

复合材料圆锥壳稳定性分析的传递函数法*

雷勇军 李海阳 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 基于线弹性小变形理论, 利用 Fourier 级数展开、Laplace 变换和摄动方法, 建立了复合材料薄壁圆锥壳的静力响应、频率响应、自由振动与屈曲特征值问题的渐近传递函数解。构造了复杂边界条件、中间带支撑、变锥度及阶梯变厚度圆锥壳的传递函数解。数值计算结果表明该方法具有很高的计算精度。

关键词 复合材料圆锥壳, 振动, 稳定性, 渐近解, 传递函数法

分类号 O326, TB33

Distributed Transfer Function Method for Stability Analysis of Composite Conical Shells

Lei Yongjun Li Haiyang Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, based on linear elastic and small deformation theory, an asymptotic distributed transfer function method (TFM) is presented for static deformation, free vibration and buckling analysis of isotropic/composite thin conical shells, where Fourier series expansion, Laplace transform, perturbation technique are applied. Synthesizing the transfer functions of sub-segments, the TFM solution is worked out for combined shells composed of several conical shell segments with different conical angle, thickness, complex boundary conditions and middle-supported constraints. Numerical results shows that this asymptotic TFM solution is of very high precision.

Key words composite conical shell, vibration, stability, asymptotic solution, distributed transfer function method

复合材料圆锥壳是航天运载器中广泛采用的薄壁承载结构, 如整流罩、箭体级间段、仪器舱、卫星发射支架等。失稳和共振是引起这些结构破坏的主要因素。因此, 复合材料圆锥壳的振动和稳定性分析是结构设计中非常重要的研究课题。本文在文 [1~2] 的基础上采用分布参数传递函数法, 分析了复合材料圆锥壳的振动与稳定性问题。以壳体位移及其导数项为状态变量, 建立了适合不同边界条件和多种壳理论的复合材料圆锥壳统一的渐近分布参数传递函数法分析模型。该方法将壳体的所有变量包括位移、内力、外载和边界条件沿环向进行 Fourier 级数展开, 再关于时间变量进行 Laplace 变换, 并针对圆锥壳的几何特点, 引入摄动小参数: $\epsilon = L/r \sin\alpha$ 对控制方程进行渐近展开, 利用分布参数传递函数法, 得到了圆锥壳结构的振动与稳定性问题的渐近解析解。对于长锥壳来说, ϵ 不一定是小参数, 需要将长壳分成若干子截锥壳, 再利用子结构组装技术进行求解。这样, 该方法就可以用求解更为复杂的锥壳结构, 如组合锥壳等。

1 理论公式

如图 1 所示复合材料截锥壳 (可以是复杂锥壳结构的某一段), 其大端半径为 r_2 , 小端半径为 r_1 径, 半锥角为 α , 母线长为 $2L$ 。忽略剪切变形的影响, 采用不同的壳理论, 其线弹性小变形的运动微分方程可以统一成如下形式^[2]:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{n_k} \sum_{j=0}^i \left[A_{mkij}(x) \frac{\partial^2}{\partial a^2} + B_{mkij}(x) \frac{\partial}{\partial a} + C_{mkij}(x) \right] \frac{\partial u^k(x, \theta, t)}{\partial x^{i-j} \partial \theta} = f^m(x, \theta, t) \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (19572027)、国家教委优秀青年教师基金和归国留学人员基金资助项目
1999 年 1 月 11 日收稿
第一作者: 雷勇军, 男, 1968 年生, 博士

$$(m = 1, 2, 3)$$

其中, $u_k (k = 1, 2, 3)$ 分别是壳体中面上任一点沿轴向(x)、环向(θ) 和法向(z) 的位移分量, $f_m(x, \theta, t)$ 是外载荷分量, n_k 是 u_k 关于空间变量的最高阶导数, $(A, B, C)_{mkij}$ 是与壳体几何和材料参数相关的常数。

相应的壳体两端边界条件和为:

$$\left[\sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{n_k-1} \sum_{j=0}^i \left(a_{lkij} \frac{\partial^2}{\alpha^2} + b_{lkij} \frac{\partial}{\alpha} + c_{lkij} \right) \frac{\partial u^k(x, \theta, t)}{\alpha^{i-j} \partial \theta^j} \right]_{x=x_\alpha} = \lambda^l(\theta, t) \quad (2)$$

$$\alpha = 1, 2 \text{ 和 } l = 1, 2, \dots, n_b$$

其中, $x_1 = 0, x_2 = L, \lambda^l(\theta, t)$ 是边界上给定的已知函数, 而圆锥壳的边界条件数 $n_b = n_1 + n_2 + n_3$, 一般情况下 $n_b = 8$ 。 $(a, b, c)_{lkij}$ 是与壳体几何和材料参数相关的常数。初始条件为:

$$u^k(x, \theta, t)|_{t=0} = u_0^k(x, \theta), \quad \frac{\partial}{\partial t} u^k(x, \theta, t)|_{t=0} = u_1^k(x, \theta) \quad (3)$$

$$k = 1, 2, 3$$

为求解方便, 将壳体的位移分量、外载荷、边界条件和初始条件沿环向进行 Fourier 级数展开。如取

$$u^k(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [u_{1,n}^k(x, t) \cos n\theta + u_{2,n}^k(x, t) \sin n\theta] \quad (4)$$

则圆锥壳的运动微分方程、边界条件和初始条件关于环向波数 n 解耦。但所得到的微分方程仍包含一个空间变量 (x) 和一个时间变量, 对时间变量进行 Laplace 变换后进一步将其简化为含复参数 s 的常微分方程, 它的系数是坐标的函数。写成状态空间形式

$$\frac{d\eta_n(x, s)}{dx} = F_n(x, s) \eta_n(x, s) + \tilde{f}_n(x, s) + \tilde{g}_n(x, s) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

式中, 状态空间向量 η_n 包含了位移函数 $\tilde{u}_{i,n}^k$ 及其 $(n_k - 1)$ 阶导数, 其定义方式见文 [2]。边界条件也写成矩阵形式

$$M_n(s) \eta_n(x_1, s) + N_n(s) \eta_n(x_2, s) = Y_n(s) \quad (6)$$

(5) 式和 (6) 式中的矩阵 F_n, M_n, N_n 和向量 $\tilde{f}_n, \tilde{g}_n, Y_n$ 的详细内容, 可参考文 [3]。但与圆柱壳不同, 由 (5) 式和 (6) 式组成的边值问题不能直接求解, 因为 $F_n(x, s)$ 是坐标 x 的函数。对这种复杂的变系数微分方程, 在解析求解存在困难的情况下, 需要采用其它方法, 例如渐近方法。

引入线性坐标变换

$$x = r_0(1 + \epsilon \xi) / \sin \alpha \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (7)$$

式中 $\epsilon = (L/r_0) \sin \alpha, L$ 是锥壳母线的半长, r_0 是锥壳中截面半径。当锥角 α 不大或 L/r_0 较小时, ϵ 是一个小参数。

将 (7) 式代入 (5) 式和 (6) 式, 得到

$$\frac{d\eta_n(\xi, s, \epsilon)}{d\xi} = F_n(\epsilon \xi, s) \eta_n(\xi, s, \epsilon) + q_n(\xi, s) \quad (8a)$$

$$M_n \eta_n(-1, s, \epsilon) + N_n \eta_n(1, s, \epsilon) = Y_n(s) \quad (8b)$$

式中

$$\eta_n(\xi, s, \epsilon) = \eta_n(x, s); F_n(\epsilon \xi, s) = L F_n(x, s); q_n(\xi, s) = L [\tilde{f}_n(x, s) + \tilde{g}_n(x, s)]$$

利用 (7) 式, 将 $\eta_n(\xi, s, \epsilon)$ 和 $F_n(\epsilon \xi, s)$ 按小参数 ϵ 进行展开

$$F_n = \sum_{i=0}^m \epsilon^i F_n^i(s), \quad \eta_n(\xi, s, \epsilon) = \sum_{i=0}^m \epsilon^i \eta_n^i(\xi, s) \quad (9)$$

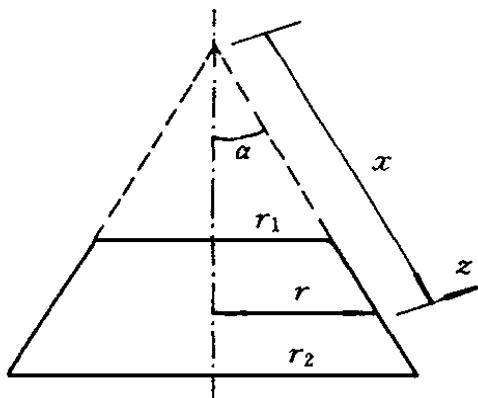


图1 圆锥壳示意图

Fig. 1 Geometry of a conical shell

其中 m 是摄动阶数。

将(9)式代入(8)式,可以得到 $m + 1$ 个关于 $\eta_n^i (i = 0, 1, \dots, m)$ 解耦的相关边值问题的方程组, 它们的解用传递函数可以写成^[2]

$$\eta_n^0(\xi, s) = \int_{-1}^1 \mathbf{G}_n(\xi, x, s) \mathbf{q}^n(x, s) dx + \mathbf{H}_n(\xi, s) \mathcal{Y}_n(s) \quad (10a)$$

$$\eta_n^i(\xi, s) = \int_{-1}^1 \mathbf{G}_n(\xi, x, s) \mathbf{F}_n^i(x, s) \eta_n^{i-1}(x, s) dx \quad (10b)$$

式中

$$\mathbf{G}_n(\xi, x, s) = \begin{cases} \mathbf{H}_n(\xi, s) & \mathbf{M}_n(s) & e^{-F_n^0(1+x)} & x < \xi \\ -\mathbf{H}_n(\xi, s) & \mathbf{M}_n(s) & e^{F_n^0(1-x)} & x > \xi \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_n(\xi, s) = e^{F_n^0(s)\xi} \left[\mathbf{M}_n(s) \quad e^{-F_n^0} + \mathbf{N}_n(s) \quad e^{F_n^0} \right]^{-1}$$

根据问题的精度要求, 选择合适的摄动阶数 m 。利用(10)式, 求得各阶摄动解 $\eta_n^i (i = 1, 2, \dots, m)$, 回代到(9)式, 即得到 η_n 的 m 阶摄动解。有了 η_n , 则可非常容易地得到壳体的位移、应变和应力。同样, 对静力问题, 复参数 $s = 0$; 对频率响应, $s = i\omega$ 。

在工程实际中, 经常遇到更为复杂的组合结构问题(例如图2), 这些问题不能象前面所述的那样直接一次求解。用垂直轴线的平面, 将组合锥壳结构剖分为若干个子锥壳, 在每一个子锥壳内, 下述条件得以满足: (1) 锥度 α 和厚度 h 为常数; (2) 内部没有支撑; (3) ϵ 是足够小的摄动小参数。在每一个子锥壳内, 上节的解仍然是成立的, 于是可以类似于有限元的子结构法进行求解。

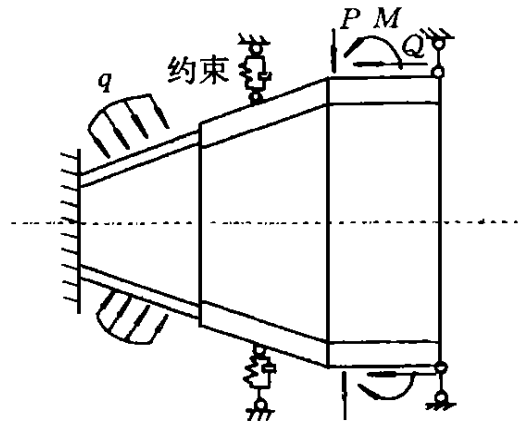


图2 组合锥壳示意图

Fig. 2 Geometry of a combined conical shell

2 数值算例

为检验本方法的有效性, 针对不同锥度 α 、不同 L/r_1 值和不同边界条件的各向同性、正交异性及层合圆锥壳计算了大量的算例, 在此仅给出部分计算结果。

(1) 正交反对称铺层圆锥壳

计算中取的材料常数为: $E_x/E_\theta = 40$; $\mu_{x\theta} = 0.25$; $G_{x\theta}/E_\theta = 0.5$ 。表1给出了一类简支边界条件($N_x = v = w = M_x = 0$) 和一类固支边界条件($u = v = w = w, x = 0$) 下无量纲化的轴压屈曲载荷值 $\rho = p_{cr}/\bar{p}_\sigma$, p_{cr} 是轴压屈曲载荷, $\bar{p}_\sigma = \frac{2\pi E_x h^2 \cos^2 \alpha}{3(1 - \mu_{x\theta}^2)}$ 。从表中可以得出本文的结果与有限元的结果比较一致, 其中括号内数字是屈曲载荷对应的环向波数。

计算中, 取 $r_1/h = 100$ 和比值 L/r_1 不变, 仅变化锥度 α 。当锥度 $\alpha < 30^\circ$ 时, 由于参数 ϵ 较小, 摄动次数只需取 1 ~ 2 阶, 就已经收敛。而对于 $\alpha > 30^\circ$ 的圆锥壳, 由于 ϵ 较大, 此时, 摄动阶数要取得较多, 才能得到较好的结果, 相应的计算速度会很慢。因此, 将锥壳沿母线方向分成 4 或 8 个子锥段。如果分 4 个子段, 则每段取 1 阶摄动解; 如果分 8 段则每个子段内只需取 0 阶摄动解。而采用有限元解时将锥壳分为 40 个截锥壳单元。

(2) 加筋锥壳

为了最大限度的减轻飞行器的结构重量, 提高结构的承载能力, 复合材料薄壁圆锥壳在实际应用中大都带有了纵向、环向或三角形网格加筋。本文计算了文[5]中的具有三角形网格加筋复合材料圆柱(圆锥)壳在均匀外压作用下的屈曲载荷, 计算结果由表2给出。

表1 反对称铺层锥壳的轴压屈曲载荷比值 ρ

Tab. 1 Nondimensional buckling loads of unsymmetric laminated conical shells

B. C. 层数	10°		20°		30°		60°		
	本文	有限元	本文	有限元	本文	有限元	本文	有限元	
简支	2	0.0685 (9)	0.0677	0.0698 (6)	0.0689	0.0674 (6)	0.0665	0.0694 (6)	0.7031
	4	0.1012 (6)	0.1004	0.1028 (6)	0.1043	0.1063 (5)	0.1053	0.1127 (5)	0.1132
	6	0.1076 (6)	0.1085	0.1096 (6)	0.1087	0.1122 (5)	0.1109	0.1188 (4)	0.1191
		0.1107 (6)	0.1098	0.1145 (6)	0.1121	0.1165 (5)	0.1157	0.1240 (4)	0.1232
固支	2	0.0768 (8)	0.0724	0.0782 (6)	0.0784	0.0768 (6)	0.0772	0.0810 (6)	0.0821
	4	0.1210 (6)	0.1207	0.1238 (6)	0.1234	0.1276 (5)	0.1263	0.1224 (4)	0.1289
	6	0.1295 (6)	0.1280	0.1311 (6)	0.1316	0.1345 (5)	0.1342	0.1363 (4)	0.1366
		0.1340 (6)	0.1383	0.1379 (6)	0.1365	0.1453 (4)	0.1424	0.1440 (4)	0.1428

表2 加筋壳的外压屈曲载荷值 (kPa)

Tab. 2 Buckling pressures of stiffened shells (kPa)

试件 编号	试验结果 [5]		文 [5] 的计算值	本文结果	
	环向波数	p_{ij} 试验		TFM	有限元
圆筒壳-1	4	1043	1150	1150	1167
圆筒壳-2	4	956.1	1088	1088	1102
圆锥壳-1	5~6	934.6	1006	1007	995.3

3 结论

本文利用渐近分布传递函数方法建立了复合材料圆锥壳振动与稳定性问题的分析模型。根据给出的算例结果, 可以得出该方法是合理可行的。

该方法适合于不同锥壳模型, 并对于一些复杂边界条件问题、中间带支撑问题、变锥度及阶梯变厚度问题, 本方法均能提供形式统一、编程简便的渐近解析解法, 便于进行数值仿真。

大量的数值算例表明, 该方法与有限元法相比, 具有更高的数值计算精度, 特别是在截面应力和应变计算方面。这主要是基于如下两个原因: 一是本方法对每一个锥壳段都能给出高精度的渐近解; 二是本方法不仅直接求解得到位移, 也同时直接得到位移的各阶导数, 即应力和应变可以同步从控制微分方程的解得到。而不必像有限元那样, 需要对位移再求导数才能得到应力和应变。

本文所选用的小参数 ϵ 具有收敛速度快的特点。对于较短和锥度不大的圆锥壳, 一般只需前两阶摄动解, 就能得到具有很高数值精度的解, 其结果与采用大量有限元单元的结果比较, 二者非常一致。

参考文献

- 雷勇军, 周建平. 圆锥壳自由振动传递函数解. 上海力学, 1998, 31 (3): 325~243
- Zhou Jianping (周建平), Lei Yongjun (雷勇军). Asymptotic Transfer analysis of conical shells. AIAA Journal, 1998, 36 (5): 848~854
- Zhou Jianping (周建平), Yang B. A distributed transfer function method for analysis of cylindrical shells. AIAA Journal, 1995, 33 (9): 1698~1708
- Sivadas K R and Ganesan N. Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness. Journal of Sound and Vibration, 1991, 148 (3): 477~491
- 徐孝诚. 碳-环氧树脂复合材料三角形网格加劲的总体稳定性. 宇航学报, 1987, 3: 22~28