文章编号: 1001-2486 (2000) 02-0110-05

跳测度的可料对偶投影*

金治明

(国防科技大学理学院, 湖南 长沙　410073)

摘　要: 证明了跳测度 ν 的 Doob-Meyer 分解 $\nu = m + \pi$ 中, π 即为跳测度的可料对偶投影, 也是 $\nu - \pi$ 的鞅特征。

关键词: 随机测度; 可料对偶投影; 跳测度

中图分类号: O224　　文献标识码: A

The Predictable Dual Brojection of Jump Measure

JIN Zhi-ming

(College of Science. National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper it is proved that the π is the predictable dual projection of jump measure ν and is the martingale character of m, where $\nu = m + \pi$ is DoobMeyer decomposition of ν.

Key words: random measure; predictable dual projection; jump measure

在金融数学中, 当所讨论的市场价格为不连续过程时, 需要研究跳过程与相应的跳测度。本文研究了与跳过程相应的跳测度的 Doob-Meyer 分解中出现的可料连续增过程就是跳测度的可料对偶投影, 也是与之联系的鞅测度的鞅特征。

1　随机测度的可料对偶投影

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间, $(E, B(E))$为Lusin 可测空间。定义 $\tilde{\Omega} = \Omega \times R_+ \times E$, $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \times \mathscr{B}(R_+) \times \mathscr{B}(E)$,

$$\tilde{\mathscr{O}} = \mathscr{O} \times \mathscr{B}(E), \tilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \times \mathscr{B}(E)$$

称 $\tilde{\mathscr{O}}, \tilde{\mathscr{P}}$ 分别为 $\tilde{\Omega}$ 上的可选, 可料 σ 代数, $\tilde{\Omega}$ 上 $\tilde{\mathscr{O}}, \tilde{\mathscr{P}}$ 可测函数为可选, 可料函数(这里特别用函数二字以示与通常过程的区别)。

1.1　定义　称 $\Omega, (\mathscr{B}(R_+ \times \mathscr{B}(E)))$ 上的非负函数 μ 为随机测度, 若

(1) 对每个 $\hat{\omega}$, $\mu(\omega, \cdot)$ 是 $\mathscr{B}(R_+) \times \mathscr{B}(\hat{E})$ 上的 σ 有限测度;

(2) 对每个 $B \in \mathscr{B}(R_+) \times \mathscr{B}(E)$, $\mu(\cdot, B)$ 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的随机变量。

对 $\tilde{B} \in \tilde{\mathscr{F}}$, 定义

$$\mathscr{M}_\mu(\tilde{B}) = \mathrm{E}\left[\int_{R_+ \times E} I_{\tilde{B}}(\omega, t, x)\mu(\omega, \mathrm{d}t, \mathrm{d}x)\right] \tag{1}$$

则 $\mathscr{M}_\mu$ 是$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$上的测度, 称之为由 μ 产生的测度。若 $\mathscr{M}_\mu(\tilde{\Omega}) < \infty$, 则称 μ 可积; 若 $\mathscr{M}_\mu$ 限于 $\tilde{\mathscr{O}}(\tilde{\mathscr{P}})$ 为 σ- 有限, 则称 μ 为可选(可料) σ- 可积。

随机测度概念是增过程的推广。事实上, 设 $A = (A_t(\omega))$ 为增过程, 取 $E = \{x_0\}$ 为单点集, 则

$$\mu(\omega, \mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \mathrm{d}A_t(\omega)\delta_{x_0}(dx)$$

就是随机测度, 且

* 收稿日期: 1999-08-03
作者简介: 金治明(1941-), 男, 教授。

$$\mu([0,t]\times E)=A_t.$$

设 $W\in\widetilde{\mathscr{F}}$,若对每个 $t\geq 0$,

$$\int_{[0,t]\times E} W\ \mathrm{d}\mu<\infty$$

规定过程 $W*\mu$ 为 $(W*\mu)_t=\int_{[0,t]\times E}W\,\mathrm{d}\mu$. 显然 $W*\mu$ 是一个有限变差过程。

对于 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 可测函数 X, 我们仍然可以定义它的可选(可料)投影,这只要分别用 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(R_+)\times\mathscr{B}(E)$,$\mathscr{O}$,$\mathscr{P}$ 代替原先过程投影理论中的 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(R_+)$,$\widetilde{\mathscr{O}}$,$\widetilde{\mathscr{P}}$。这里仍然用 ${}^{o}X$, ${}^{p}X$ 分别表示 X 的可选, 可料投影。

1.2　定义　设 μ 为随机测度, $\mathscr{M}$ 为由 μ 产生的测度, 如果对任意的非负有界可测函数 X, 有 $\tilde{E}_\mu(X)=\tilde{E}_\mu({}^{o}X)$ (相应地, $\tilde{E}_\mu(X)=\tilde{E}_\mu({}^{p}X)$), 则称 $\mathscr{M}$ 为可选(相应地, 可料)测度, 而 μ 为可选(可料)的随机测度。这里

$$\tilde{E}_\mu(X)=\mathrm{E}\left[\int_{R_+\times E}X(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right]\tag{2}$$

如果存在一个可料的随机测度(记为) μ^p, 使得对任意的有界可测函数 X, 有

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_\mu({}^{p}X)=\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mu^p}(X)$$

则称 μ^p 为 μ 的可料对偶投影。

1.3　引理　设 X 为有界可测函数, 则对一切可积的可选(相应地, 可料)随机测度 μ 有

$${}^{o}X=\tilde{\boldsymbol{E}}_\mu(X\mid\widetilde{\mathscr{O}})\ (\text{相应地},\ {}^{p}X=\tilde{\boldsymbol{E}}_\mu(X\mid\widetilde{\mathscr{P}}))$$

这里 $\tilde{E}_\mu$ 是相应于测度 $\mathscr{M}$ 的期望算子。

证明　由于 μ 可积且可选, 对 $H\in\widetilde{\mathscr{O}}$, 我们有

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E}I_H X\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\mathbf{E}\int_{R_+\times E}{}^{o}(I_H X)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

$$=\mathbf{E}\int_{R_+\times E}I_H\ {}^{o}X\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

从而 ${}^{o}X=\mathbf{E}_\mu(X\mid\widetilde{\mathscr{O}})$。关于可料投影的证明是类似的。

设 $\mu(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 为随机测度, 记

$$\mu(t,\mathrm{d}x)=\mu(\omega,[0,t],\mathrm{d}x)$$

则对于固定的 $\mathrm{d}x\in\mathscr{B}(E)$, 它是一个增过程。

2　跳过程与跳测度

设 $D(0,\infty]$ 为定义在 $(0,\infty]$ 上右连左极函数全体。称随机过程 N 为跳过程, 是指它 a.s. 为适应可测的右连左极过程, 其样本函数属于 $D(0,\infty]$, 且在任意的有限区间内只有有限个跳, 即

$$N_t=N_0+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n I_{[[\tau_n,\infty[[}(t,\omega)\tag{3}$$

其中 $\tau_0=0_n$, $T_n\uparrow\infty$, $\xi_n\neq 0\Leftrightarrow\tau_n<\infty$,

$$\tau_n=\inf\{t>\tau_{n-1}:N_t\neq N_{\tau_{n-1}}\}$$

为过程的跳时,

$$\xi_n=\triangle N_{\tau_n}I_{(\tau_n<\infty)}$$

为 N 的第 n 次跳度, 其中 $\triangle N_{\tau_n}=N_{\tau_n}-N_{\tau_n-}$, 称

$$\nu(\mathrm{d}t;\mathrm{d}t)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{(\tau_n;\xi_x)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)I_{(\tau_n<\infty)}\tag{4}$$

为 N 的跳测度。定义 $x*\nu$ 为一个随机过程, 它在 t 时的值为

$$(x * \nu)_t = \iint x\,\nu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) \tag{5}$$

于是跳过程可表达为

$$N_t = N_0 + (x * \nu)_t \tag{6}$$

对于任意的 $A\in\mathscr{B}(E)\setminus S_\epsilon$ (S_ϵ 为中心在 0, 半径为 ϵ 的球),

$$\nu(t,A) = \iint \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{i\le t} I_{(\xi_n\in A)} \tag{5}$$

是一个取非负整值的随机测度, 固定 $A\in\mathscr{B}(E)$, 作为随机过程它是 $\mathscr{F}_t$ 适应可测的。

当 $N\in\mathscr{M}^2$, 且为正则鞅, 即对于任意的停时列 $\tau_n\uparrow\tau$, 有 $\mathrm{E}N(\tau_n)\to\mathrm{E}N(\tau)$. 若记 $\mathscr{B}_0$ 为闭包不含 0 的 Borel 集的全体, 对于 $A\in\mathscr{B}_0$, $\nu(t,A)$ 有定义。考虑任意的有界停时 $\sigma,\tau\le T$ 以及分割 $\sigma=\tau_0\le\tau_1\le\cdots\le\tau_n=\tau$, $\lambda=\max_{1\le k\le n}|\tau_k-\tau_{k-1}|$. 因为

$$\sum_{\substack{|\triangle N(s)|>\epsilon\\ \sigma<s\le\tau}} |\triangle N(s)|^2 \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} |N(\tau_k)-N(\tau_{k-1})|$$

从而

$$\mathbf{E}\{\sum_{\substack{|\triangle N(s)|>\epsilon\\ \sigma<s\le\tau}} |\triangle N(s)|^2 \mid \mathscr{F}_\sigma\} \le \mathbf{E}\{|N(\tau)-N(\sigma)|^2 \mid \mathscr{F}_\sigma\}$$

如果 $A\subseteq\{x: |x|\ge\epsilon\}$, 则

$$\mathbf{E}\{\nu(\tau,A)-\nu(\sigma,A)\mid\mathscr{F}_\sigma\} \le \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{E}\{|N(\tau)-N(\sigma)|^2\mid\mathscr{F}_\sigma\}$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{E}\{<N>(\tau) - <N>(\sigma)\mid\mathscr{F}_\sigma\} < \infty$$

式中 $<N>$ 为平方可积鞅 Doob-Meyer 分解中的可料增过程。由 N 的正则性可知 $<N>$ 的连续性, 由此即知 $\nu(t,A)$ 的正则性。

对于 $N\in\mathscr{M}^2$, 我们可用局部化的方法证明, 对于正则的局部平方可积鞅 N, (4) 式所定义的跳测度也具有正则性。

显然 $\nu(t,A)$ 是一个正则增过程, 则是右连续类 DL 下鞅, 由 Doob-Meyer 分解, 有

$$\nu(t,A) = m(t,A) + \pi(t,A) \tag{7}$$

其中 $m(t,A)$ 为右连续鞅, 而 $\pi(t,A)$ 为可料的连续增过程。取局部化序列 $\tau_n=\inf\{t\le T: \nu(t,A)\ge n$ 或 $\pi(t,A)\ge n\}$, 并令

$$\nu_n(t,A) = \nu(t\wedge\tau_n,A),\ \pi_n(t,A) = \pi(t\wedge\tau_n,A)$$
$$m_n(t,A) = m(t\wedge\tau_n,A) \tag{8}$$

则 $\nu_n(t,A)\le n$, $\pi_n(t,A)\le n$, $|m_n(t,A)|\le n$, 可见 $m\in\mathscr{M}^2_{loc}$. 可以证明 $\nu^2(t,A)$ 为局部正则下鞅。事实上, 考虑任意的单调增的停时列 $\tau'_n\uparrow\tau'\le T$ (常数), 记

$$m_*(t) = m_k(t,A),\ \nu_*(t) = \nu_k(t,A),\ \pi_*(t) = \pi_k(t,A)$$

则

$$\mathbf{E}(m_*^2(\tau') - m_*^2(\tau'_n)) \le 2k\mathbf{E}[\nu_*(\tau')-\nu_*(\tau'_n)) + \pi_*(\tau')-\pi_*(\tau'_n)]$$

由于 $\pi(t)$ 的连续性以及对于有界停时的一致可积性, 而 $\nu_*(t)$ 具有正则性, 得到 $\mathbf{E}m_*^2(\tau'_n)\to\mathbf{E}m_*^2(\tau')$, 从而 $m_*^2(t)$ 为局部正则下鞅。

记正则下鞅 $m_*^2(t,A)$ 的 Doob-Meyer 分解中的连续的可料增过程为 $\alpha_*(t,A)$。我们将证明 $\alpha_*(t)=\pi_*(t)$, 我们称 α 为 m 的鞅特征。首先给出两个引理。

1.4 引理 设 $\xi(t)=\mu(t)+\alpha(t)$, $0\le t\le T$, 其中 $\mu(t)$ 为 $\mathscr{F}_i$ 鞅, $\alpha(t)$ 为连续的零初值适应可积增过程。考虑 $[0,T]$ 的分割, $0=t_0<t_1,\cdots,t_n$, 以 λ 表示分割的直经, 记

$$\alpha_\lambda = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{E}(\Delta\xi(t_k)\mid\mathscr{F}_{t_{k-1}})$$

其中 $\Delta\xi(t_k)=\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})$, 则

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{E}\,|\alpha_\lambda - \alpha(T)| = 0 \tag{9}$$

特别当 $\mathbf{E}\alpha^2(T) < \infty$时,

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \alpha(T))^2 = 0 \tag{10}$$

证明　显然有

$$\alpha_\lambda = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta\alpha(t_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) \tag{11}$$

首先设 $\mathbf{E}\alpha^2(T) < \infty$, 由于

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \alpha(T))^2 &= \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta\alpha_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) - \Delta\alpha_k\Big]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\big[\mathbf{E}(\alpha_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) - \Delta\alpha_k\big]^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\Delta\alpha_k^2 - \mathbf{E}[\mathbf{E}(\Delta\alpha_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]^2 \\ &\le \mathbf{E}\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k^2 \le \mathbf{E}[\sup_k \Delta\alpha_k\ \alpha(T)]\end{aligned}$$

因为$\sup_k \Delta\alpha_k \le \alpha(T)$, 而 $\mathbf{E}\alpha^2(T) < \infty$, 由控制收敛定理得到

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \alpha(T))^2 = 0.$$

对一般情形, 设 $\beta(t) = \alpha(t)\wedge n$, $\gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, 则 $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 均为连续的零初值适应可积增过程, 且 $\beta(t)\le n$。因此

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{E}\,|\beta_\lambda - \beta(T)|^2 = 0 \tag{12}$$

其中

$$\beta_\lambda = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta\beta(t_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1})$$

注意到

$$E\,|\alpha(T) - \alpha_\lambda| \le \mathbf{E}[\,|\beta(T) - \beta_\lambda| + \gamma(T) + (\alpha_\lambda - \beta_\lambda)] \tag{13}$$

以及

$$0 \le \mathbf{E}(\alpha_\lambda - \beta_\lambda) = \mathbf{E}\gamma(T) \le E\alpha(T)I_{(\alpha(T)>n)}$$

从而当 n 充分大, 可使上式充分小; 固定 n 后, 再令 $\lambda\to 0$, 由(12)式可知, (13)式趋于0。

1.5　引理

1) 设 X 为 L^2 鞅(即$\forall t>0$, $\mathbf{E}X_t^2 < \infty$), 且它的鞅特征$\langle X\rangle_t$ 连续, 则有

$$\langle X\rangle_t = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta X(t_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) \tag{14}$$

其中, λ 为$[0,t]$的分割 $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = t$ 的直经。

2) 设 X_1, X_2 均为 L^2 鞅, 其互特征连续, 则

$$\langle X_1, X_2\rangle_t = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[(\Delta X_1(t_k)\Delta X_2(t_k))\,|\,\mathscr{F}_{t_{k-1}})] \tag{15}$$

其中 $\Delta X(t_k) = X(t_k) - X(t_{k-1})$

证明　对于任意固定的 $t>0$, 有 Doob-Meyer 分解

$$X^2(t) = m(t) + \langle X\rangle_t$$

其中 $m(t)$ 为鞅, 由于鞅特征$\langle X\rangle_t$ 连续, 由引理1.4可知引理的1)成立, 而引理的后半部分由互特征的定义及1)得到。

3　跳测度的可料对偶投影

现在回到引理1.4前提出的问题。

1.6　定理 $m(t,A)$ 的鞅特征为 $\pi(t,A)$.

证明　承接(8)的记号, 由引理1.5可见

$$\alpha_*(t) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[\Delta m_*^2(t_k)\quad \mathscr{F}_{k-1}]$$

其中λ为$[0,t]$的分割$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$的直经。我们有

$$\mathbf{E}\quad\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[\Delta m^2(t_k)\quad\mathscr{F}_{i_{t-1}}] - \pi_*(t)$$

$$\leq \mathbf{E}\quad\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta m_*^2(t_k) - \Delta\nu_*(t_k)\quad\mathscr{F}_{i_{t-1}}) + \mathbf{E}\quad\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta\nu_*(t_k)\quad\mathscr{F}_{t_{k-1}}) - \pi_*(t)$$

由$\pi_*(t)$的定义及引理1.4知,上式的最后一项趋于0。而其第一项

$$\mathbf{E}\quad\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\Delta m_*^2(t_k) - \Delta\nu_*(t_k)\quad\mathscr{F}_{i_{t-1}})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\quad(\Delta m_*(t_k))^2 - \Delta\nu_*(t_k)$$

$$\leq \mathbf{E}\sum_{k=0}^{n}\quad(\Delta\nu_*(t_k))^2 - \Delta\nu_*(t_k) - 2\Delta\nu_*(t_k)\Delta\pi_*(t_k) + (\Delta\pi_*(t_k))^2$$

$$\leq \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}(\Delta\nu_*(t_k))^2 - \Delta\nu_*(t_k) + 2\max_k\Delta\pi_*(t_k)(\nu_*(t) + \pi_*(t))\Big]$$

上式中括号里的项不超过$5k^2$,且P-a.s.趋于0,故上式左端趋于0。从而$\alpha_*(t)=\pi_*(t)$,也即$m(t,A)$的鞅特征就是$\pi(t,A)$。

1.7 定理 设跳测度$\nu(t,A)$有分解式(7),则$\pi(t,A)$为跳测度$\nu(t,A)$的可料对偶投影。

证明 设

$$\phi(t,u) = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k I_{\Delta_k\times A_k}(t,u)$$

其中$\Delta_k=(t_{k-1},t_k]$, $0\leq t_0<t_1<\cdots<t_n$, $A_k\in\mathscr{B}(E)$, $\gamma_k\in\mathscr{F}_{i_{k-1}}$,且 $\gamma_k\quad\leq G$, Pa.s.(常数)由(7)式以及$m(t,A)$的鞅性质,立得

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E}\phi(t,x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \mathbf{E}\int_{R_+\times E}\phi(t,x)\pi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

利用极限的手段,不难验证对于有界可测的三元函数$\phi(\omega,t,x)$有

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E}\phi(t-,x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \mathbf{E}\int_{R_+\times E}\phi(t-,x)\pi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

从而对于有界的左连续函数$\phi(\omega,t,x)$有

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E}\phi(t,x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \mathbf{E}\int_{R_+\times E}\phi(t,x)\pi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \tag{16}$$

因此对于有界的可料函数$\phi(\omega,t,x)$,(16)式仍然成立。由于随机测度$\mu(t,\mathrm{d}x)$对于每个固定的$\mathrm{d}x\in\mathscr{B}(E)$为可料过程,则有

$$\tilde{E}_x(X) = \tilde{E}_x[\tilde{E}_x(X\quad\tilde{\mathscr{P}})] = \tilde{E}_x({}^pX) \tag{17}$$

由此可见,可料的随机测度是可料测度。这样,对于有界可测函数$X(\omega,t,x)$有

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E}X(\omega,t,x)\pi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \mathbf{E}\int_{R_+\times E}{}^pX(\omega,t,x)\pi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

$$= \mathbf{E}\int_{R_+\times E}{}^pX(\omega,t,x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \tag{18}$$

这表明$\pi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$为随机测度$\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$的可料对偶投影,即$\pi=\nu^p$。

参考文献:

[1] 何声武,汪嘉冈,严加安,半鞅与随机分析[M],科学出版社,1995.

[2] I.I.Gihman and A VSkorohod.The Theory of Stochastic Processes[M],SpringerVerlag,New York Inc,1979.