

文章编号: 1001-2486 (2000) 02-0020-05

# 用高阶高精度 WENO 格式求解二维激波附面层干扰流场\*

徐万武, 王正华, 侯中喜, 王承尧

(国防科技大学航天与材料工程学院 湖南 长沙 410073)

**摘 要:** 采用时间相关法求解二维 Navier-Stokes 方程, 数值模拟二维平板层流附面层与激波干扰流场, 给出了物面压力分布和应力分布。计算中, 对流项空间导数的差分离散采用高阶高精度 WENO 格式, 时间方向采用具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法, 粘性项采用二阶中心差分。所得压力分布和应力分布与国外实验结果吻合较好, 计算实践表明高阶 WENO 格式具有优异的性能, 应用前景广阔。

**关键词:** ENO 格式; WENO 格式; TVD Runge-Kutta 法; 激波附面层干扰

**中图分类号:** V211.3 **文献标识码:** A

## High Order Accurate WENO Schemes for the 2D Flowfield of Shock-Boundary Layer Interaction

XU Wan-wu, WANG Zheng-hua, HOU Zhong-xi, WANG Cheng-yao

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defence Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The time-dependent numerical method is used to solve Navier-Stokes equations and simulate the 2D shockwave planar boundary-layer interaction. In our computation, the high order accuracy WENO schemes are applied to pursuing numerical approximation of the inviscid spatial derivative. To step on time, we make use of the Runge-Kutta methods with property of TVD. The viscous term is discretized by two-order central difference scheme. The resultant pressure and shear distribution agree with those of the experiments. The numerical practice shows the WENO schemes are robust and strong indeed, and have a vast range of prospects for application.

**Key words:** ENO schemes; WENO schemes; TVD Runge-Kutta method; shockwave boundary-layer interaction

在现代航空航天领域会碰上大量求解超音速与高超音速流场的问题。此时除局部区域(如超音速钝头头部区域或物面边界层区域)外, 整个流场均为超音速流场, 控制方程的次特征(除去二阶粘性项的特征)为双曲型, 流场内可能会产生复杂的波系结构。用差分方法数值模拟求解这类问题时, 差分格式的激波捕捉能力至关重要。传统格式中一阶格式数值粘性过大, 激波抹平严重, 二阶格式又会在激波附近引起振荡; 80 年代兴起的 TVD 格式型, 虽然激波捕捉能力不错, 但精度不高(一般为二阶), 而且在极值点会降为一阶。在计算激波附面层干扰这类问题时, 要求差分格式既要高分辨率、无振荡地捕捉激波, 又要在物面附近准确计算粘性项, 并且这两点在干扰区必须同时满足, 用传统的 TVD 格式求解这类问题有困难, 所以有必要寻找性能更好的高阶高精度格式。张涵信在文献<sup>[1]</sup>中指出, 在求解全 NS 方程时, 要想准确计及粘性的影响, 网格粗细与格式精度是相互关联的, 采用高阶高精度格式可大大降低对网格尺寸的要求。WENO 格式就是近年来兴起的高阶高精度 ENO 格式的最新发展。

ENO 格式最初由 Harten、Osher 等人于 1987 年提出<sup>[2]</sup>, 全名叫高阶高精度基本无振荡格式。理论分析和数值试验证明, ENO 格式不但能基本无振荡地准确捕捉激波, 而且在光滑区可统一达到高精度; 与 TVD 格式不同, ENO 格式在极值点附近不降阶, 而且 ENO 格式从二阶向三阶和更高阶推广时无本质困难, 仅计算量适当增加而已。ENO 格式一经提出就引起了计算流体力学同行的广泛注意, 经众多学者的探索, 在九十年代又有新的发展。根据 Shu 在文献<sup>[3]</sup>中的提法, Harten 的 ENO 格式称为有限体积 ENO, 它用守恒变量的单元平均值进行函数重构(function reconstruction)。后来人们提出用通量进行函数重构的方法, 称为有限差分 ENO, 对于二维三维问题, 如果采用高阶 ENO 格式, 有限差分 ENO

\* 收稿日期: 1999-09-18

作者简介: 徐万武(1975-), 男, 硕士生。

会比有限体积 ENO 计算效率高。为了提高精度, 增强收敛性及提高程序的并行计算能力, 人们又提出了 WENO 格式<sup>[3]</sup>。一般来说, 每种 ENO 格式都有其对应的 WENO 格式, 与所对应的 ENO 格式相比, WENO 格式的性能更稳定, 对定常问题收敛性更好, 在解的光滑区精度更高, 而在间断处相当于 ENO 格式。另外, 在时间推进上, Shu 提出用具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法<sup>[4]</sup>。

目前, 一方面 ENO 和 WENO 格式还在发展之中, 另一方面它们已成功用于二维复杂流场的计算, 三维流场的计算也已实现, 其应用前景广阔。本文采用五阶 WENO 格式数值模拟求解了二维平板激波附面层干扰流场, 给出了物面压力分布和应力分布, 并与实验及二阶 NND 格式<sup>[5]</sup>在相同网格下所得结果进行了比较。

## 1 控制方程 (一般坐标系下) 和差分格式

在一般坐标系  $(\xi, \eta)$  下, 控制方程为

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} \quad (1)$$

雅可比矩阵

$$\hat{A} = \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{U}} \quad \hat{B} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{U}}$$

$\hat{A}$  所对应的左右特征矩阵和特征值对角阵分别为:

$$L_\xi, R_\xi, \Lambda_\xi$$

$\hat{B}$  所对应的左右特征矩阵和特征值对角阵分别为:

$$L_\eta, R_\eta, \Lambda_\eta$$

方程 (1) 的半离散差分格式为:

$$\frac{dU_{i,j}}{dt} = - \frac{1}{\Delta \xi} (\mathbf{E}_{i+1/2,j} - \mathbf{E}_{i-1/2,j}) - \frac{1}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_{i,j+1/2} - \mathbf{F}_{i,j-1/2}) + \mathbf{H} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{H}$  为粘性部分, 采用二阶中心差分,  $\hat{U}_{i,j}$  为  $\hat{U}(\xi, \eta, t)$  的数值近似。计算数值通量  $\mathbf{E}_{i+1/2,j}$  时, 固定  $j$  不变, 沿  $\xi(i)$  方向扫描选点; 计算数值通量  $\mathbf{F}_{i,j+1/2}$  时, 固定  $i$  不变, 沿  $\eta(j)$  方向扫描选点, 其算法与一维 WENO 完全相同。本文采用特征变量重构的 WENO 格式, 在计算  $\mathbf{E}_{i+1/2,j}$  时, 先由  $(i, j)$  和  $(i+1, j)$  这两点的物理量的简单平均或 Roe 平均得到单元边界  $(i+1/2, j)$  处的雅可比矩阵  $\hat{A}_{i+1/2,j}$ , 简记为  $\hat{A}$ , 再得到  $\hat{A}$  的左右特征矩阵  $L_\xi, R_\xi$ 。将  $L_\xi, R_\xi$  看作常矩阵, 用  $L_\xi$  左乘方程 (1), 对得到的新的矢量方程的每一个标量方程分别用 WENO 算法得到数值通量, 再用  $R_\xi$  左乘由所有标量方程的数值通量组成的矢量, 就得到  $\mathbf{E}_{i+1/2,j}$ ; 同理可得  $\mathbf{F}_{i,j+1/2}$ 。应该看到, 对每一个单元边界  $i+1/2$  都要重新计算  $\hat{A}$  和  $L_\xi, R_\xi$ , 用  $L_\xi$  左乘方程 (1) 时, 只需选边界  $i+1/2$  邻近的几点, 具体选点范围由格式阶数确定。若为空间  $2k-1$  阶格式, 则选点范围为

$$(i-k+1, j), \dots, (i, j), \dots, (i+k, j)$$

本文采用五阶 WENO 格式,  $k=3$ 。

时间方向采用具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法离散。设方程 (1) 半离散形式为:

$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{L}(\hat{U}) \quad (3)$$

用具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法离散方程 (2):

$$\hat{U}^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} (\alpha_l \hat{U}^{(l)} + \Delta t \beta_{il} L(\hat{U}^{(l)})) \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{U}^{(0)} = \hat{U}^{(n)}, \hat{U}^{(n+1)} = \hat{U}^{(m)}$$

其中,  $m$  为时间精度;

当  $m=2$  时

$$\hat{U}^{(1)} = \hat{U}^{(n)} + \Delta t L(\hat{U}^{(n)})$$

$$\hat{U}^{(n+1)} = \frac{1}{2}(\hat{U}^{(n)} + \hat{U}^{(l)} + \Delta t L(\hat{U}^{(l)}))$$

当  $m = 3$  时

$$\hat{U}^{(1)} = \hat{U}^{(n)} + \Delta t L(\hat{U}^{(n)})$$

$$\hat{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\hat{U}^{(n)} + \frac{1}{4}\hat{U}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\hat{U}^{(1)})$$

$$\hat{U}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\hat{U}^{(n)} + \frac{2}{3}\hat{U}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\hat{U}^{(2)})$$

因为这里研究的是定常问题, 所以计算中取  $m = 2$ 。

## 2 计算结果及分析

计算网格均取为  $(81 \times 81)$ , 实验数据来自文献<sup>[6]</sup>, 作比较的 NND 格式见文献<sup>[5]</sup>。

(1) 图 1(a) 为平板激波反射, 用五阶 WENO 格式解欧拉方程, 以检验高阶 WENO 格式的激波捕捉能力。图 1(b) 为 NND 格式的计算结果, 可以看出, 五阶 WENO 格式的激波捕捉能力比 NND 格式要强。

(2) 无分离激波附面层干扰

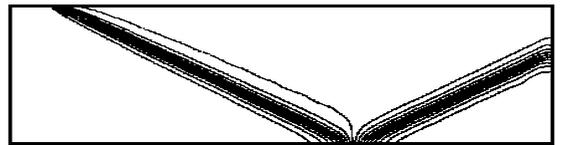
来流条件:  $M\alpha = 2.0$ ,  $Re_{shk} = 284000$ ,  $T = 293K$ ,  $\theta = 31.3471^\circ$ ; 其中  $Re_{shk}$  是以无粘时激波在平板上的反射点距平板前沿的距离  $x_{shk}$  为特征尺度的雷诺数,  $x_{shk} = 0.16m$ 。图 2(a) 为五阶 WENO 所得流场等压线分布, 图 2(b) 给出了在网格数及物面网格加密程度相同的情况下, NND 格式所得等压线分布图。图 4(a)、(b) 分别为五阶 WENO 和 NND 格式所得摩擦应力、压强分布。图 6(a) 为干扰区速度型。

(3) 激波附面层干扰引起分离

来流条件:  $M\alpha = 2.0$ ,  $Re_{shk} = 296000$ ,  $T = 293K$ ,  $x_{shk} = 0.16m$ , 激波角  $\theta = 32.5850^\circ$ 。图 3(a)、(b) 为五阶 WENO 和 NND 格式所得流场等压线分布。图 5(a)、(b) 分别为物面摩擦应力分布和压强分布, 实验中分离区的负摩擦应力取零。图 6(b) 为干扰区速度型。



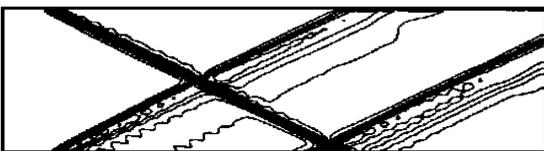
(a) 5--order weno



(b) NND scheme

图 1 等压线分布, 五阶 WENO 格式与 NND 格式求解欧拉方程

Fig. 1 Pressure contours Euler Equations



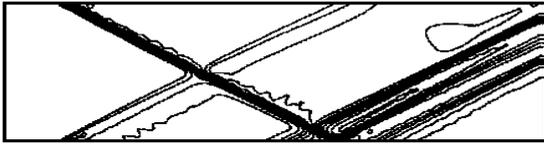
(a) 5--order weno



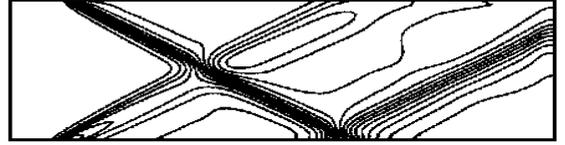
(b) NND scheme

图 2 等压线分布, 五阶 WENO 格式与 NND 格式求解 NS 方程  $Re_{shk} = 284000$

Fig. 2 Pressure contours,  $Re_{shk} = 284000$



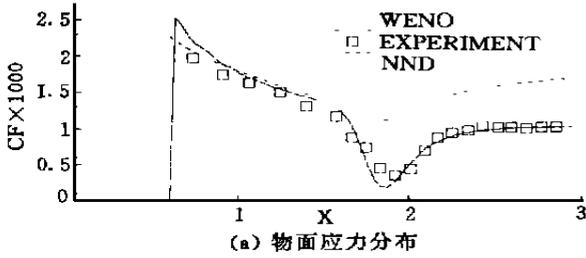
(a) 5—order weno scheme



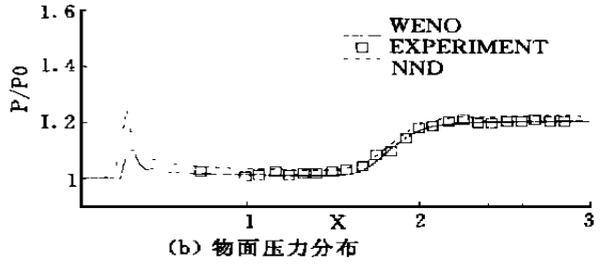
(b) NND scheme

图3 等压线分布, 五阶WENO 格式与 NND 格式求解 NS 方程,  $Re_{shk} = 296000$

Fig. 3 Pressure contours,  $Re_{shk} = 296000$



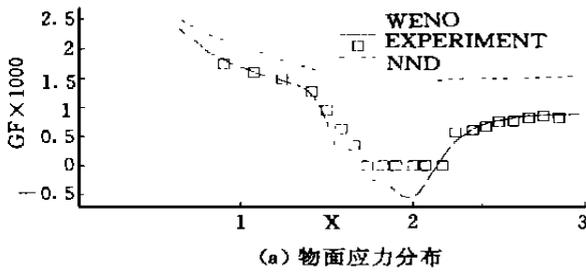
(a) 物面应力分布



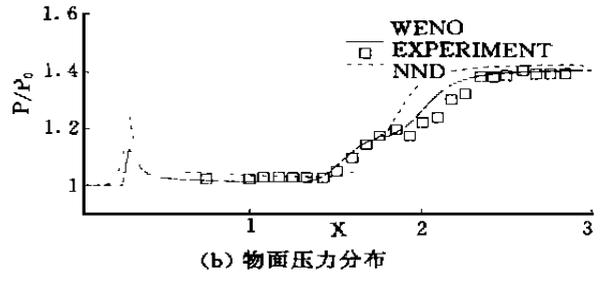
(b) 物面压力分布

图4 WENO 和 NNS 格式所得摩擦应力与压力分布,  $Re_{shk} = 284000$

Fig. 4 Friction and pressure distribution,  $Re_{shk} = 284000$



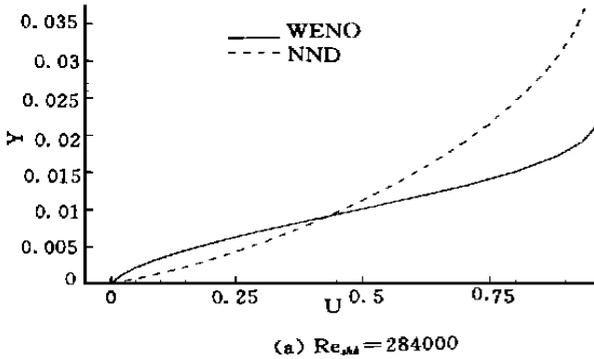
(a) 物面应力分布



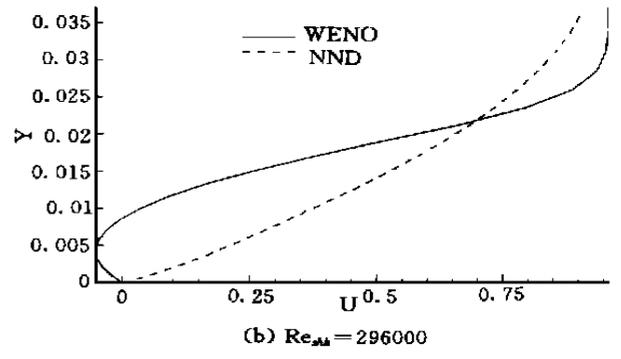
(b) 物面压力分布

图5 WENO 和 NNS 格式所得摩擦应力与压力分布,  $Re_{shk} = 296000$

Fig. 5 Friction and pressure distribution,  $Re_{shk} = 296000$



(a)  $Re_{shk} = 284000$



(b)  $Re_{shk} = 296000$

图6 激波附面层干扰区速度型

Fig. 6 Velocity Profile in the interaction zone

### 3 结论

本文研究了层流附面层与激波的相互干扰,在激波较弱时无分离现象发生,如算例(2)的结果,激波较强时在干扰区产生分离,物面有负摩擦应力产生,如图5(a)所示。在网格数及物面加密程度均相同的情况下,NND格式在算例(3)下没有发生分离,WENO格式的结果除干扰区略有偏差外,物面摩擦应力与压力分布与实验吻合较好。计算实践表明高阶高精度WENO格式确实具有优异的性能,可用于求解复杂流场。

### 参考文献:

- [1] 张涵信. 网格与高精度差分计算问题. 力学学报 [J]. 1999, 31 (4).
- [2] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy S R. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, [J]. JCP 71, 1987: 231 ~ 303.
- [3] Shu Chi Wang. Essentially Non-oscillatory and Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservative Laws [J]. NASA/CR, 19980007543.
- [4] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [J], Journal of Computational Physics. v77, 1988: 439 ~ 471.
- [5] 张涵信. 无波动无自由参数的耗散差分格式 [J], 空气动力学学报. 1988, 6 (2).
- [6] MacCormak R W, Baldwin B S. A numerical Method for Solving the Navier-Stokes Equations with Application to Shock-Boundary Layer Interaction [C]. AIAA, 1975.