三种局部环的同调刻划*

戴清平

(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　给出了 C- M 环、Gorenstein 环和正则环上 C- M 模的同调性质, 并用这种性质描述了这三种环的联系与区别。

关键词　C-M 环, Gorenstein 环, 正则环

分类号　O 153. 3

The Homological Criteria of Three Classes of Local Rings

Dai Qingping

(Department of systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　We have obtained two criteria of three classes of local rings in commutative algebra with homological methods.

Key words　C-M ring, gorenstein ring, regular ring

本文所考虑的环都是指含有单位元的交换诺特环。在交换代数和代数几何中, C- M 局部环、Gorenstein 局部环、正则局部环起着重要的作用。众所周知, 对于局部环(R, m, k)而言: R 是C- M 环⇔极大正则序列生成m- 准素理想; R 是 Gorenstein 环⇔极大正则序列生成不可约m- 准素理想; R 是正则环⇔极大正则序列生成理想 m。我们把这种描述为内部刻划。本文的目的是利用模的同调维数、Ext 函子、Matlis 对偶等理论, 给出这三种环的两个具有比较意义的同调刻划定理。我们称之为外部刻划。

在我们的讨论中, 要用到一些结果, 这些结论在[1, 3]中可以找到, 我们罗列如下。

引理 1　(Intersection Theorem) 设 R 是局部环, M 是有限生成 R- 模且 $pd_RM < +\infty$, N 是任意有限生成R- 模, 则有 $\dim N \leq pd_RM + \dim(M \otimes_R N)$, 特别地取 $N = R$ 有 $\dim R \leq pd_RM + \dim M$。

引理 2　(Roberts- Bass) 设(R, m)是局部环, 如果存在非零有限生成 R- 模M, 使得$id_RM < +\infty$, 那么R 是 C- M 环。

引理 3　(Foxby) 设 R 是局部环, M 是 R- 模, 如果 $id_RM < +\infty$, $P_{d_R}M < +\infty$, 那么 R 是 Gorenstein 环。

引理 4　(Roberts) 设(R, m, k)是局部环, $\dim R = d$, 如果 Bass 数 $\mu_{d_R}(R) = \dim_k Ext_R^d(R/m, R) = 1$, 那么$R$ 是 Gorenstein 环。

下面我们再证一个有用的引理。

引理 5　设 M 是(R, m, k) 有限生成模, $x_1, \cdots, x_d$ 是 M- 正则列。则

(1) 如果 $id_RM = r < +\infty$, 那么 $id_RM/(x_1, \cdots, x_d)M = r$;

(2) 如果$pd_RM = s < +\infty$, 那么$pd_RM/(x_1, \cdots, x_d)M = s + d$。

证明　(1) 由归纳法, 我们只要证 $d = 1$ 的情形。设 N 是任意的有限生成模, 由短正合列:

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$$

导出长正合列:

---

* 1999 年 3 月 1 日收稿
第一作者: 戴清平, 男, 1966 年生, 讲师

$$Ext_R^r(N, M) \xrightarrow{x} Ext_R^r(N, M) \to Ext_R^r(N, M/xM)$$
$$\to Ext_R^{r+1}(N, M) \to Ext_R^{r+1}(N, M) \to Ext_R^{r+1}(N, M/xM)$$
$$\to Ext_R^{r+2}(N, M)$$

由于 $Ext_R^{r+1}(N, M) = Ext_R^{r+2}(N, M) = 0$, 因此 $Ext_R^{r+1}(N, M/xM) = 0$, 这说明 $id_R M/xM \leq r$。如果 $id_R M/xM < r$, 则 $Ext_R^r(N, M/xM) = 0$, 因此 $Ext_R^r(N, M) = xExt_R^r(N, M)$, 由 Nakayama 引理有 $Ext_R^r(N, M) = 0$, 这与 $id_R M = r$ 矛盾。因此 $id_R M/xM = r$。

用同样的方法可证(2)。

定理 1 设 (R, m, k) 是局部环, $W = \{$非零有限生成 C- M 模$\}$, $U = \{M \in W \mid id_R M < +\infty\}$, $V = \{M \in W \mid pd_R M < +\infty\}$, 则下述结论成立:

(1) R 是 C- M 环 $\Leftrightarrow U \neq \Phi \Leftrightarrow V \neq \Phi$;

(2) R 是 Gorenstein 环 $\Leftrightarrow U = V \neq \Phi$;

(3) R 是正则环 $\Leftrightarrow U = V = W \neq \Phi$。

证明: (1) 设 R 是 C- M 环, $x_1, \cdots, x_d$ 是极大正则列, $M = R/(x_1, \cdots, x_d)$, $E = E(R/m)$, $M^v = Hom_R(M, E)$。M 的长度与 M^v 的长度相等, 即 $0 < l(M) = l(M^v) < +\infty$, 故 $M^v \in W$。对任意 R-模 N, 由 Matlis 对偶有 $Ext_R^i(N, M^v) = Tor_i^R(N, M)^v$, 由 $pd_R M = d$ 知 $fd_R M \leq d$, 因此当 $i \geq d+1$ 时有 $Ext_R^i(N, M^v) = 0$, 即 $id_R M^v \leq d$。因此 $M^v \in U$, 显然 $R \in V$。

如果 $U \neq \Phi$, 由 Roberts- Bass 定理知 R 是 C- M 环。

如果 $V \neq \Phi$, 设 $M \in V$, 由相交定理和 A- B 公式有:

$$\dim R \leq pd_R M + \dim M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M + \dim M = \operatorname{depth} R$$

因此 R 是 C- M 环。

(2) "$\Leftarrow$"由 Foxby 定理即得证。

"$\Rightarrow$"由于 Gorenstein 环是 C-M 环, 因此 $U \neq \Phi$, $V \neq \Phi$, 我们的目的是证明 $U = V$。设 U', V' 分别是 U 与 V 的有限长度模子集, 由于我们考虑的是 C-M 模, 由引理 5, 只要证 $U' = V'$。

为此先证明这样一个事实: 在交换诺特环上, M 是有限生成模, 如果平坦维数 $fd_R M < +\infty$, 那么 $fd_R M = pd_R M$。显然在任何情况下有 $fd_R M \leq pd_R M$。设 $fd_R M = n$, 对 M 进行极小自由分解:

$$\to P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

由于 $fd_R M = n$, $\operatorname{Im}\alpha_n \subseteq P_{n-1}$, $\operatorname{Im}\alpha_n$ 为平坦模且有限生成, 从而为投射模, 故 $pd_R M \leq n$, 结合起来有 $fd_R M = pd_R M = n$。

下面证明 $U' = V'$。

设 $pd_R M < +\infty$, 因此 $fd_R M = pd_R M < +\infty$。考虑 M 的极小自由分解:

$$\to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

P_i 的内射维数即 A 的内射维数, 从而有限, 分解为一组短正合列后即可得 $id_R M < +\infty$, 即 $V' \subseteq U'$。

如果 $id_R M < +\infty$, 由 $0 < l(M) = l(M^v) < +\infty$, 有 M^v 是零维模。由 Matlis 对偶有 $id_R M = fd_R M^v < +\infty$, 从而 $pd_R M^v < +\infty$。再由已证的事实 $V' \subseteq U'$ 有 $id_R M^v < +\infty$, 利用 Matlis 对偶 $fd_R M = id_R M^v$ 有 $pd_R M = fd_R M < +\infty$。此即 $U' \subseteq V'$。

(3) "$\Rightarrow$"结论显然。反之取 $M = k$, 注意 $\operatorname{gl.dim} R = id_R k = pd_R k < +\infty$ 即得结论。

定理 2 设 (R, m, k) 是局部环, $\dim R = n$, $E = E(k)$, $M^v = Hom_R(M, E)$, 则下述结论成立:

(1) R 是 C- M 环 $\Leftrightarrow$ 对任何有限长度模 M 有 $Ext_R^i(M, R) = 0 (i < n) \Leftrightarrow H_m^i(R) = 0 (i \neq n)$;

(2) R 是 Gorenstein 环 $\Leftrightarrow$ 对任何有限长度模 M 有 $Ext_R^n(M, R) \cong M^v \Leftrightarrow H_m^i(R) = \begin{cases} 0 (i \neq n) \\ E (i = n) \end{cases}$;

(3) R 是正则环 $\Leftrightarrow$ 对任何有限长度模 M 有 $Ext_R^{n+1}(M, M) = 0$。

证明 (1) 注意到 Ext、H_m 与 depth 的关系以及 $\operatorname{depth} R \leq \dim R$, 我们有: R 是 C- M 环 $\Leftrightarrow \operatorname{depth} R = n \Leftrightarrow \min\{i \mid Ext_R^i(R/m, R) \neq 0\} = \min\{i \mid H_m^i(R) \neq 0\} = n \Leftrightarrow Ext_R^i(R/m, R) = H_m^i(R) = 0 (i < n)$

考虑到对任意模 M 有 $H^i_m(M)=0(i>\dim M)$，要证(1) 只要再证当 $Ext^i_R(R/m,R)=0(i<n)$ 时，对任意有限长度模 M 有 $Ext^i_R(M,R)=0(i<n)$。固定 $i(i<n)$，对 $l(M)$ 进行归纳。显然 $l(M)=1$ 时成立。

设 $0\to M_1\to M\to k\to 0$，$l(M_1)=l(M)-1<+\infty$，由长正合列有 $Ext^i_R(M_1,R)\to Ext^i_R(M,R)\to Ext^i_R(k,R)$，再由归纳假定 $Ext^i_R(M_1,R)=Ext^i_R(k,R)=0$，因此 $Ext^i_R(M,R)=0$。

(2) 先证第一个等价关系。

“$\Rightarrow$”设 $0\to R\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^n\to 0$ 为 R 的极小内射分解，其中 $E^i=\bigoplus_{ht(p)=i}E(R/P)$。当 $p\neq m$ 时，$\mathrm{Hom}_R(R/m,E(R/P))=0$，因为 $\mathrm{Hom}_R(R/m,E(R/P))=\{x\in E(R/P)\ \ mx=0\}$，$mx=0\Leftrightarrow m\subseteq O(x)\subseteq P$，因此 $x=0$。

用同于(1) 中的归纳法可证明当 $l(M)<+\infty$ 时有：$Hom_R(M,E(R/P))=0$，其中 $p\neq m$。因此 $Ext^n_R(M,R)\cong Hom_R(M,E^n)=Hom_R(M,E)=M^v$。

“$\Leftarrow$”取 $M=k$，$\mu^n(R)=\dim_k Ext^n_R(k,R)=\dim_k k^v=1$，由 Roberts 的结论即知 R 是 Gorenstein 环。

再证第二个等价关系。

“$\Rightarrow$”利用 Bass 分解和 H^i_m 的定义即得结论。

“$\Leftarrow$”由(1) 知 R 是 C-M 环，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是极大正则列，$\underline{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$H^n_m(R)=H^n_{\underline{x}}(R)$。

$$0\to R\to\bigoplus R_{x_i}\to\bigoplus_{i<j}R_{x_ix_j}\to\cdots\to\bigoplus R_{x_1x_2\cdots x_n}\to H^n_{\underline{x}}(R)\to 0$$

从而 $H^n_m(R)=E$ 有有限平坦维数。$H^n_m(R)^v=E^v=\hat{R}$，由 Matlis 对偶知 E 是有限长度模，所以 E 有有限投射维数。由 Foxby 的结论得 R 是 Gorenstein 环。

(3) “$\Rightarrow$”$\mathrm{gl.\,dim}R=n$，故 $Ext^{n+1}_R(M,M)=0$。

“$\Leftarrow$”取 $M=k$，$\mathrm{gl.\,dim}R\le n\Leftrightarrow Tor^R_{n+1}(k,k)=0\Leftrightarrow Tor^R_{n+1}(k,k)^v=0\Leftrightarrow Ext^{n+1}_R(k,k^v)=Ext^{n+1}_A(k,k)=0$

参考文献

1 Stroker J R. Homological Question in Local Algebra. Lond. Math. Soc. LNS 145, 1991

2 Matsumura H. Commutative Algebra. 2nd edition, The Benjamin, Inc., 1980

3 Roberts P. Rings of type 1 are Gorenstein. Bull. Lond. Math. Soc. 15, 1983

4 Bass H. On the ubiquity of Gorenstein rings. Math. Z 82, 1963

5 Eisenbud D. Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry, 1990

6 Kunz E. Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 1990

7 Grothendieck A. Local Cohomology. LN. 41, 1967

8 Hartshorne R. Residues and Duality. LN20, 1966