

文章编号: 1001-2486 (2000) 02-0007-04

# 气动力辅助异面变轨可达范围的判别方法\*

林西强, 张育林

(国防科技大学航天与材料工程学院 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 航天器进行气动力辅助异面变轨时, 确定可达范围(变轨结束时的倾角和升交点赤经)是一个十分重要的问题。文中利用坐标变化法, 得到了由初始轨道倾角为 0 时的倾角改变量, 确定任意初始倾角下可达范围的公式, 使求解大为简化。

**关键词:** 气动力辅助变轨; 可达性; 坐标变换

**中图分类号:** V412.4      **文献标识码:** A

## Attainability Domain of Aeroassisted Orbital Plane Change

LIN Xi-qiang, ZHANG Yu-lin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Determining the attainability domain of aeroassisted orbital plane change, i. e. the inclination and the longitude of the ascending node, is a very important problem. Using coordinates transformation, the analytic formula calculating the attainable domain with arbitrary initial inclination was obtained in this paper. Because only the inclination change with 0 degree initial inclination is needed, the formula can make the calculation greatly simpler.

**Key words:** aeroassisted orbital plane change; attainability domain; coordinates transformation

自从 1962 年 London<sup>[1]</sup> 提出利用大气辅助变轨可以节省能量以来, 在这方面国内外已做了大量的工作<sup>[2,3]</sup>。在用气动力辅助异面变轨时, 人们往往关心的是变轨结束后所能得到的倾角和升交点赤经, 即可达性问题。对于给定的航天器参数和控制律, 变轨结束时的倾角和升交点赤经与初始轨道倾角有关, 因此对不同的初始倾角要分别进行计算。这要求解一个两点边值问题或一个非线性规划问题, 然而十分困难。绝大多数文献在进行气动力异面辅助变轨研究时, 都假设初始轨道位于赤道面, 得到了实际上是相对于初始轨道的倾角范围, 而回避了一般性问题。因此有必要解决如何简单准确地确定出可达范围的问题。

文献 [4] 指出了确定可达范围的重要性, 但仅研究了在给定初始条件下气动力辅助平面变轨的情况。文献 [5] 利用坐标变换法, 找到了终了轨道实际要素和相对于初始轨道要素量值之间的关系, 进而指出, 为了使轨道的实际倾角变化最大, 就必须使其相对于初始轨道的倾角变化最大, 从而从理论上说明了一般文献中假设初始轨道在赤道面上进行优化的合理性。本文将坐标变换的方法, 用于可达性研究, 推导出了利用某种航天器相对于初始轨道(假设初始轨道倾角为 0 进行计算的轨道)的倾角改变量范围, 计算任意初始倾角时可达范围的公式。

### 1 可达范围确定公式

图 1 给出了初始轨道、终了轨道和赤道三者之间的相互关系, 其中  $i$  是倾角,  $\Omega$  是升交点赤经,  $u$  是纬度幅角, 表示某一时刻航天器的升交点角距。上标撇号表示终了轨道相对于初始轨道的量值, 下标 0 表示初始轨道相对于赤道的量值, 即初始轨道的实际值, 无上下标的量则表示终了轨道相对于赤道的量值。图中, A 是航天器的开始变轨位置, B、C 分别是初始和终了轨道的升交点, E 是航天器变轨结束后的位置, F 是春分点。由球面三角公式可得

\* 收稿日期: 1999-08-09

基金项目: 国家高技术航天领域项目(863-2)

作者简介: 林西强(1974-), 男, 国防科技大学博士生。

$$\cos i = \cos i_0 \cos i' - \sin i_0 \sin i' \cos(\Delta\Omega + u_0) \quad (1)$$

$$\cos i = \cos i_0 \cos i' + \sin i_0 \sin i' \cos \Delta\Omega \quad (2)$$

注意到, 当  $(\Delta\Omega + u_0) \in [0, \pi]$  和  $(\Delta\Omega + u_0) \in [\pi, 2\pi]$  时,  $\cos(\Delta\Omega + u_0)$  都取遍了其值域, 而  $\Delta\Omega$  也分别属于  $[0, \pi]$  和  $[\pi, 2\pi]$ , 因此以下仅对  $(\Delta\Omega + u_0), \Delta\Omega \in [0, \pi]$  进行讨论, 而另一半关于  $\pi$  对称。

设已知  $i \in [i_{\min}, i_{\max}]$ , 对于任意给定的初始轨道倾角  $i_0$ , 首先确定终了轨道倾角  $i$  的范围。由 (1) 易得对任一  $i$ , 有

$$i_{\min} = i_0 - i \quad (3)$$

$$i_{\max} = \min(i_0 + i, 2\pi - i_0 - i) \quad (4)$$

故对所有的  $i$ , 有

$$i_{\min} = \begin{cases} 0 & i_0 \in [i_{\min}, i_{\max}] \\ \min(i_0 - i_{\max}, i_0 - i_{\min}) & \text{否则} \end{cases} \quad (5)$$

$$i_{\max} = \begin{cases} \pi & \pi \in [i_0 + i_{\min}, i_0 + i_{\max}] \\ \max(\min(i_0 + i_{\max}, 2\pi - i_0 - i_{\max}), \min(i_0 + i_{\min}, 2\pi - i_0 - i_{\min})) & \text{否则} \end{cases} \quad (6)$$

再确定对任一  $i \in [i_{\min}, i_{\max}]$  时  $\Delta\Omega$  的范围, 即可得到可达范围。为此, 先确定  $i$  范围, 有如下定理。

定理: 对于任一  $i \in [i_{\min}, i_{\max}]$ , 有

$$i_{\max} = \min(i_{\max}, i + i_0, 2\pi - i - i_0) \quad (7)$$

$$i_{\min} = \max(i_{\min}, i - i_0) \quad (8)$$

证明: 将  $\cos(\Delta\Omega + u_0)$  表示成  $i$  的函数  $f(i)$

$$\cos(\Delta\Omega + u_0) = f(i) = \frac{\cos i_0 \cos i - \cos i'}{\sin i_0 \sin i'} \quad (9)$$

易见  $f(i) = 1$  时, 有  $i = i - i_0$  或  $i = 2\pi - i - i_0$ ,  $f(i) = -1$  时, 有  $i = i_0 - i$  或  $i = i + i_0$ 。分四种情况:

$$① i - i_0 > 0, i + i_0 < \pi$$

此时,  $\lim_{i \rightarrow 0^+} f(i) = +$ ,  $\lim_{i \rightarrow \pi^-} f(i) = -$ , 在  $[0, \pi]$  内, 仅有  $f(i - i_0) = 1, f(i + i_0) = 1$ , 因此

$$i_{\max} = i + i_0, i_{\min} = i - i_0 \quad (10)$$

$$④ i - i_0 < 0, i + i_0 > \pi$$

此时,  $\lim_{i \rightarrow 0^+} f(i) = -$ ,  $\lim_{i \rightarrow \pi^-} f(i) = +$ , 在  $[0, \pi]$  内, 仅有  $f(i_0 - i) = -1, f(2\pi - i - i_0) = 1$ ,

因此

$$i_{\max} = 2\pi - i - i_0, i_{\min} = i_0 - i \quad (11)$$

$$(四) i - i_0 > 0, i + i_0 > \pi$$

此时,  $\lim_{i \rightarrow 0^+} f(i) = +$ ,  $\lim_{i \rightarrow \pi^-} f(i) = +$ , 在  $[0, \pi]$  内, 仅有  $f(i - i_0) = 1, f(2\pi - i - i_0) = 1$ 。

为了考察区间  $[i - i_0, 2\pi - i - i_0]$  中点的情况, 取  $i = \pi - i_0$ , 有

$$f(\pi - i_0) = \frac{-\cos^2 i_0 - \cos i'}{\sin^2 i_0} = 1 - \frac{1 + \cos i'}{\sin^2 i_0} < 1 \quad (12)$$

因此

$$i_{\max} = 2\pi - i - i_0, i_{\min} = i - i_0 \quad (13)$$

$$⑤ i - i_0 < 0, i + i_0 < \pi$$

此时,  $\lim_{i \rightarrow 0^+} f(i) = -$ ,  $\lim_{i \rightarrow \pi^-} f(i) = -$ , 在  $[0, \pi]$  内, 仅有  $f(i_0 - i) = -1, f(i + i_0) = -1$ 。为

了考察区间  $[i_0 - i, i + i_0]$  中点的情况, 取  $i = i_0$ , 有

$$f(i_0) = \frac{\cos^2 i_0 - \cos i'}{\sin^2 i_0} = \frac{1 - \cos i'}{\sin^2 i_0} - 1 > -1 \quad (14)$$

因此

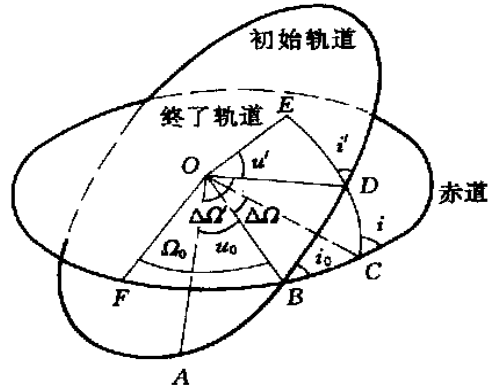


图1 轨道关系简图

Fig. 1 Sketch of three orbits

$$i_{\max} = i + i_0, i_{\min} = i_0 - i \quad (15)$$

综合<sup>1</sup> ~ <sup>1/4</sup> 可得

$$i_{\max} = \min(i + i_0, 2\pi - i - i_0), i_{\min} = i_0 - i \quad (16)$$

再考虑到  $i \in [i_{\min}, i_{\max}]$ , 即可得定理结论。

由 (2) 得

$$\cos \Delta\Omega = \frac{\cos i - \cos i_0 \cos i}{\sin i_0 \sin i} = g(i) \quad (17)$$

可见  $\Delta\Omega$  和  $i$  有相同的单调性, 因此

$$\Delta\Omega_{\max} = \begin{cases} \cos^{-1}[f(i_{\max})] & g(i_{\max}) > -1 \\ \pi & g(i_{\max}) = -1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\Delta\Omega_{\min} = \begin{cases} \cos^{-1}[f(i_{\min})] & g(i_{\min}) < -1 \\ 0 & g(i_{\min}) = -1 \end{cases} \quad (19)$$

至此, 我们得到了已知  $i$  范围, 确定任意初始轨道倾角  $i_0$  时的可达范围公式, 对逆行轨道同样适用。

## 2 举例

为了清楚形象地说明可达范围, 我们给出了几种典型的可达范围图, 如图 2~8 中黑区所示。

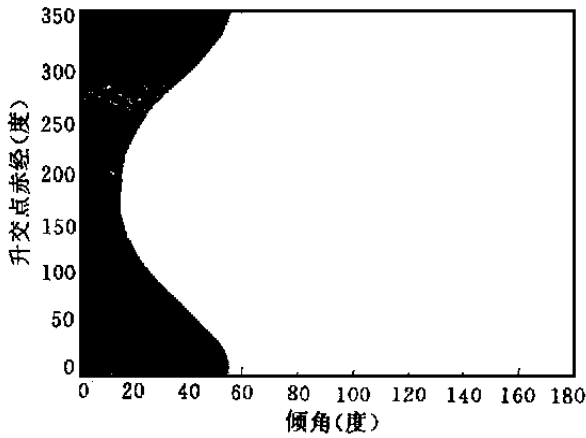


图2  $i \in [0^\circ, 35^\circ], i_0 = 20^\circ$  的可达范围

Fig. 2 Attainable domain of  $i \in [0^\circ, 35^\circ], i_0 = 20^\circ$

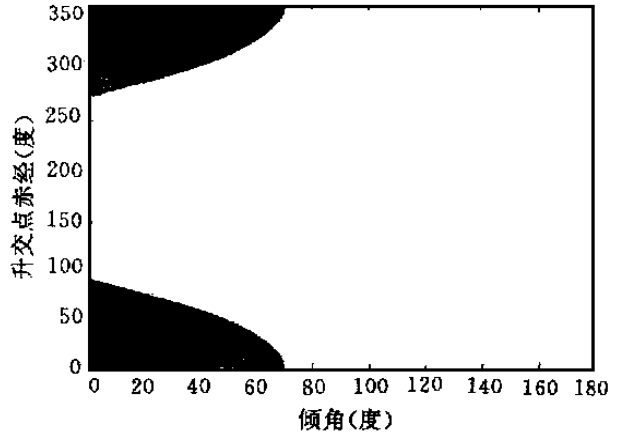


图3  $i \in [0^\circ, 35^\circ], i_0 = 35^\circ$  的可达范围

Fig. 3 Attainable domain of  $i \in [0^\circ, 35^\circ], i_0 = 35^\circ$

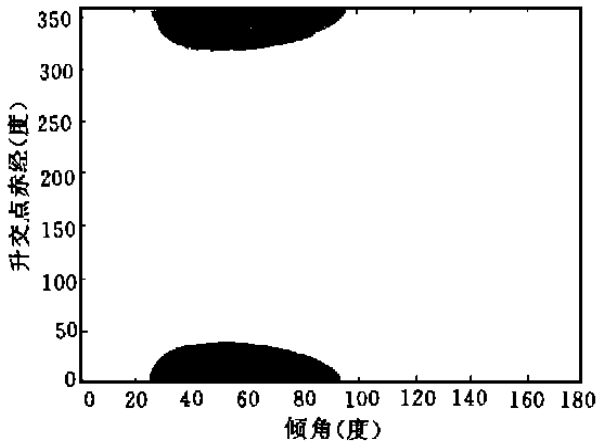


图4  $i \in [0^\circ, 35^\circ], i_0 = 60^\circ$  的可达范围

Fig. 4 Attainable domain of  $i \in [0^\circ, 35^\circ], i_0 = 60^\circ$

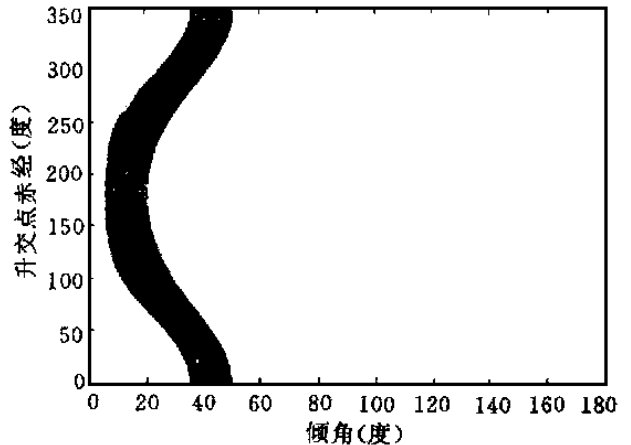


图5  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 15^\circ$  的可达范围

Fig. 5 Attainable domain of  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 15^\circ$

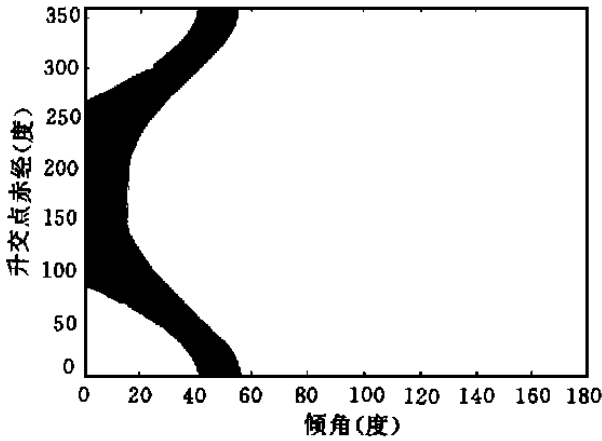


图6  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 20^\circ$  的可达范围  
 Fig. 6 Attainable domain of  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 20^\circ$

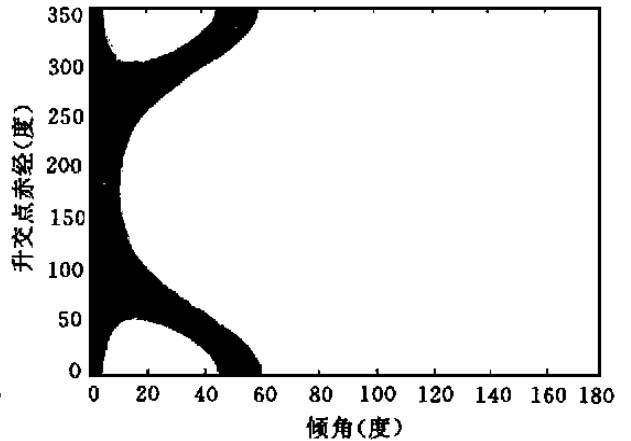


图7  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 25^\circ$  的可达范围  
 Fig. 7 Attainable domain of  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 25^\circ$

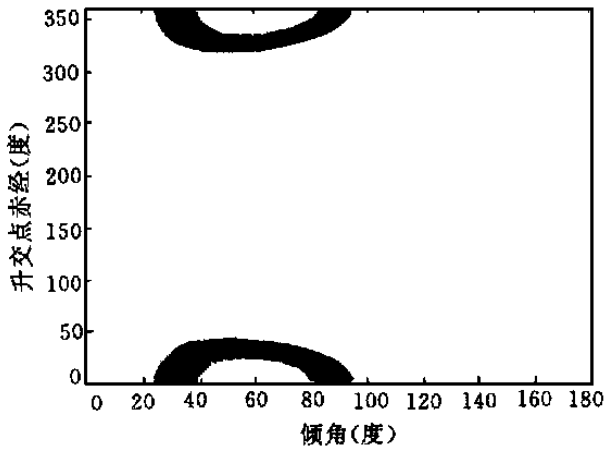


图8  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 60^\circ$  的可达范围  
 Fig. 8 Attainable domain of  $i \in [20^\circ, 35^\circ], i_0 = 60^\circ$

其中图2~4分别取 $i_0$ 等于20度, 35度和60度,  $i \in [0^\circ, 35^\circ]$ , 图5~8分别取 $i_0$ 等于15度, 20度, 25度和60度,  $i \in [20^\circ, 35^\circ]$ 。

参考文献:

[1] London H S. Change of satellite orbit plane by aerodynamic maneuvering. [J] J. Aerospace Sci., March 1962: 323~332.  
 [2] Mease K D. Optimization of aeroassisted orbital transfer: current status. [J] J. Astronautical Sci., 1988, 36 (1/2): 7~33.  
 [3] Miele A. Recent advances in the optimization and guidance of aeroassisted orbital transfers. [J] Acta Astronautica, 1996, 38 (10): 747~768.  
 [4] Guelman M. Planar aeroassisted attainability domain. [J] J. Guidance Control Dynamics, 1997, 20 (3): 422~427.  
 [5] Mease K D, Lee J Y and Vinh N X. Orbital changes during hypersonic aerocruise. [J] J. Astronautical Sci., 1988, 36 (1/2): 103~137.