国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第6期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 6 1999

一类多维双重时序 AR(1)-MA(q) 模型的平稳性*

谢新艳

(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　讨论了一类多维双重时序 AR(1)-MA(q) 模型的二阶平稳性问题。通过导出一组线性方程组,给出了这类模型二阶平稳的显式充分条件和必要条件,为验证模型的二阶平稳性提供了一个可行的途径。

关键词　双重时序模型, AR(1)-MA(q) 模型, 二阶平稳性

分类号　O211.61

The stationanrity of a Dimensional Doubly Stochastic AR(1)-MA(q) Model

Xie Xinyan

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　This article discusses the second order stationarity of a dimensional doubly stochastic AR(1)-MA(q) model. By developing a group of linear equations, the explicit necessary & sufficient conditions of the stationarity for this model have presented. lt is a feasible method to test the second order stationarity of this model.

Key words　doubly stochastic time series model, AR(1)-MA(q) model, second order stationarity

双重时序模型的概念,首先由瑞典学者 D. Tjøstheim[1] 于 1986 年提出。它的内容非常丰富,几乎包括了文献中的大部分非线性以及其它时序模型。但由于它的非线性特性,对它的一般形式的研究是比较困难的,目前讨论得较多的是 AR(1)-MA(q) 形式的双重时序模型。文献[2][3] 已解决了一维 AR(1)-MA(q) 模型的平稳解问题,而对于多维 AR(1)- MA(q) 模型的研究还较少,文[4] 中曾给出过它的二阶平稳的一个显式充分条件。

多维 AR(1)-MA(q) 模型的一般形式为:

$$X_t = \Phi_t X_{t-1} + U_t \tag{1}$$

$$\Phi_t = A_0 + \theta_t + A_1\theta_{t-1} + \cdots + A_{t-q}\theta_{t-q} \tag{2}$$

其中$\{x_t\}$为 m 维的随机向量,$\{U_t\}$为 m 维的 i. i. d. 白噪声向量,$\{\Phi_t\}$为 $m\times m$ 的随机矩阵,$\{\theta_t\}$为 $m\times m$ 维的 i. i. d. 矩阵白噪声,$\{\theta_t\}$与$\{U_t\}$相互独立,且满足 $EX_tU_s^T = 0, s > t$ 时。

本文所讨论的多维 AR(1)-MA(q) 模型除了满足(1)(2) 式外,还满足如下条件:

$$\theta_t = \begin{pmatrix} e_t & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e_t \end{pmatrix}_{m\times m} \quad \{e_t\} \text{ 为 i. i. d. 白噪声序列} \tag{3}$$

本文主要是讨论满足(3) 式的一类多维 AR(1)-MA(q) 模型的二阶平稳性,给出模型二阶平稳的充分条件和必要条件。通过导出一组线性方程组,从而使条件显式地表达出来。

2　AR(1)-AM(q) 模型的二阶平稳性

为叙述简便计,先考虑 $q = 2$ 时模型的二阶平稳性。对于这种模型,我们有如下结论:

定理 1 设(3) 中的$\{e_t\}$满足

$$Ee_t^{2j-1} = \delta^{(2j-1)} = 0, Ee_t^{2j} = \delta^{(2j)} < \infty, j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

* 1999 年 2 月 20 日收稿
作者: 谢新艳, 女, 1973 年生, 硕士

(1) 如果

$$\rho(H) < 1 \tag{5}$$

则满足条件(3)的多维 AR(1)-MA(2)模型为二阶平稳解的, 其中 $\rho(H)$ 表示矩阵 H 的绝对值最大的特征根的绝对值, H 为 $15m^2$ 阶方阵, 它由下面一组差分方程组的系数确定:

$$\begin{aligned} W_n(i,j) = {} & (\delta^{(i)}A_0 \leftarrow A_0 + \delta^{(i+1)}A_0 \leftarrow I_m + \delta^{(i+1)}I_m \leftarrow A_0 + \delta^{(i+2)}I_m \leftarrow I_m)W_{n-1}(j,0) \\ & + (\delta^{(i)}(A_0 \leftarrow A_1 + A_1 \leftarrow A_0) + \delta^{(i+1)}(A_1 \leftarrow I_m + I_m \leftarrow A_1)) \\ & W_{n-1}(j+1,0) + \delta^{(i)}A_1 \leftarrow A_1W_{n-1}(j+2,0) \\ & + (\delta^{(i)}(A_0 \leftarrow A_2 + A_2 \leftarrow A_0) + \delta^{(i+1)}(A_2 \leftarrow I_m + I_m \leftarrow A_2))W_{n-1}(j,1) \\ & + \delta^{(i)}(A_1 \leftarrow A_2 + A_2 \leftarrow A_1)W_{n-1}(j+1,1) + \delta^{(i)}A_2 \leftarrow A_2W_{n-1}(j,2) \end{aligned} \tag{6}$$

$W_n(i,j)$ 为 m^2 维的列向量, $i=0,1,2,3,4$, 而 $j=0,1,2$。按第 $1+i+5j$ 个分块列向量为 $W_n(i,j)$ 构成一个 $15m^2$ 维的列向量 W_n, 把(6)式写为矩阵形式, 即得系数矩阵 H。

(2) 若满足条件(3)的多维 AR(1)-MA(2)模型为二阶平稳序列, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}^{\tau} H^n \Sigma \tilde{S} < \infty \tag{7}$$

其中 $\tilde{S} = ((\mathrm{vec}(I_m)^{\tau}, \cdots, (\mathrm{vec}I_m)^{\tau})^{\tau}15m^2$ 维的列向量, Σ 为 $15m^2$ 阶的对角矩阵, 其第 $1+i+5j$ 个对角块为 $\delta^{(i)}\delta^{(j)}I_{m^2}$。

证明 (1) 记 $\triangle_{n+1}^t = \prod_{k=1}^{n+1}(\Phi_{t-k+1} \leftarrow \Phi_{t-k+1})$, 约定 $\triangle_0^t = I_{m^2}$

$$W_n^t(i,j) = \mathrm{vecE}(e_t^i e_{t-1}^j \Phi_t \cdots \Phi_{t-n+1} \Phi_{t-n+1}^{\tau} \cdots \Phi_t^{\tau}) = \mathrm{E}[e_t^i e_{t-1}^j \triangle_n^t]\mathrm{vec}I_m \tag{8}$$

把 $\Phi_t = A_0 + A_1\theta_{t-1} + A_2\theta_{t-2} + \theta_t$ 代入(7)式, 经计算, 得到与(6)式相同的一个等式, 只需在(6)式中把 $W_n(i,j)$ 改为 $W_n^t(i,j)$, 把 $W_{n-1}(i,j)$ 改为 $W_{n-1}^{t-1}(i,j)$ 即可。从而 $W_n^t = HW_{n-1}^{t-1}$, H 由(6)式决定。依此递推, 得 $W_n^t = H^nW_0^{t-n}$。而 $W_0^{(t-n)}(i,j) = \mathrm{vec}Ee_{t-n}^i e_{t-n-1}^j \triangle_0^{t-n} = \delta^{(i)}\delta^{(j)}\mathrm{vec}I_{m^2}$, 易见此式与 t、n 均无关, 从而 W_n^t 与 t 无关, 不妨记为 W_n。这样有

$$W_n = H^nW_0 \tag{9}$$

如果 $\rho(H) < 1$, 由文[3]中引理 2.2 知, $\sum_{n=1}^{\infty} W_n < \infty$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(0,0) < \infty$。从而 $\mathrm{Etr}\Phi_t \cdots \Phi_{t-n+1}\Phi_{t-n+1}^{\tau} \cdots \cdots \Phi_t^{\tau} < \infty$, 由文[4]中引理知, $\{X_t\}$ 为二阶矩过程, 下证 $\{X_t\}$ 也为二阶平稳的。为此只需证明 $EX_tX_t^{\tau}$ 与 t 无关。因为 $\rho(H) < 1$, 反复迭代(1)式, 有

$$X_t = U_t + \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_t \cdots \Phi_{t-k+1})U_{t-k} \tag{10}$$

上式右边是 L^2 收敛的。这样, 计算 $\{X_t\}$ 的方差阵, 有 $\mathrm{vecE}X_tX_t^{\tau} = \mathrm{vec}\Sigma + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(0,0)\mathrm{vec}\Sigma$, 可见 $\mathrm{E}X_tX_t^{\tau}$ 与 t 无关, 从而 $\{X_t\}$ 为二阶平稳的。这样, 证明了(1)的结论成立。

(2) 若 $\{X_t\}$ 为二阶平稳的, 由[4]中引理知, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Etr}\Phi_t \cdots \Phi_{t-n+1}\Phi_{t-n+1}^{\tau} \cdots \Phi_t^{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,0) < \infty$ 下证

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,0) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{t}W_n(i,j) < \infty, i = 0,1,2,3,4, j = 0,1,2, \tag{11}$$

由(6)式, 有

$$(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}(W_n(2i,0) - \delta^{(2i)}W_n(0,0) = (\delta^{(2i+2)} - \delta^{(2)}\delta^{(2i)}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_{n-1}(0,0)$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,0) < \infty, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(2i,0) < \infty$$

记 $Y_t = \Phi_t - A_1\theta_{t-1}$, $Z_t = \Phi_{t-1} - \theta_{t-1}$, 则

$$W_n(0,2j) = E\{[\delta^{(4+2j)}A_1 \leftarrow A_1 + \delta^{(2+2j)}A_1 \leftarrow Y_tZ_t + \delta^{(2+2j)}Y_tZ_t \leftarrow A_1 + \delta^{(2j)}(Y_t \leftarrow Y_t)$$
$$(Z_t \leftarrow Z_t) + \delta^{(2j+2)}(A_1Z_t + Y_t) \leftarrow (A_1Z_t + Y_t)]\Phi_{t-2} \leftarrow \Phi_{t-2}\cdots\Phi_{t-n+1} \leftarrow \Phi_{t-n+1}\}\mathrm{vec}I_m \qquad (13)$$

由 Cauchy 不等式易知: $c = \delta^{(4)}/(\delta^{(2)})^2 > 1$, 任取 $1/c < \epsilon < 1$,

$$W_n(0,0) = \mathrm{E}\{[(c - 1/\epsilon)(\delta^{(2)})^2A_1 \leftarrow A_1 + \epsilon(\delta^{(2)}/\epsilon A_1 + Y_tZ_t) \leftarrow (\delta^{(2)}/\epsilon A_1 + Y_tZ_t) + (1-\epsilon)$$
$$(Y_t \leftarrow Y_t)(Z_t \leftarrow Z_t) + \delta^{(2)}(A_1Z_t + Y_t) \leftarrow (A_1Z_t + Y_t)(\Phi_{t-2} \leftarrow \Phi_{t-2})\cdots(\Phi_{t-n+1} \leftarrow \Phi_{t-n+1})\}]\mathrm{vec}I_m$$
$$(14)$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,0) < \infty, \forall t \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}$$
$$\mathrm{E}[(Y_t \leftarrow Y_t)(Z_t \leftarrow Z_t)(\Phi_{t-2} \leftarrow \Phi_{t-2})\cdots(\Phi_{t-n-1} \leftarrow \Phi_{t-n+1})]\mathrm{vec}I_m < \infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}E[((A_1Z_t + Y_t) \leftarrow (A_1Z_t + Y_t))(\Phi_{t-2} \leftarrow \Phi_{t-2})\cdots(\Phi_{t-n+1} \leftarrow \Phi_{t-n+1})]\mathrm{vec}I_m < \infty$$

上式结合(13)、(14)知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,0) < \infty \forall t \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,2j) < \infty \qquad (15)$$

而

$$(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(i,j) \le \frac{1}{2}((\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(2i,0) + (\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,2j))$$

由(12), (15) 结合上式知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(0,0) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}W_n(i,j) < \infty, , i = 0,1,2,3,4, j = 0,1,2$$

这样证明了(3.11)。因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{S}^{\tau}W_n < \infty$, 其中 $\tilde{S} = ((\mathrm{vec}I_m)^{\tau}, \cdots, (\mathrm{vec}I_m)^{\tau})^{\tau}$ 为 $15m^2$ 维的列向量。把(9)代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{S}^{\tau}H^nW_0 < \infty \qquad (16)$$

记 Σ 为 $15m^2$ 阶的对角矩阵, 其第 $1+i+5j$ 个对角块为 $\delta^{(i)}\delta^{(i)}I_{m^2}$, 则 $W_0 = \Sigma\tilde{S}$, 这样由(16)有(7)成立。

对于一维的情形, 在文[3]中看到(5)也是一个必要条件, 当 $q=0$ 时, 可以证明这个结论对这类多维双重时序模型也成立, 这就是下面的推论。

推论 1 若 $\{X_t\}$ 为满足条件(3)的多维 AR(1)-MA(0) 模型为二阶平稳序列, 则(5)式也成立。

证明 若 $\{X_t\}$ 为二阶平稳的, 由上述定理的(2)知, (7)成立。此时 $q=0$, (7)中的 $\tilde{S} = \mathrm{vec}I_m$, $\Sigma = I_{m^2}$, 从而(7)化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}H^n(\mathrm{vec}I_m) < \infty \qquad (17)$$

而由(6)知, 当 $q=0$ 时,

$$H_n = (A_0 \leftarrow A_0 + \delta^{(2)}I_{m^2})^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^k(\delta^{(2)})^{n-k}A_0^k \leftarrow A_0^k \qquad (18)$$

上式代入(17)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\delta^{(2)})^{n-k}(\mathrm{vec}I_m)^{\tau}(A_0^k \leftarrow A_0^k)(\mathrm{vec}I_m) < \infty \qquad (19)$$

由于 $\mathrm{tr}A_0^k(A_0^k)^{\tau} = \mathrm{vec}I_m)^{\tau}A_0^k \leftarrow A_0^k(\mathrm{vec}I_m)$, 记 $A_0^k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,,m}$, 则 $\mathrm{tr}A_0^k(A_0^k)^{\tau} = \sum_{i,j=1}^{m}(a_{ij}^{(k)})^2$

代入(19)式易知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\delta^{(2)})^{n-k}(a_{ij}^{(k)})2 < \infty \quad i,j = 1,\cdots,m \qquad (20)$$

因此由(20)式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\delta^{(2)})^{n-k} a_{ij}^{(k)} a_{rs}^{(k)} < \infty \quad i,j,r,s = 1,\cdots,m \tag{21}$$

易知$A_0^k \leftarrow A_0^k$中的元素均为$a_{ij}^{(k)}a_{rs}^{(k)}$的形式，从而由(18)、(21)知，$\sum_{n=1}^{\infty} H^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\delta^{(2)})^{n-k} A_0^k \leftarrow A_0^k < \infty$，即(3.5)成立。

但当$q \geq 1$时，要使(5)式成为一个必要条件，必须有$\sum_{n=1}^{\infty} H^n < \infty$，而(7)式成立能否保证这个条件也成立，还有待进一步的探讨。由于$q \geq 1$时，H 中有$A_i \leftarrow A_j(i \neq j)$形式的分块，不能象上述推论中逐个讨论$\sum_{n=1}^{\infty} H^n$的元素的收敛性。

3　AR(1)-MA(q)模型的平稳性

对于满足(3)式的一类多维AR(1)-MA(q)模型，用同样的论证方法，可以得到类似的结论：

定理 2　在定理 1 的条件下，

(1) 若$\rho(D) < 1$，则满足(3)式的多维AR(1)-MA(q)模型是二阶平稳的。其中D为fm^2阶方阵，$f = (2q+1)!!$，D由下列一组差分方程组的系数确定：

$$\begin{aligned}
V_n(i_0, i_1, \cdots, i_{q-1}) = {} & (\delta^{(i0)} A_0 \leftarrow A_0 + \delta^{(i0+1)} A_0 \leftarrow I_m + \delta^{(i_0+1)} \\
& I_m \leftarrow A_0 + \delta^{(i_0+2)} I_m \leftarrow I_m) V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{q-1}, 0) \\
& + \sum_{j=1}^{q-1} (\delta^{(i_0)} A_0 \leftarrow A_j + \delta^{(i_0)} A_j \leftarrow A_0 + \delta^{(i_0+1)} I_m \leftarrow I_m) V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{j-1}, i_{j+1}, i_{j+1}, \cdots, i_{q-1}, 0) \\
& + \sum_{j=1}^{q-1} \delta^{(i_0)} A_j \leftarrow A_j V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{j-1}, i_{j+2}, i_{j+1}, i_{q-1}, 0) \\
& + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k<j}}^{q-1} \delta^{(i_0)} A_k \leftarrow A_j + A_j \leftarrow A_k) V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_{k+1}, \cdots, i_{j-1}, i_{j+1}, i_{j+1}, \cdots, i_{q-1}, 0) \\
& + (\delta^{(i_0)} A_q \leftarrow A_0 + \delta^{(i_0)} A_0 \leftarrow A_q + \delta^{(i_0+1)} I_m \leftarrow I_m) V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{q-1}, 1) \\
& + \delta^{(i_0)} \sum_{j=1}^{q-1} (A_q \leftarrow A_j + A_j \leftarrow A_q) V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{j-1}, i_{j+1}, i_{j+1}, \cdots, i_{q-1}, 1) + \delta^{(i0)} A_q \leftarrow A_q V_{n-1}(i_1, \cdots, i_{q-1}, 2)
\end{aligned}$$

$V_n(i_0, i_1, \cdots, i_{q-1})$为$m^2$维的列向量，按第$1 + i_0 + 2qi_1 + (2q-2)i_2 + \cdots + 5i_{q-1}$个分块为$V_n(i_0, i_1, , i_{q-1})$组成$fm^2$维列向量$V$。

(2) 若满足(3)式的$\{X_t\}$是二阶平稳的，则$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}^{\tau} D^n \Sigma \tilde{S} < \infty$，其中$\tilde{S}$和$\Sigma$按定理 2(2)的相同方法构造。

4　结束

本文给出了满足(3)式的一类多维AR(1)-MA(q)模型二阶平稳的充分条件和必要条件。在一维情形[3]，定理 1 和定理 2 中的充分条件也是必要条件，但在多维情形，本文只对$q = 0$时证明了定理中的充分条件也是必要条件，而当$q \geq 1$时，要使(5)成为一个必要条件，还有待进一步探讨。

参考文献

1　tjøstheim D. some doubly stochastic time series models. J. Time Series Anal, 1986, 7(1): 51～73

2　pourahamadi M. on stationarity of the solution of a doubly stochastic model. J. Time Series Anal, 1986, 7(2): 123～131

3　卢祖帝．关于双重时序 AR-MA 模型存在平衡解的充要条件．应用数学学报, 1994, 17(3): 374～387

4　李元, 杜金观．双重随机向量模型的平稳解．应用数学学报, 1991, 14(2): 241～249