国 防 科 技 大 学 学 报

第 22 卷 第 6 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.22 No.6 2000

文章编号：1001-2486（2000）06-0005-04

多体结构连接部件的有限元模型*

李东旭，孙丕忠，唐乾刚

（国防科技大学航天与材料工程学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：针对多体结构中连接部位带来的运动不连续问题，提出了将连接部件不作节点处理而作单元看待的设想。从力学基本原理出发推导了单元的刚度矩阵与阻尼矩阵，并由拉格朗日方程推导了这种单元的平衡方程。

关键词：多体结构；连接部件；连接单元

中图分类号：V214.1 文献标识码：A

Finite Element Model for the Joints in Multi-body Structures

LI Dong-xu，SUN Pei-zhong，TANG Qian-gang

（College of Aerospace and Material Engineering，National Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：A finite element model for the joints in multi-body structures has been presented. Based on the mechanical principles，the stiffness matrix and damping matrix of the finite element of the joint have been deduced. By this way，the non-continuous physical system becomes continuous mathematically. So，the idea presented in this paper gives us another way to analyze the dynamical problem in a multi-body structures.

Key words：multi-body structure；joint；joint element

随着国家建设和航天事业的发展，越来越多的多体结构被采用。图 1 是卫星芯体—帆板多体结构的简单示意。A、B 表示部件之间的连接件。对各子结构都可以分别独立地建立有限元模型，但由于位移在连接处间断，使连接件不能简单地作为一个有限单元的节点来连接两边的结构。因此，在理论和方法上就有一些模型和假设应运而生。在本文中提出的是将结构之间的连接件按一个独立的有限单元来处理的方法，为解决结构连接处位移不连续给求解带来的问题提供了又一个较为满意的途径。

1 连接单元的建模与分析

1.1 单元模型

因为连接件的主要功能相当于弹簧和阻尼的作用，因此可将连接件简化为如图 2 所示的单元模型。该单元无质量。

1.2 单元分析

设每个节点具有 5 个自由度，即：u、v、w、θ_x、θ_y，则单元的节点位移向量为：

$$\{q_e\} = [u_1\ v_1\ w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ u_2\ v_2\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ u_3\ v_3\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ u_4\ v_4\ w_4\ \theta_{x4}\ \theta_{y4}] \tag{1}$$

单元的动能为：

$$T_e = 0 \tag{2}$$

单元的势能为：

$$V_e = \frac{1}{2}K_u(u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}K_v(v_2 - v_1)^2 + \frac{1}{2}K_w(w_2 - w_1)^2 + \frac{1}{2}K_{\theta x}(\theta_{x2} - \theta_{x1})^2 + \frac{1}{2}K_{\theta y}(\theta_{y2} - \theta_{y1})^2 + \frac{1}{2}K_u(u_3 - u_4)^2$$

* 收稿日期：2000-05-23
基金项目：国家“863”应用基础研究项目基金资助（863-2）
作者简介：李东旭，（1956－），博士，副教授。

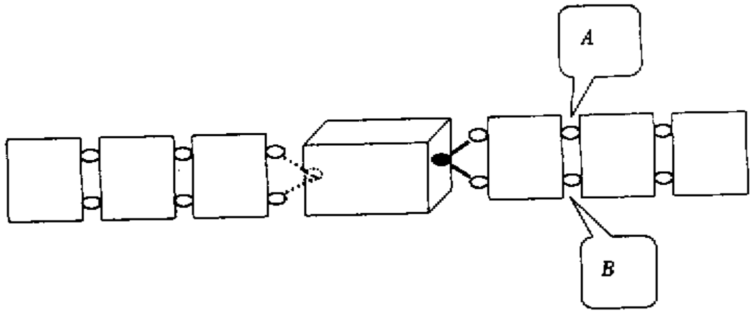

图 1　多体结构与连接件示意图

Fig.1　An illustration of multi-body and their joints

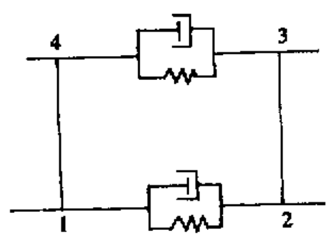

图 2　连接单元模型

Fig.2　The model of a joint element

$$+\frac{1}{2}K_v(v_3-v_4)^2+\frac{1}{2}K_w(w_3-w_4)^2+\frac{1}{2}K_{\theta x}(\theta_{x3}-\theta_{x4})^2$$
$$+\frac{1}{2}K_{\theta y}(\theta_{y3}-\theta_{y4})^2 \tag{3}$$

其中 K_u、K_v、K_w、$K_{\theta x}$、$K_{\theta y}$ 分别为与位移 u、v、w、θ_x、θ_y 相对应的弹性刚度。

单元的阻尼力所做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W_e = -[&C_u(\dot u_2-\dot u_1)\delta(u_2-u_1)+C_v(\dot v_2-\dot v_1)\delta(v_2-v_1)\\&+C_w(\dot w_2-\dot w_1)\delta(w_2-w_1)+C_{\theta x}(\dot\theta_{x2}-\dot\theta_{x1})\delta(\theta_{x2}-\theta_{x1})\\&+C_{\theta y}(\dot\theta_{y2}-\dot\theta_{y1})\delta(\theta_{y2}-\theta_{y1})+C_u(\dot u_3-\dot u_4)\delta(u_3-u_4)\\&+C_v(\dot v_3-\dot v_4)\delta(v_3-v_4)+C_w(\dot w_3-\dot w_4)\delta(w_3-w_4)\\&+C_{\theta x}(\dot\theta_{x3}-\dot\theta_{x4})\delta(\theta_{x3}-\theta_{x4})+C_{\theta y}(\dot\theta_{y3}-\dot\theta_{y4})\delta(\theta_{y3}-\theta_{y4})]\end{aligned} \tag{4}$$

其中，C_u、C_v、C_w、$C_{\theta x}$、$C_{\theta y}$ 是对应自由度上的阻尼系数。阻尼力的大小与速度成正比，方向与速度相反。$\delta(u_2-u_1)$，……，$\delta(\theta_{y3}-\theta_{y4})$ 表示虚位移。

记阻尼力向量为 Q，则：

$$\{Q\} = -[C_u(\dot u_2-\dot u_1)\quad C_v(\dot v_2-\dot v_1)\cdots\cdots C_{\theta x}(\dot\theta_{x3}-\dot\theta_{x4})\quad C_{\theta y}(\dot\theta_{y3}-\dot\theta_{y4})]^{\mathrm T} \tag{5}$$

2　运动方程

2.1　拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T_e}{\partial q_i}+\frac{\partial V_e}{\partial q_i}=Q_i\qquad(i=1,\cdots,20) \tag{6}$$

因为 $T_e=0$，所以连接单元的拉格朗日方程为：

$$\frac{\partial V_e}{\partial q_i}=Q_i\qquad(i=1,\cdots,20) \tag{7}$$

2.2 单元刚度矩阵与单元阻尼矩阵

如果记：

$$[K_e]=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_w & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -K_v & 0 & 0 & 0 & 0 & K_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -K_w & 0 & 0 & 0 & 0 & K_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_v & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_w & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_w & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta x} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta y} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & K_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_v & 0 & 0 & 0 & 0 & K_v & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_w & 0 & 0 & 0 & 0 & K_w & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta x} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta y}
\end{array}\right] \tag{8}$$

则：

$$\frac{\partial V_e}{\partial \{q_e\}}=[K_e]\{q_e\} \tag{9}$$

即 $[K_e]$ 为该单元的刚度矩阵。

如果记：

$$[C_e]=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & C_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & C_w & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -C_v & 0 & 0 & 0 & 0 & C_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -C_w & 0 & 0 & 0 & 0 & C_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -C_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_v & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_w & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_w & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta x} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta y} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & C_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_v & 0 & 0 & 0 & 0 & C_v & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_w & 0 & 0 & 0 & 0 & C_w & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta x} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\theta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\theta y}
\end{array}\right] \tag{10}$$

则：

$$\{Q\}=-[C_e]\{\dot{q}_e\} \tag{11}$$

即 $[C_e]$ 为该单元的阻尼矩阵。

2.3 运动方程

将（9）式及（11）式代入（7）式得

$$[K_e]\{q_e\} = -[C_e]\{\dot{q}_e\} \tag{12}$$

或

$$[K_e]\{q_e\} + [C_e]\{\dot{q}_e\} = 0 \tag{13}$$

（13）式即连接单元的运动微分方程。实际上可看作是弹性力与阻尼力的静力平衡方程。

因为连接件的质量被忽略不计，因此，单元的质量矩阵为零。如果记

$$[M_e] = [0] \tag{14}$$

则该连接单元的运动方程有与一般单元的运动方程一致的形式。即

$$[M_e]\{\ddot{q}_e\} + [C_e]\{\dot{q}_e\} + [K_e]\{q_e\} = 0 \tag{15}$$

3 结束语

当得到连接单元的刚度矩阵、阻尼矩阵后，可按常规的有限元组集方法集合到总体刚度矩阵和总体阻尼矩阵中去。因此，这种方法的特点就是把物理上不连续的系统在数学上连续了起来。

参考文献：

[1] Leonard Meirovitch. Computational Method in structural Dynamics [R] Son. Inc，1980.

[2] A. A. shabana. Substructure Synthesis Methods for Dynamic Analysis of Multi-body Systems [J]. Computers and Structures，1985，20（4）.

[3] 李东旭. 高等结构动力学 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1997.