国 防 科 技 大 学 学 报
第 21 卷 第 5 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 5 1999

# 关于不定方程 $x^3 = Dy^2 + 1$*

倪谷炎

(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　本文对方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 中一般情形的 $D$ 进行了讨论, 对 $0 < D < 100$ 且 $D$ 不含平方因子, 不定方程 $x^3 = Dy^2 + 1$, 仅当 $D = 7, 26, 31, 38, 61$ 时, 有非平凡解, 而对于 $D = 7, 26, 31, 38$ 和 61 时, 我们给出其部分解。

关键词　不定方程, 整数解

分类号　O156

## On The Diophantine Equation $x^3 = Dy^2 + 1$

Ni Guyan

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract**　In this paper, we study the equation of the title with $D$ general. The equation has nontrivial integer solutions, only when $D = 7, 26, 31, 38$ or 61, for $0 < D < 100$ and squarefree. We have got some solutions of the equation of the title, if $D = 7, 26, 31, 38$ and 61.

**Key words**　Diophantine equation, integer solution

近年来, 关于不定方程 $x^3 = Dy^2 \pm 1$ 的讨论仅局限于, 整数 $D > 0$ 且不含素因子 $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ 的一些特殊形式上。柯召、孙琦[1,2]用初等的方法, 证明了当 $D > 2$ 时它们没有非平凡解。对方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 讨论的最好结果也就是, 对满足上面条件的 $D > 0$ 方程没有非平凡解。

本文对方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 中一般情形的 $D$ 进行了讨论, 并当 $0 < D < 100$ 时我们得到

定理 1　如果 $D$ 不属于以下两种情况, 则方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 没有正整数解,

1) $D \equiv 7 (\mathrm{mod} 8)$, 而且含有素因子 $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$;

2) 3 $h$, 而且含有素因子 $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$, $h$ 是二次域 $Q(\sqrt{-D})$ 的类数。

定理 2　对 $2 < D < 100$ 且 $D$ 不含平方因子, 不定方程 $x^3 = Dy^2 + 1$, 仅当 $D = 7, 26, 31, 38, 61$, 时, 有非平凡解。

对于 $D = 7, 26, 31, 38$ 和 61 时, 我们给出其部分解。

不失一般性, 我们可以假设 $D$ 不含平方因子, 在虚二次域 $Q(\sqrt{-D})$ 上, 把方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 分解为 $(1 + \sqrt{-D}y)(1 - \sqrt{-D}y) = x^3$。很显然如果存在整数 $a$ 和 $b$, 满足

$$\pm 1 + \sqrt{-D}y = (a + b\sqrt{-D})^3, \tag{1a}$$

这就得到了方程的一组解 $x = a^2 + b^2 D$, $y = 3a^2 b - b^3 D$。当然情况(1a)只是方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 有解的充分条件, 并不是必要条件, 除非满足以下四个条件:

1) $D \not\equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$;

2) 虚二次域 $Q(\sqrt{-D})$ 的单位不出现问题;

3) 虚二次域 $Q(\sqrt{-D})$ 有唯一分解性;

4) $\pm 1 + \sqrt{-D}y$ 没有公因子。

* 1999 年 4 月 2 日收稿
第一作者: 倪谷炎, 男, 1966 年 10月生, 讲师

由方程(1a)的实部得到

$$\pm 1 = a^3 - 3ab^2D$$

这就导出 $a = \pm 1$ 和 $3b^2D = 1 \pm 1$，我们得到仅有的解 $b = 0$。于是有

引理 1　情况(1a)仅有解 $x = 1, y = 0$。

接下来我们讨论上面的四个条件。

首先，如果仅满足条件 1)，即仅有 $D \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$，则方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 有解的充分条件除(1a)外还应有

$$\pm 1 + \sqrt{-D}y = \left(\frac{1}{2}(A + B\sqrt{-D})\right)^3,\ A \equiv B \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \tag{1b}$$

这里 $x = \frac{1}{4}(A^2 + B^2D)$。由方程(1b)的实部导出

$$\pm 8 = A^3 - 3B^2DA$$

因为 $A$ 是奇数，所以 $A = \pm 1$。因此

$$\pm 8 = 1 - 3B^2D$$

$$3B^2D = \pm 8 + 1 = 9 \text{ 或 } -7$$

这就得到 $B = \pm 1, D = 3$。而对于 $D = 3$，我们已经知道方程没有非平凡解。因此我们有

引理 2　情况(1b)仅有平凡解 $y = 0, x = 1$。

接下来考虑虚二次域的单位。事实上，除了 $D = 3$，虚二次域 $Q(\sqrt{-D})$ 的单位只有 $\pm 1$。而对于 $D = 3$，文[2]早已证明方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 没有非平凡解，因而单位问题对方程的解没有影响。

至于域 $Q(\sqrt{-D})$ 的整数环是否是唯一分解环，也就是是否有 $h = 1$。事实上我们并不需要 $h = 1$，而只需要 3 $h$，这里 $h$ 是虚二次域的类数。例如 $D = 26$，$h = 6$，这种情况我们必须区别对待。因而影响方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 整数解仅是那些使得 3 $h$ 的 $D$。公因子是一个比较困难的问题，不过也仅当 $D \equiv 7 (\mathrm{mod} 8)$ 时，在域 $Q(\sqrt{-D})$ 中，整数 2 的素理想因子是 $\pm 1 + \sqrt{-D}y$ 的公因子，因而它会影响方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 的解。

综上所述，我们得到定理 1.

对于定理 1 中的两种不易处理的情况，我们可以按下面的办法处理。通过文[4, 5]的讨论，下面的几个性质是成立的：

1. 设 $D = D_1D_2$，$D_1$ 不含 $6k + 1$ 形的素因子，$D_2$ 仅含 $6k + 1$ 形的素因子，则方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 有非平凡整数解的充要条件是存在某个 $(p, q)$ 使方程

$$x - 1 = D_1qa^2, x^2 + x + 1 = pb^2, y = ab \tag{2}$$

或

$$x - 1 = 3D_1qa^2, x^2 + x + 1 = 3pb^2, y = 3ab \tag{3}$$

有解，这里 $p > 0, q > 0, pq = D_2, b \not\equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$。

2. 当 $D > 2, p = 1$ 时，(2)和(3)均无非平凡解。

3. 当 $p > 1$ 时，对方程(2)，我们有

$$(2D_1qa^2 + 3)^2 + 3 = p(2b)^2. \tag{4}$$

设 $X^2 + 3 = pY^2$ 满足 2 $Y$ 的全部解为 $W_n = a_n + b_n\sqrt{p}$，$n \in Z$，则方程(4)的全部解为

$$\{(a, b) : 2D_1qa^2 + 3 = a_n, 2b = b_n, \text{对某些 } n \in Z\}$$

4. 当 $p > 1$ 时，对于方程(3)可以得到

$$(6D_1qa^2 + 3)^2 + 3 = 3p(2b)^2. \tag{5}$$

设 $X^2 + 3 = 3pY^2$ 满足 2 $Y$ 的全部解为 $W_n = a_n + b_n\sqrt{3p}$，$n \in Z$，则方程(5)的全部解为

$$\{(a, b) : 6D_1qa^2 + 3 = a_n, 2b = b_n, \text{对某些 } n \in Z\}$$

对于 $1 < D < 100$，而且含有素因子 $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ 时：

1) 如果3 $h$, $D$ 有 26、31、38 和 61 四个值;

2) 如果 $D \equiv 7 (\mathrm{mod} 8)$ 时, $D$ 有 7, 31, 39, 79 和 95 五个值。

下面我们讨论这几个值。

例 1　$D = 38$, 可以考虑方程

$$x - 1 = 6a^2, x^2 + x + 1 = 57b^2, y = 3ab$$

可以化为

$$(12a^2 + 3)^2 + 3 = 57(2b)^2$$

其全部可能解表示为

$$12a^2 + 3 + 2b\sqrt{57} = \pm(15 + 2\sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n = \pm(a_n + b_n\sqrt{57})$$

令 $n = 0$, 解得 $a = 1, b = 1, x = 7, y = 3$

类似地得到以下 $D$ 的部分解

| $D$ | 7 | 26 | 31 | 38 | 61 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 13 |
| $y$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 |

例 2　$D = 39$, 只需考虑下面两个方程

$$x - 1 = 3a^2, x^2 + x + 1 = 13b^2, y = ab \tag{6}$$

$$x - 1 = 9a^2, x^2 + x + 1 = 39b^2, y = 3ab \tag{7}$$

由(6)得 $(6a^2 + 3)^2 + 3 = 13(2b)^2$, 从而3 $b$, 与 $b$ 的假设矛盾, 即方程(6)无解

由(7)得 $(18a^2 + 3)^2 + 3 = 39(2b)^2$, 其全部可能解表示为

$$18a^2 + 3 + 2b\sqrt{39} = \pm(6 + \sqrt{39})(25 + 4\sqrt{39})^n = \pm(a_n + b_n\sqrt{39})$$

$$b_{n+1} = 4a_n + 25b_n \equiv b_n \equiv b_0 \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)$$

因而 $2b = \pm b_n$ 无解, 也就是方程(7)无解。所以当 $D = 39$ 时, 方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 无非平凡解。

应用类似的方法可以证明当 $D = 79$ 和 95 时, 方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ 也没有非平凡解。综上所述, 我们得到定理 2。

## 参考文献

1 柯召, 孙琦 . 关于不定方程 $x^3 \pm 1 = Dy^2$. 中国科学, 1981, 12: 1453～1457

2 佚名 . 关于不定方程 $x^3 \pm 1 = 3Dy^2$. 四川大学学报, 1981, 2: 1～6

3 曹珍富 . 丢番图引论, 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989

4 倪谷炎 . 关于丢番图方程 $x^3 \pm p^{3n} = Dy^2$, 四川大学学报(自然科学版), 1996, 6: 658～664

5 倪谷炎 . 关于丢番图方程 $x^3 \pm p^{3n} = Dy^2$, II 四川大学学报(自然科学版), 1998, 6: 805～809

6 Cohn J H E , The diophantine equations $x^3 = Ny^2 \pm 1$, Quart. J. Math. Oxford 1991, 42(3): 27～30

7 Stroeker R J, On the Diophantine equation $x^3 - Dy^2 = 1$, Nieuw. Arch. wisk. 1976, 24(3): 231～255

8 Mordell L J. Diopantine *Equations*, 1970