴, 指向上为正, oz_1 轴由右手定则确定, 该坐标系与弹体固连。弹体坐标系是为了准确给出导弹某些特征参量(如转动惯量、惯性积、推力作用点等) 相对于弹体的定量描叙, 该坐标系可与总体设计中质量计算时所定义的弹体坐标系相一致。

质心坐标系 $o_cx_cy_cz_c$: 坐标原点为导弹质心, 各坐标轴分别与其对应的弹体坐标轴相互平行。即可认为是将弹体坐标系平移到导弹质心处得到。导弹飞行过程中, 质心坐标系相对于弹体坐标系作平动, 是随同质心运动的瞬时凝固于弹体的坐标系。引入该坐标系是为了在考虑质心流动与偏移的情况下, 更加方便准确地研究导弹姿态运动规律。

3 转动惯量及惯性积的计算

应用(3) 式与(4) 式来计算导弹的运动规律时, 作用在导弹上的力均可沿弹体坐标轴分解, 亦可直接投影到质心坐标轴中去, 力矩则应计算其对质心坐标轴的矩, 详见文献[2, 3]。转动惯量与惯性积也应转换到质心坐标轴中去。由于转动惯量及惯性积都是按固连于弹体的弹体坐标轴给出的, 因此计算对质心坐标轴的转动惯量及惯性积时可应用平行轴定理。设某时刻导弹质心在弹体坐标系中的位置为 $(x_c(t), y_c(t), z_c(t))$, 导弹绕弹体坐标轴的转动惯量分别为 $J_{x_1}(t)$, $J_{y_1}(t)$, $J_{z_1}(t)$, 惯性积分别为 $J_{x_1y_1}(t)$, $J_{x_1z_1}(t)$, $J_{y_1z_1}(t)$, 导弹质量为 $m(t)$, 则根据平行轴定理, 可得导弹绕质心坐标轴的转动惯量为

$$\begin{cases} J_{x_c}(t) = J_{x_1}(t) - m(t)\left(y_c^2(t) + z_c^2(t)\right) \\ J_{y_c}(t) = J_{y_1}(t) - m(t)\left(x_c^2(t) + z_c^2(t)\right) \\ J_{z_c}(t) = J_{z_1}(t) - m(t)\left(x_c^2(t) + y_c^2(t)\right) \end{cases} \tag{5}$$

对质心坐标轴的惯性积为

$$\begin{cases} J_{x_cy_c}(t) = J_{x_1y_1}(t) - m(t)x_c(t)y_c(t) \\ J_{y_cz_c}(t) = J_{y_1z_1}(t) - m(t)y_c(t)z_c(t) \\ J_{z_cx_c}(t) = J_{z_1x_1}(t) - m(t)z_c(t)x_c(t) \end{cases} \tag{6}$$

4 算例及结论

以某火箭为例, 在其它条件相同时, 考虑质心移动后算出的对质心坐标轴的转动惯量与对弹体坐标轴的转动惯量相比, 两者的 J_y 和 J_z 值在主动段终点以后相差9. 40%, 所得落点横向距离相差0. 0041%; 取质心偏移量 $\Delta y = \Delta z = 0.005$(m) 时, 考虑质心偏移对转动惯量的影响与直接对固连于弹体的弹体坐标轴的转动惯量插值所得落点横向距离相差0. 0003% (以上计算均未考虑惯性积)。

算例表明: 尽管对质心坐标轴的转动惯量与对弹体坐标轴的转动惯量在主动段终点以后相差9. 40%, 但这种变化对落点偏差影响甚微。

参考文献

1 陆毓峰, 施志佳. 射入段仿真数模与散布分析. 宇航学报, 1993(2): 14～22

2 贾沛然等. 远程火箭弹道学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993

3 钱杏芳等. 导弹飞行力学. 北京: 北京工业学院出版社, 1987

4 程勉. 变质量力学基础. 北京: 人民教育出版社, 1982