文章编号：1001-2486（2000）03-0084-06

应力-强度模型的 Bayes 可靠性分析*

张士峰

（国防科技大学机电工程与自动化学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：当应力、强度分别服从于正态分布、指数分布和 Weibull 分布时，分析了应力-强度模型的可靠性评估，着重讨论了无信息验前下的 Bayes 可靠性评估。仿真结果表明，无信息验前下的评估结论可以很好地用频率学派的观点来解释。

关键词：应力-强度模型；BAYES 分析；可靠性；无信息验前

中图分类号：TB114　　文献标识码：A

Bayesian Reliability Analysis for Stress-strength Models

ZHANG Shi-feng

（College of Mechatronics Engineering and Automation，Natinal Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract: The reliability for stress-strength models is analyzed when the stress and strength follow normal，exponential and Weibull distributions respectively. The discussions focus on Bayesian analysis adopting noninformative priors. The results of simulation show that the conclusion under noninformative priors can be explained according to the frequentist view.

Key words: stress-strength models；Bayesian analysis；reliability；noninformative priors

在可靠性工程中，应力-强度模型得到了广泛地研究。记 Y 表示系统的强度，X 表示系统所受的应力，当系统所受应力大于系统的强度时，系统失效，即系统的可靠性表示为

$$R = Rr\{X \leqslant Y\} \tag{1}$$

这个模型最早由 Birnbaum[1] 提出，并在许多领域，特别是在结构分析和航空工业中得到了广泛的应用。Basu[2] 和 Johnson[3] 总结了关于经典统计推断的许多结论。

本文主要从 BAYES 方法的观点来考虑应力-强度模型的可靠性问题，对于 BAYES 方法而言，很关键的一点就是要确定合理的验前分布，但是如果没有验前信息可以利用，一种比较客观的解决方法就是采用无信息验前分布。众所周知，最为常用的无信息验前分布是由 Jeffrey[4] 提出的，Jeffrey 验前在单参数情况下得到了广泛应用，但在多余参数存在的情况下却遇到了一些困难[5]。

1　正态分布模型的可靠性分析

1.1　方差相同时

假设系统所受应力和强度均服从正态分布，x_1，…，x_m 和 y_1，…，y_n 为相互独立的正态随机样本，并且 $x_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，参数 μ_1，μ_2，σ 均为未知，则有

$$R = \Phi\left[-(\mu_1 - \mu_2)/\sqrt{2}\sigma\right] \tag{2}$$

记 $\eta = \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$，则 R 和 η 是一一映射的，$\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

通过大量的仿真计算，Lee[6] 推荐使用如下无信息验前分布

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \sigma) \propto \sigma^{-1} \tag{3}$$

定理 1　假定应力、强度均服从正态分布，方差相同但未知，当获得应力、强度的试验样本后，若采用（3）式作为无信息验前分布，则 η 的验后密度函数和验后分布函数分别为

* 收稿日期：1999-09-10
基金项目：国家部委基金资助项目
作者简介：张士峰（1971-），男，博士生。

$$\pi(\eta \mid x, y, s) = \frac{\int_0^{\infty} \nu^{m+n-3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\nu^2 + \frac{mn}{m+n}(\nu z - \eta)^2\right\}\right] \mathrm{d}\nu}{\int_0^{\infty} \sqrt{2\pi \frac{(m+n)}{mn}}\, \nu^{m+n-3} \exp\left[-\frac{1}{2}\nu^2\right] \mathrm{d}\nu} \tag{4}$$

和

$$F(\eta \mid x, y, s) = \frac{\int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{\eta - \nu z}{\sqrt{m+n}} \sqrt{mn}\right) \nu^{m+n-3} \exp\left[-\frac{1}{2}\nu^2\right] \mathrm{d}\nu}{\int_0^{\infty} \nu^{m+n-3} \exp\left[-\frac{1}{2}\nu^2\right] \mathrm{d}\nu} \tag{5}$$

其中

$$x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i,\ y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i - x)^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - y)^2$$

$$z = \frac{x - y}{s}$$

证明　注意到参数 (μ_1, μ_2, σ) 的似然函数为

$$L(\mu_1, \mu_2, \sigma) = \frac{1}{\sigma^{m+n}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu_2)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

根据 BAYES 定理有

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \sigma \mid X, Y) \propto \frac{1}{\sigma^{m+n+1}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu_2)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

做变换 $\eta = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$, μ_2, σ, 则有

$$\pi(\eta, \mu_2, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{m+n}} \exp\left\{-\frac{(m+n)\left(\mu_2 - \frac{m(x - \eta\sigma) + ny}{m+n}\right)^2 + \frac{mn(y - x + \eta\sigma)^2}{m+n} + s^2}{2\sigma^2}\right\}$$

那么

$$\pi(\eta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\eta, \mu_2, \sigma)\, d\mu_2$$

$$= \frac{1}{\sigma^{m+n-1}} \exp\left\{-\frac{mn/(m+n)(y - x + \eta\sigma)^2 + s^2}{2\sigma^2}\right\}$$

令 $\nu = s/\sigma$, 则

$$\pi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\eta, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \propto \int_0^{\infty} \nu^{m+n-3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\nu^2 + mn/(m+n)(\nu z - \eta)^2\right\}\right] \mathrm{d}\nu$$

经过归一化后, 可以得到 η 的验后密度函数 (4) 式和验后分布函数 (5) 式。证毕。

例 1　假设系统所受的应力和强度均服从正态分布, 且方差相同, 现获得试验样本:

应力样本为:

1.5674, 0.3344, 2.1253, 2.2877, 0.8535, 3.1909, 3.1892, 1.9624, 2.3273, 2.1746

强度样本为:

4.8133, 5.7258, 4.4117, 7.1832, 4.8636, 5.1139, 6.0668, 5.0593, 4.9044, 4.1677

根据 (4) 式可以得到 R 的验后密度函数, 如图 1 所示。

同时, 给定置信水平 α, 可以根据 (5) 式得到 η 的置信上限, 记为 η_u, 由于可靠性 R 是关于 η 单调递减的, 所以可靠性 R 的置信下限为 $R_L = \Phi(-\eta/\sqrt{2})$。若令 $\alpha = 0.2$, 有 $\eta_u = -2.9335$, 此时可靠性的置信下限为 $R_L = 0.980974$。

为了说明这种无信息验前分布的合理性，从经典统计观点出发，比较可靠性置信下限覆盖“真值”的频率和名义概率(置信水平)，若两者非常接近，则表明这种方法所给出的置信下限是合理的。假设 $\mu_1=3$, $\mu_2=6$, $\sigma=1$, 从应力、强度的正态分布进行随机抽样，然后根据上述方法求解可靠性置信下限(置信水平 $\alpha=0.2$)，抽样1000次，可以算得覆盖率为0.804，这和名义概率 $1-\alpha=0.8$ 非常接近。

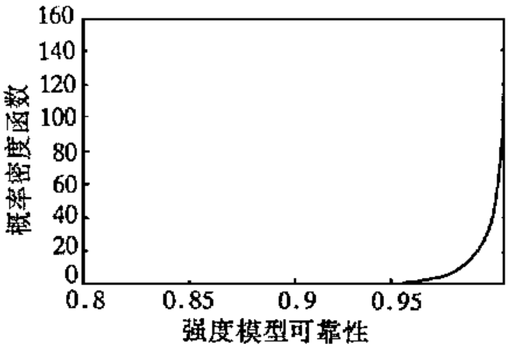

图1 正态分布时应力-强度模型可靠性的概率密度函数

Fig. 1 Probability density function of the reliability for stress-strength models under normal distribution

1.2 方差不同时

假设应力的随机样本 $x_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i=1, \cdots m$ 强度的随机样本 $y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $j=1, \cdots, n$, 且参数 μ_1, μ_2, σ_1 和 σ_2 均未知，则有

$$R=\Phi\left[-(\mu_1-\mu_2)/\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right] \tag{6}$$

记 $\eta=\dfrac{(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，则 θ 和 η 是一一映射的。

参数 μ_1, μ_2, σ_1 和 σ_2 的Jeffrey验前为

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \propto 1/(\sigma_1^2\sigma_2^2) \tag{7}$$

当 $m=n$ 时，Lee[6]推荐使用如下验前分布

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \propto (\sigma_1^3\sigma_2^3)^{-1}\sqrt{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^3+(\mu_1-\mu_2)^2(\sigma_1^4+\sigma_2^4)} \tag{8}$$

利用(8)式的验前分布所得到的参数 R 的BAYES置信下限包含“真值”的概率和名义概率(置信水平)非常接近，这是无信息验前分布的一个良好特性，称这种无信息验前分布为匹配验前。此时对应力-强度模型进行Bayes可靠性分析就需要利用数值方法进行。

2 指数分布模型的可靠性分析

Weibull分布是寿命数据分析中常用的分布类型，其概率密度函数为

$$f(x;\eta,\beta)=\frac{\beta x^{\beta-1}}{\eta^\beta}\exp\left[-(x/\eta)^\beta\right]I_{[x>0]} \tag{9}$$

其中 $I(\cdot)$ 为指示函数，$\eta>0$, $\beta>0$。记Weibull分布为 $W(\eta, \beta)$，当 $\beta=1$ 时，Weibull分布退化为指数分布，因此Weibull分布是指数分布的推广，具有递增、递减和恒定的失效率。假定系统所受应力 $X\sim W(\eta_1, \beta)$，强度 $Y\sim W(\eta_2, \beta)$，如果 β 已知，X^β 和 Y^β 为相互独立的指数分布变量，其尺度参数分别为 η_1 和 η_2，并且

$$R=Pr\{X\leqslant Y\}=Pr\{X^\beta\leqslant Y^\beta\}=\eta_2/(\eta_1+\eta_2)$$

考虑 β 已知，不妨假定 $\beta=1$，此时，系统所受的应力和强度均服从指数分布，参数 η_1 和 η_2 的共轭验前分布为

$$\pi(\eta_1, \eta_2) \propto \prod_{i=1}^{2}\left[\eta_i^{-(b_i+1)}\exp(-a_i/\eta_i)\right] \tag{10}$$

(10)式为两个相互独立的逆gamma分布，记为 $IG(a_1, b_1)$ 和 $IG(a_2, b_2)$。

定理2 假定应力、强度均服从指数分布，当获得应力、强度的试验样本后，若采用(10)式作为 (η_1, η_2) 的验前分布，则 R 的验后密度函数为

$$\pi(R\mid t_1, t_2) \propto R^{m+b_1-1}(1-R)^{n+b_2-1}(1-cR)^{-(m+n+b_1+b_2)} \tag{11}$$

其中 $t_1=\sum_{i=1}^{m}x_i$, $t_2=\sum_{j=1}^{n}y_j$, $c=1-(a_1+t_1)/(a_2+t_2)<1$。

证明 注意到参数 (η_1, η_2) 的似然函数为

$$L(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\eta_1^n \eta_2^n}\exp\left[-\left(\frac{t_1}{\eta_1} + \frac{t_2}{\eta_2}\right)\right]$$

根据 BAYES 定理有

$$\pi(\eta_1, \eta_2 \mid X, Y) \propto \eta_1^{-(b_1+1)} \eta_2^{(b_2+1)} \exp\left(-\frac{a_1+t_1}{\eta_1}\right)\exp\left(-\frac{a_2+t_2}{\eta_2}\right)$$

做变换 $R = \eta_2/(\eta_1+\eta_2)$，$\eta_2$，有

$$\pi(R, \eta_2) \propto \frac{(1-R)^{-(b_1+m+1)}}{R^{-(b_1+m-1)}} \eta_2^{(b_1+b_2+1+m+n)} \exp\left\{-\frac{1}{\eta_2}\left[\frac{R}{1-R}(a_1+t_1) + (a_2+t_2)\right]\right\}$$

此时，有

$$\pi(R) = \int_0^{\infty} \pi(R, \eta_2)\, d\eta_2 \propto R^{m+b_1-1}(1-R)^{n+b_2-1}(1-cR)^{-(m+n+b_1+b_2)}$$

证毕。

根据定理 2 中的 (11) 式可以求得 R 的 BAYES 估计 $E(\theta \mid t_1, t_2)$。为了得到 R 的置信区间，做如下的一对一变换 $r = (1-R)/(1-cR)$，则很容易证明 r 服从 Beta $(n+b_2, m+b_1)$，这样关于 r (或 R) 的置信区间就可以根据不完全 Beta 函数得到。

(10) 式为存在验前信息时的信息验前分布。然而如果没有验前信息可以利用时，就需要常用无信息验前分布。Fisher 信息矩阵为 $I(\eta_1, \eta_2) = \mathrm{Diag}(m\eta_1^{-2}, n\eta_2^{-2})$，即有

$$|I(\eta_1, \eta_2)|^{1/2} \propto (\eta_1\eta_2)^{-1}$$

则 Jeffrey 无信息验前分布为

$$\pi(\eta_1, \eta_2) \propto (\eta_1\eta_2)^{-1} \tag{12}$$

可以证明，Jeffery 无信息验前分布具有匹配验前的优良性质，其实 (12) 式是 (10) 式 $a_i \to 0$，$b_i \to 0$ 时的极限情况，因此，采用 Jeffery 无信息验前分布时关于 R 的 BAYES 统计推断结论可以由上面的结论自然推广。

例 2　假设系统所受的应力和强度均服从指数分布，现获得试验样本：

应力样本为：

7.3237，2.4974，3.6079，0.5754，1.3584，3.9212，19.9489，0.9837，4.0517，2.4272，

强度样本为：

11.6637，4.0706，15.1765，86.7880，45.1063，3.3353，4.3376，44.5470，5.6221，142.4594

采用无信息验前密度 (12) 式，根据 (11) 式可以得到 R 的验后密度函数，如图 2 所示。

同时，给定显著性水平 α，可以根据 Beta 分布得到 r 的置信上限，记为 r_u，由于可靠性 R 是关于 r 单调递减的，所以可靠性 R 的置信下限为 $R_L = \frac{1-r_u}{1-cr_u}$。若令 $\alpha = 0.2$，有 $r_u = 0.5944$，此时可靠性的置信下限为 $R_L = 0.8414$。

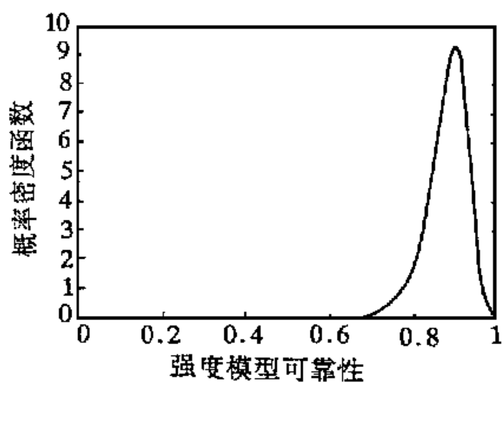

图 2　指数分布时应力- 强度模型可靠性的概率密度函数

Fig. 2　Probability density function of the reliability for stress- strength models under exponential distribution

下面利用覆盖率方法来说明这种置信下限的合理性。假设 $\eta_1 = 5$，$\eta_2 = 50$，从应力、强度的指数分布进行随机抽样，然后根据上述方法求解可靠性置信下限 (显著性水平 $\alpha = 0.2$)，抽样 1000 次，可以算得覆盖率为 0.797，这和名义概率 $1-\alpha = 0.8$ 非常接近。

3 Weibull 分布模型的可靠性分析

假设系统所受应力和强度均服从 Weibull 分布，应力样本 $x_1, \cdots, x_m$ 和强度样本 $y_1, \cdots, y_m$ 相互独立，并且 $x_i\ (i=1, 2, \cdots, m)$ 为服从于 $W(\eta_1, \beta)$ 的独立同分布随机样本，$y_j\ (j=1, 2, \cdots, n)$ 为服从于 $W(\eta_2, \beta)$ 的独立同分布随机样本，参数 η_1，η_2 和 β 均为未知，则

$$R = Pr\{X \leqslant Y\} = \eta_2^\beta/(\eta_1^\beta + \eta_2^\beta)$$

记 $a = m/(m+n)$，注意到参数 (η_1, η_2, β) 的对数似然函数为

$$L(\eta_1, \eta_2, \beta) = (m+n)\ln\beta - \beta(m\ln\eta_1 + n\ln\eta_2) + \beta\left(\sum_{i=1}^m \ln x_i + \sum_{j=1}^n \ln y_j\right) - \sum_{i=1}^m\left(\frac{x_i}{\eta_1}\right)^\beta - \sum_{j=1}^n\left(\frac{y_j}{\eta_2}\right)^\beta \tag{13}$$

关于参数 (η_1, η_2, β) 的 Fisher 信息阵为

$$I = I(\eta_1, \eta_2, \beta) = \begin{bmatrix} m\beta^2/\eta_1^2 & 0 & -m\gamma/\eta_1 \\ 0 & n\beta^2/\eta_2^2 & -n\gamma/\eta_2 \\ -m\gamma/\eta_1 & -n\gamma/\eta_2 & (m+n)(\gamma^2+\gamma^*)/\beta^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中

$$\gamma = 1 + \int_0^\infty (\ln z) e^{-z} dz$$

$$\gamma^* = \int_0^\infty (\ln z)^2 e^{-z} dz - \left\{\int_0^\infty (\ln z) e^{-z} dz\right\}^2$$

因此 Jeffrey 无信息验前分布为

$$\pi_J(\eta_1, \eta_2, \beta) \propto \frac{\beta}{\eta_1\eta_2} \tag{15}$$

显然，Jeffrey 无信息验前关于参数 η_1 和 η_2 是对称的，并不依赖样本尺寸 m 和 n 大小，这是不合理的，因为如果 $m > n$，关于 η_1 的信息要比关于 η_2 的信息多。

为了克服 Jeffrey 无信息验前分布的不足，寻找具有匹配验前性质的无信息验前分布，Sun，Ghosh 和 Basu[7] 得到了一般性的具有匹配验前性质的分布类

$$\pi_m(\eta_1, \eta_2, \beta) \propto \frac{\sqrt{\gamma^* + \dfrac{mn}{(m+n)^2}\beta^2\ln^2\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)}}{\eta_1\eta_2\beta^2} h\left(\eta_1\exp\left\{\frac{\gamma}{\beta} + \sqrt{\frac{n\gamma^*}{m}}\frac{i}{\beta}\right\}, \eta_2\exp\left\{\frac{\gamma}{\beta} - \sqrt{\frac{m\gamma^*}{n}}\frac{i}{\beta}\right\}\right) \tag{16}$$

其中 $h(\cdot;\cdot)$ 为任一可微函数，$i = \sqrt{-1}$。如果令 $h(s, t) = g(s^m t^n)$ (g 为某一大于零的函数)，则可以得到一类满足 (16) 式的函数子类为

$$\pi_m(\eta_1, \eta_2, \beta) \propto \frac{\sqrt{\gamma^* + \dfrac{mn}{(m+n)^2}\beta^2\ln^2\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)}}{\eta_1\eta_2\beta^2} g\left(\eta_1^m\eta_2^n\exp\left\{\frac{(m+n)\gamma}{\beta}\right\}\right) \tag{17}$$

显然，根据 (17) 式可以确定无穷多个具有匹配验前性质的无信息验前分布，一个重要的问题就是在这些无信息验前分布中寻找覆盖率和名义概率匹配最好的那种无信息验前分布。一种简单的取法是令 $g = 1$，则参数 (η_1, η_2, β) 的无信息验前分布为

$$\pi_m(\eta_1, \eta_2, \beta) \propto \frac{\sqrt{\gamma^* + \dfrac{mn}{(m+n)^2}\beta^2\ln^2\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)}}{\eta_1\eta_2\beta^2} \tag{18}$$

定理 3　假定应力、强度均服从 Weibull 分布，形状参数相同但未知，当获得应力、强度的试验样本后，若采用（15）式或（18）式作为（η_1，η_2，β）的无信息验前分布，则 R 的验后密度函数分别为

$$\pi_J(R \mid X, Y) \propto R^{m-1}(1-R)^{n-1}\int_0^{\infty}\beta^{m+n-1}G(R, \beta; X, Y)d\beta \tag{19}$$

和

$$\pi_m(R \mid X, Y) \propto \frac{R^{m-1}(1-R)^{n-1}}{g_m(R)}\int_0^{\infty}\beta^{m+n-4}G(R, \beta; X, Y)d\beta \tag{20}$$

其中

$$G(R, \beta; X, Y) = \frac{\left(\prod_{i=1}^{m}x_i\prod_{j=1}^{n}y_j\right)^{\beta}}{\left[R\sum_{i=1}^{m}x_i^{\beta}+(1-R)\sum_{j=1}^{n}y_j^{\beta}\right]^{m+n}}$$

$$g_m(R) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^* + a(1-a)\ln^2[(1-R)/R]}}$$

此时对应力－强度模型进行可靠性分析需要根据定理 3 进行数值方法研究，可以计算应力－强度模型可靠性的点估计和置信下限估计。

4　结束语

本文给出了一种判别无信息验前分布优良性的准则－概率匹配原则，并针对几种应力－强度模型的分布情况确定了具有匹配验前优良性质的无信息验前分布。仿真结果表明利用匹配验前分布所进行的 BAYES 统计推断有很好的频率解释，这一点无论在理论上还是在实践中都是非常重要的。

参考文献：

[1] Birnbaum Z M. On a Use of the Mann-Whitney Statistic [C], Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume I, 13～17, Berkeley, California: University of California Press, 1956.

[2] Basu A P. Estimation of the Reliability of Complex System－a Survey [J]. The Frontiers of Modern Statistical Inference Procedures, 271-287, American Science press, Columbus, 1985.

[3] Johnson R A. Stress-strength Models for Reliability, Handbook of Statistics, Volume 7: Quality Control and Reliability [M]. New York: Elsevier Science Pub. Co., Inc., 1988.

[4] Jeffreys H. Theory of Probability [M]. London: Oxford University Press, 1961.

[5] Berger J O, Bernardo J M. On the Development of Reference Priors (with discussion), Bayesian Statistics IV [M]. Oxford University Press, Oxford, 1992.

[6] Lee G. Noninformative Priors for Some Models Useful in Reliability and Survival Analysis [D]. Ph. D. dissertation, The University of Missouri-Columbia, 1996.

[7] Sun D, Ghosh M, Basu A P. Bayesian Analysis for a Stress-strength System Under Noninformative Priors [R]. Tech. Report No. 518, Department of Statistics, University of Florida, 1996.