一类扩散过程的最优停止*

金治明 王勇献

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 金融数学中关于美式期权的定价理论最后归结为一个对扩散过程的最优停止问题,扩散过程是特殊的马氏过程,本文讨论了当报酬函数非负时的值函数性质及其最优停时的表示。特别对带折扣的报酬的讨论,更加符合金融数学的需要。

关键词 金融数学,扩散过程,最优停止

分类号 O21

Optimal Stopping about a class of Diffusion Processes

Jin Zhiming Wang Yongxian

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The theory of American option pricing has finally come to a problem about optimal stopping. In the paper We discuss opitimal stopping of diffusion processes, because we deal with diffusion processes in the American option pricing. Especially, a payment function with discount are discussed.

Key words mathematical finance, diffusion processes, opitimal stopping

在美式期权定价问题中,我们面对一个关于扩散过程的最优停止问题,而且报酬函数带有一个折扣因子。最优停止权威的著述之一是[1],那里讨论了一般马氏过程的最优停止问题。本文就应用上更广泛的扩散过程讨论最优停止问题,而且由于扩散过程的良好性质,使得我们有可能不涉及马氏过程状态空间的内在拓扑,去掉对报酬函数的所谓C_0连续的限制,这个限制在实际应用中是不易验证的。在金融数学中,常常考虑报酬函数$g(x)=(x-K)^+$,因此我们假定$g(x)$连续且$g(x)\geq C>-\infty$也是适宜的。

设$(X_t,\mathscr{F}_t,\boldsymbol{P}_x)$为扩散过程,它是一个轨道连续的齐次强马氏过程,满足随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}t + b(X_t)\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x \tag{1}$$

相应的无穷小算子A_t也称为扩散的生成算子。

$$A_tf(x) = a(x)f'(x) + \frac{1}{2}b(X)^2f''(x)$$

其中f是二次连续可微而且在有界集外等于0的函数。

记$\overline{\mathscr{T}}$为$(\mathscr{F}_t)$停时全体,而记$\mathscr{T}$为停止规则的全体。记B为取值于$(-\infty,\infty]$的Borel可测函数全体,C为实值连续函数全体。称B中的函数为报酬函数。

$$\overline{C}(g) = \{\tau\in\overline{\mathscr{T}}:\forall x\in R, E_xg(X_\tau) > -\infty\}, C(g) = \overline{C}(g)\cap\mathscr{T}$$

对于固定的$n\in\mathbf{N}$(非负整数集),记$R(n)=\{\tau\in\mathscr{T}:\tau$只取$\frac{k}{2^n}$型的值,$k\in\mathbf{N}\}$今后,我们往往需要报酬函数$g$满足下面的$A^+,A^-$条件:

A^+条件:$\forall x\in R, E_x\sup_{t\in R_+}g^+(X_t)<\infty$,$A^-$条件:$\forall x\in R, E_x\sup_{t\in R_+}g^-(X_t)<\infty$. 这里$g^+,g^-$分别表示$g$的正部与负部。而且我们用$B(A^+),B(A^-)$分别表示$B$中满足$A^+$,或$A^-$条件的函数类,$B(A^\pm)$表示$B$中同时满足$A^+,A^-$条件的函数类。注意:这里的$B$并不要求下$C_0$连续性,因此与[1],

* 国家自然科学基金资助
第一作者:金治明,男,1941年生,教授
1999年4月1日收稿

[2] 中的 B 不同, 从而下面的过分性的定义也不同。

称 $V(x)=\sup\{E_x g(X_\tau): \tau\in\mathscr{T}\}$ 为关于报酬函数 $g(x)$ 的值函数, 如果上述上确界取自 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$, 则记相应的值函数为 $\overline{V}(x)$。易知上述上确界可分别限制在 $C(g)$, $\overline{C}(g)$ 中。

对 $\epsilon\geq 0$, 如果存在 $\tau\in\mathscr{T}(\overline{\mathscr{T}})$, 使得 $E_x g(X_\tau)\geq V(x)-\epsilon$, 则称 τ 为 ϵ 最优规则(相应地, ϵ 最优停时), 当 $\epsilon=0$ 时, 则称 τ 为最优规则(相应地, 最优停时)。

1 连续报酬函数的最优停止

[1] 的第三章对报酬函数引入的 C_0 连续性, 完全是为了得到值函数 $V(x)$ 的下半连续性。由于 (X_t) 轨道的连续性, 我们只要假定报酬函数 $g(x)$ 的连续性, 则由 [2] 的引理 5.1(一个 Borel 可测函数 g 是 C_0 连续的充要条件是: $\forall x\in R$, $\lim_{t\downarrow 0} g(X_t)=g(x)$, $P_x-a.s.$) 可知, g 为 C_0 连续。但我们可以避免有点复杂的 C_0 连续的概念, 直接证明主要的结果。

设 $g(x)$ 为 R 上的连续函数, T_t 为扩散过程 $(X_t)_{t\in R_+}$ 的算子半群, 对任意的有界 Borel 可测函数 f, $x\in R$,

$$T_t f(x)=E_x f(X_t)=\int f(y)p(t,x,\mathrm{d}y)$$

这里 $p(t,x,y)$ 是 (X_t) 的转移函数。

定义 1　称 $g\in B$ 是过分函数, 如果 $\forall t\in R_+$, $x\in R$, $T_t g(x)$ 有意义, 且 $T_t g(x)\leq g(x)$ 成立。

定义 2　设 $g(x)$ 为报酬函数, $v(x)$ 为过分函数, 如果 $\forall x\in R$, $g(x)\leq v(x)$, 则称 v 为 g 的过分控制(函数), 如果对于 g 的一切过分控制函数 $f(x)$, 均有 $v(x)\leq f(x)$, 则称 v 为 g 的最小过分控制(函数)。

记 $\tau^\epsilon=\inf\{t\geq 0: V(X_T)\leq g(X_t)+\epsilon\}$, $\epsilon\geq 0$.

引理 1　设 $g\in B(A^+)$, v 为 g 的最小过分控制, 则

(1) $\overline{\lim_{t\to\infty}} v(X_t)=\overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t)$　$x\in R$.

(2) 对任意的 $\epsilon>0$, $x\in R$, $P_x(\tau^\epsilon<\infty)=1$.

证明　可仿 [2] 之引理 3.12 的证明。

令 $Q_n g(x)=g(x)\vee T_{1/2^n} g(x)$, $Q_n^N g(x)=Q_n(Q_n\cdots(Q_n g(x))\cdots)$

引理 2　设 $g(x)$ 连续, 且 $g(x)\geq C>-\infty$, 则 $v(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\lim_{b\to\infty} Q_n^N g^b(x)$ 下半连续。

证明　不妨设 $C=0$, 记 $v_n^N(x)=\lim_{b\to\infty} Q_n^N g^b(x)$, $v_n(x)=\lim_{N\to\infty} v_n^N(x)$, 由单调性, 上述极限均有意义。扩散过程 (X_t) 为 Feller 过程, 而 $g^b(x)$ 有界连续, 故 $T_t g^b(x)$ 仍有界连续, 从而 $Q_n g^b(x)$, $Q_n^N g^b(x)$ 均有界连续。由单调性, $v_n^N(y)\geq Q_n^N g^b(y)$ 两边先令 $y\to x$, 再令 $b\to\infty$, 则得

$$\underline{\lim_{y\to\infty}} v_n^N(y)\geq\lim_{b\to\infty}\underline{\lim_{y\to x}} Q_n^N g^b(y)=\lim_{b\to\infty} Q_n^N g^b(x)=v_n^N(x) \tag{2}$$

即 $v_n^N(x)$ 下半连续。由于 $v_n^N(x)$ 关于 N 是单调增的, 同理 $v_n(x)=\lim_{N\to\infty} v_n^N(x)$ 下半连续。又由 $Q_n^N g^b(x)$ 关于 b 及 N 均单调增加, 故

$$v_n(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{N\to\infty} Q_n^N g^b(x)$$

注意到在 A^- 条件下, $v_n(x)$ 就是 $g(x)$ 在停时类 $R(n)$ 上的值函数([2] 之定理 3.17), 而 $R(n)\subseteq R(n+1)$, 可见 $v_n(x)\leq v_{n+1}(x)$. $v(x)$ 仍为单调增的极限, 故 $v(x)$ 为下半连续函数。

引理 3　设 $g(x)$ 连续, 且 $g(x)\geq C>-\infty$, 则引理 2 中的 $v(x)$ 是 $g(x)$ 的最小过份控制。

证明　由单调收敛定理, $\lim_{b\to\infty} T_{1/2^n} g^b(x)=T_{\frac{1}{2^n}} g(x)$ 于是, $v_n^N(x)=Q_n^N g(x)$, $v_n(x)=\lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x)$. 由马氏序列情形的结论([2] 之定理 3.17) 知, 对于固定的 $n\in N$,

$$v_n(x)=\sup_{T\in R(n)} E_x g(X_T)$$

且为 $g(x)$ 在序列情形的最小过分控制, 因此关于 n 的单调极限 $v(x)=\lim_{n\to\infty} v_n(x)\geq g(x)$. 往证 $v(x)$ 的过分性: 由 $v_n(x)$ 的过分性, $T_{1/2^n} v_n(x)\leq v_n(x)$. 由过分函数的性质知, 对任意的 $m\in N$, $T_{m/2^n} v_n(x)\leq v_n(x)$. 特别取 $m=l\cdot 2^{n-k}$, $(k,l\in N, n>k)$, 则得 $T_{l/2^k} v_n(x)\leq v_n(x)$. 令 $n\to\infty$, 由单调收敛定理得 $T_{l/2^k} v(x)\leq$

$v(x)$. 这样便证得对一切有理数 r, $T^r v(x) \le v(x)$. 对任意的实数 $t \in R_+$, 取二进制有理数 $r_i \downarrow t$, 则由 $v(x)$ 的下半连续性及 Fatou 引理可得

$$T_t v(x) = E_x v(X_t) \le E_x(\underline{\lim}_{i\to\infty} v(X_{r_i})) \le \underline{\lim}_{i\to\infty} T_{r_i} v(x) \le v(x) \tag{3}$$

$v(x)$ 的过分性得证。

如果 $h(x)$ 也是 $g(x)$ 的过分控制, 则 $h(x) = Q_n^N h(x) \ge Q_n^N g(x)$ 故 $h(x) \ge \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x) = v(x)$, 因此 $v(x)$ 是 $g(x)$ 的最小过分控制。

定理 1 设 $g(x)$ 连续且 $g(x) \ge C > -\infty$, 则 $V(x) = \bar{V}(x)$ 是 $g(x)$ 的最小过分控制。

证明 由于 $v_n(x) = \sup_{r\in R(n)} E_x g(X_r)$, 而 $v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x)$ 为 $g(x)$ 的最小过分控制。对于任意的 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$, 由 $v(x)$ 的过分性知, $E_x g(X_\tau) \le E_x v(X_\tau) \le v(x)$, 从而 $\bar{V}(x) \triangleq \sup_{\tau\in\overline{\mathscr{T}}} E_x g(X_\tau) \le v(x)$. 而另一方面, 由于 $R(n) \subseteq \mathscr{T} \subseteq \overline{\mathscr{T}}$, 故 $v_n(x) \le V(x) \le \bar{V}(x)$. 令 $n\to\infty$, 则得 $v(x) = \bar{V}(x) = V(x)$.

引理 4 设 $g \in C(A^+)$, 且 $g(x) \ge C > -\infty$, 则对任意的 $\epsilon > 0$,

$$V(x) = E_x V(X_{\tau^\epsilon}) \tag{4}$$

证明 由引理 2, $P_x(\tau^\epsilon < \infty) = 1$, 而由 $V(x)$ 的过分性, 可得 $E_x V(X_{\tau^\epsilon}) \le V(x)$. 往证相反的不等式。由于在 A^+ 条件下, $V(x) < \infty$. 对固定的 $x \in R$, 记

$$C_1(g) = \{\tau \in C(g): r \ge r^\epsilon P_x - a.s.\}$$

因此对于 $\tau \in C(g) \setminus C_1(g)$, 存在正概率集 A, 使得在 A 上 $\tau < \tau^\epsilon$, 于是

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in C(g)\setminus C_1(g)} E_x g(X_\tau) &\le E_x I_A (V(X_\tau) - \epsilon) + E_x I_{A^c} V(X_\tau)\\ &= E_x V(X_\tau) - \epsilon P_x(A) \le V(x) - \epsilon P_x(A)\end{aligned}$$

因而

$$V(x) = \sup_{T\in C_1(g)} g(X_r) \le \sup_{\tau\in C_1(g)} h E_x g(X^{\tau_\epsilon})$$

定理 2 设 $g \in C(A^+)$, 且 $g(x) \ge C > -\infty$, 则

(1) 对任意的 $\epsilon > 0$, τ^ϵ 是 ϵ 最优规则;

(2) τ^0 为最优停时;

(3) 若最优停时或最优规则存在(记为 τ^*), 则 $P_x(\tau^0 \le \tau^*) = 1$, 且 τ^0 也是最优的停时(或最优规则)。

证明 (1) 引理 1 表明 $P_x(\tau^\epsilon < \infty) = 1$, 由 g 的连续性及 $V(x)$ 的下半连续性可知 $V(X_{\tau^\epsilon}) \le g(X_{\tau^\epsilon}) + \epsilon$. 由引理 4,

$$V(x) = E_x V(X_{\tau^\epsilon}) \le E_x g(X_{\tau^\epsilon}) + \epsilon$$

故 r^ϵ 是 ϵ 优规则。

(2) 令停时 $\tilde{\tau} \triangleq \lim_{\epsilon\downarrow 0} \tau^\epsilon \le \tau^0$. 依照通常的约定, $g(X_\infty) = \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t)$, 注意到 X 轨道的连续性及 $g(x)$ 的连续性, 我们有

$$\begin{aligned}\bar{V}(x) = V(x) &\le \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} E_x g(X_{\tau^\epsilon}) \le E_x(\overline{\lim_{\epsilon\to 0}} g(X_{r^\epsilon}))\\ &= E_x I_{\tilde{\tau}<\infty} \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} g(X_{\tau^\epsilon}) + E_x I_{\tilde{\tau}=\infty} g(X_\infty)\\ &\le E_x I_{\tilde{\tau}<\infty} g(X_{\tilde{\tau}}) + E_x I_{\tilde{\tau}=\infty} g(X_\infty) = E_x g(X_{\tilde{\tau}})\end{aligned}$$

因此, $\tilde{\tau}$ 是最优停时。而由

$$E_x V(X_{\tilde{\tau}}) \ge E_x g(X_{\tilde{\tau}}) = \bar{V}(x) = V(x) \ge E_x V(X_{\tilde{\tau}}) \tag{5}$$

可知

$$P_x(g(X_{\tilde{\tau}}) = V(X_{\tilde{\tau}})) = 1 \tag{6}$$

从而 $\tau^0 \le \tilde{\tau}$, 相反的不等式是成立的, 故 $\tilde{\tau} = \tau^0$.

(3) 由(6)知, τ^* 为最优停时的特征是 $g(X_{\tau^*}) = V(X_{\tau^*})$, $P_x - a.e$, 因而 $\tau^0 \le \tau^*$. 从而。

$$\bar{V}(x) = E_x V(X_{\tau^*}) \le E_x V(X_{\tau^0}) = E_x g(X_{\tau^0})$$

即 τ^0 为最小最优停时或规则。

2 带折扣因子的最优停止

现在我们考虑所谓带折扣因子的最优停止问题, 即求 $\sigma\in\mathscr{T}$(或 $\overline{\mathscr{T}}$) 使得

$$E_x e^{-\lambda\sigma} g(X_\sigma) = \sup_{\tau\in\mathscr{T}\text{或}\overline{\mathscr{T}}} E_x e^{-\lambda\tau} g(X_\tau)$$

其中 $\lambda>0$, 称为是折扣因子, 它可以解释为期权的标的物为带有连续红利率的股票, 仍然称 $g\geq 0$ 为报酬函数。用 $V^*(x)$ (相应地, $\overline{V}^*(x)$) 表示上式右端, 称为值函数。

定义 3 称 $f\in B$ 为 λ 过分函数, 如果 $\forall t\geq 0, x\in R, f(x)\geq e^{-\lambda t}T_t f(x)$; 设 $g\in B$, 如果 λ 过分函数 f 满足: $\forall x\in R, f(x)\geq g(x)$. 则称 f 为 g 的 λ 过分控制; 如果对 g 的一切 λ 过分控制 h, 均有 $h\geq f$, 则称 f 为 g 的最小 λ 过分控制。

对于 λ 过分函数, 我们仍有类似于过分函数的性质。特别地

定理 3 设 f 为非负 λ 过分函数, 则 $(f(X_t), \mathscr{F}_t, P_x)_{t\in R_+}$ 构成所谓的 λ 广义强上鞅, 即

$$e^{-\lambda\sigma} f(X_\sigma) \geq E_x[e^{-\lambda\tau} f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma] \quad \tau>\sigma P_x a.s. \tag{7}$$

引理 5 设 $g(x)$ 非负连续, 则

$$v(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\lim_{b\to\infty} Q_n^N(\lambda) g^b(x)$$

下半连续, 且是 $g(x)$ 的最小 λ 过分控制。

证明 由于 (X_t) 为 Feller 过程, g 有界连续, 故 $Q_n^N(\lambda) g^b(x)$ 连续, 因此, 作为单调增的三重极限 $v(x)$ 下半连续。

由于 $V_n(x)=\lim_{N\to\infty}\lim_{b\to\infty} Q_n^N(\lambda) g^b(x)$ 为离散时间情形($\{k/2^n: k\in N\}$) 的最小 λ 过分控制。由定理 3, 对任意的 $k, l\in\mathbf{N}$, 我们有

$$e^{-\lambda l/2^k} T_{l/2^k} V_n(x) \leq V_n(x)$$

令 $n\to\infty$, 由单调收敛定理, 可知对任意的有理数 τ, $e^{-\lambda\tau} T_\tau v(x)\leq v(x)$. 再由 $v(x)$ 的下半连续性, 证得 $v(x)$ 的 λ 过分性, 最小性的证明是容易的。

记

$$\tau^\epsilon = \inf\{t\geq 0: e^{-\lambda t} V(X_t) \leq e^{-\lambda t} g(X_t) + \epsilon\} \quad \epsilon\geq 0.$$

最后我们可以得到关于带折扣报酬最优停止的定理

定理 4 设报酬函数 $g(x)$ 非负连续, 则

(1) 带折扣报酬的值函数 $V(x)=\overline{V}(x)$ 是 $g(x)$ 的最小 λ 过分控制;

(2) 在 A^+ 条件下, 对任意的 $\epsilon>0$, τ^ϵ 是 ϵ 最优规则;

(3) 在 A^+ 条件下, τ^0 是最优停时;

(4) 在 A^+ 条件下, 若 $\overline{\mathscr{T}}$(或 $\mathscr{T}$) 中存在最优停时(或规则) τ^*, 则 τ^0 也是最优的, 而且

$$P_x(\tau^0\leq\tau^*) = 1$$

证明 完全类似于定理 1, 引理 5, 定理 2 的证明。

3 报酬函数方程的解

由上面的定理可知, 在某些条件下 τ^0 往往是最优停时(规则), 而

$$\tau^0 = \inf\{t\geq 0: g(X_t)\geq V(X_t)\}$$

因此确定值函数是非常重要的。[1, 2] 中引入马氏过程的特征(广无穷小) 算子, 通过求解 Stephan 问题来求解 $V(x)$. 下面就 (X_t) 为扩散过程的情形, 讨论 $V(x)$ 的求解。

引理 6 (Dynkin 公式的推广形式) 设 $\{X_t(\omega)_{t\geq 0}\}$ 为强马氏过程, τ 为停时, $E_x\tau<\infty$, 则对 $f\in \mathrm{dom}\tilde{A}$, $\lambda>0$, 有

$$E_x e^{-\lambda\tau} f(X_\tau) - f(x) = E_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}(\tilde{A} f(X_t) - \lambda f(X_t))\,dt \tag{8}$$

引理7 设$\tilde{A}f(x)$在x处连续,且对x的某一邻域U_0有$E_x\tau_{U_0}<\infty$,则

$$\tilde{A}f(x)-\lambda f(x)=\lim_{d(U)\to 0}\frac{E_x e^{-\lambda\tau(U)}f(X_{\tau(U)})-f(x)}{E_x\int_0^{\tau(U)}e^{-\lambda t}dt} \tag{9}$$

其中$d(U)$表示U的直径。

定理5 设报酬函数$f_t(\omega)=e^{-\lambda t}g(X_t)$, $\lambda>r$,其中$g(x)=(x-K)^+$,考虑带折扣的最优停止问题:

$$V(x)=\sup_{\tau\in T}E_x e^{-(\lambda+r)\tau}g(X_\tau)$$

$$\bar{V}(x)=\sup_{\tau\in \bar{T}}E_x e^{-(\lambda+r)\tau}g(X_\tau)$$

则存在x_1^*,使得$C=\{x:x<x_1^*\}$为继续观测域,$D=\{x:x\geq x_1^*\}$为停止域,而

$$\tau^*=\inf\{t\geq 0:X_t\in D\}$$

为最优停时。且$V(x)$是所谓Stephan问题的解:

$$\begin{aligned}\tilde{A}V(x)&=(\lambda+r)V(x),\quad x<x_1^*\\ V(x)&=g(x)\quad x\geq x_1^*\end{aligned} \tag{10}$$

证明 由定理4,值函数$V(x)$是$g(x)\triangleq(x-K)^+$的最小λ过分控制,且

$$\bar{V}(x)=V(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}Q_n^N(\lambda)g(x)$$

由g之凸性,知$T_tg(x)$为凸,故$Q_n(\lambda)g(x)$, $Q_n^N(\lambda)g(x)$为凸,其极限函数$V^*(x)$仍为凸,从而存在x_1^*,使得

$$C=\{x:V(x)>g(x)\}=\{x:x<x_1^*\},$$

$$D=\{x:V(x)=g(x)\}=\{x:x\geq x_1^*\}$$

因为

$$e^{-rt}(S_t-K)^+=(S_0e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}-Ke^{-rt})^+$$

而

$$P_x\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right)=1$$

故因为$\lim_{n\to\infty}e^{-\lambda t}(S_t-K)^+=0$,定理4之条件$A^+$满足,故知带折扣因子$e^{-\lambda t}$的最优停止问题中,$\tau^*$是最优停时(如果$P_x(\tau^*<\infty)=1$,则它是最优规则)。

往证(10)式:对于任意的$x\in C^*$,以及x的邻域$U^c\supseteq D^*$,故$\tau_U\leq\tau_1^*$.而由于$(e^{-\lambda t}V(X_t))_{t\geq 0}$为非负上鞅,故

$$V(x)\geq E_x e^{-(\lambda+r)\tau(U)}V(X_{\tau(U)})\geq E_x e^{-(\lambda+r)\tau^*}V(X_{\tau^*})$$

τ^*为最优停时,上式等号成立。对$V(x)$应用(8)式,则得到(10)式。

参考文献

1 Shiryayev A. N. Optimal stopping Rules, 1978, ISBN 0-387-90256-2, Springer-Verlag, New-York

2 金治明. 最优停止理论及其应用. 长沙: 国防科技大学出版社. 1995

3 王梓坤. 随机过程论. 北京: 科学出版社. 1965

4 Shiryayev A N, Kabanov Y U M, Kramkov D O, Mel´nikov A V. Toward The Theory of Opition of Both European and American Types Ⅰ, Ⅱ, Theory Probab. Appl, 39(1)