文章编号: 1001-2486 (2000) 06-0017-06

验前分布的稳健性*

张金槐

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 研究 Bayes 统计分析中运用验前信息的稳健性, 给出了正态分布期望值验前分布和指数寿命型分布失效率验前分布的稳健性分析。所论方法对于飞行器系统试验的精度分析和可靠性评估, 具有较普遍的意义。

关键词: Bayes 统计分析; 验前分布; 稳健性

中图分类号: O212.8 文献标识码: A

Robustness of prior Distribution

ZHANG Jin-Huai

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The robustness of prior distribution in Bayesian statistical analysis is studied. In the normal distribution and exponential life distribution, the analysis of robustness for the prior distribution of the parameters are carried out. The methods discussed in this paper can be used to analyze the accuracy and estimate the reliability analysis of Vehicle.

Key words: Bayesian statistical analysis; prior information; robustness

1 问题的提出

Bayes 统计推断中的一个重要问题是它的稳健性 (Robustness)。近年来, 文献中已有较多的研究[8]。稳健性问题主要论述在不同的验前分布的运用之下, 引起验后的 Bayes 统计推断的差异。描述 Bayes 方法的稳健性, 有各种不同的方法。例如, 按 Hiiber[3] 的提法, 引入 ε- 污染分布族, 即对未知分布参数 θ, 引入验前分布族

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \pi(\theta) = (1-\varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta),\ q \in \mathscr{D}\}$$

其中 $\pi_0(\theta)$ 为某个特定的验前分布密度, $\mathscr{D}$为所有的分布集。$\varepsilon > 0$ 为小数。在 Γ 中取不同的验前分布, Bayes 统计推断是不同的。由此出发, 分析 Bayes 方法的稳健性。不少学者从 Bayes 风险去分析验前分布的稳健性。Robbins, Berliner[4] 等, 引入了所谓 Γ-minimax 迫近方法, 即考虑

$$r_\Gamma = \inf_{a \in \mathscr{D}} r_\Gamma(a) = \inf_{a \in \mathscr{D}} \sup_{\pi \in \Gamma} r(\pi, a)$$

其中 $r(\pi, a)$ 为验前分布取 π 之下, 采用决策 a 时的风险函数(即平均损失)。$\mathscr{D}$为决策空间。r_Γ 就是在采用"最坏"验前分布之下, 取"最优决策"时的风险。

还有一种引人思考的稳健性分析方法是利用 $\pi(\theta)$ 给定之下 X 的边缘分布密度, 即

$$m(x \mid \pi) = \int_\Theta f(x \mid \theta)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

其中$f(x \mid \theta)$ 是 θ 给定之下X 的密度函数, Θ 为参数空间。$m(x \mid \pi)$ 可以看作关于 $\pi(\theta)$ 的似然函数。因此, 对某个设定的 π_0, 当获得样本x 之后, 如果$m(x \mid \pi_0)$ 意外地小, 则说明 $\pi_0(\theta)$ 的选取是不合适的。当然, 这种大、小的度量必须有一个准则。一些学者采用显著性检验方法, 在一定水平之下, 判定 π_0 是否为合适的验前分布(参[2])。

下面, 将在设定某种验前分布之下, 讨论 Bayes 推断中验后稳健性问题。

* 收稿日期: 2000-03-20
作者简介: 张金槐 (1930-), 男, 教授。

2 验后稳健性分析

记 Bayes 统计推断中所采取的行为 (策略) 为 a, 损失函数为 $L(\theta, a(X))$, X 为子样。$\rho(\pi(\theta \mid X), a)$ 为采用行为 a 之下的验后期望损失, 此处 $\pi(\theta \mid X)$ 为 X 之下 θ 的验后密度函数。即

$$\rho(\pi(\theta \mid X), a) = E^{(\pi(\theta|X))}[L(\theta, a(X)) \mid X].$$

Γ 为验前分布族, 考虑

$$\left(\inf_{\pi \in \Gamma}\rho(\pi(\theta \mid X), a), \operatorname*{Sup}_{\pi \in \Gamma}\rho(\pi(\theta \mid X), a)\right), \tag{1}$$

它给出了验后期望损失的最大范围。还可以定义行为 a 的 Γ- 验后期望损失, 它为

$$\rho_\Gamma(a) = \operatorname*{Sup}_{\pi \in \Gamma}\rho(\pi(\theta \mid X), a) \tag{2}$$

它为 (1) 的单边情况。用 (1) 或 (2) 作为 Bayes 方法验后稳健性的一种度量。

特例 1 设行为 a 是去选择一个置信集 $C \subset \Theta$, 且定义

$$L(\theta, a) = 1 - I_c(\theta).$$

此处 $I_c(\theta)$ 是 Index 集。此时

$$\begin{aligned}\rho(\pi(\theta \mid X), C) &= 1 - P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in C)\\ &= P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in C)\end{aligned}$$

其中 C 为 C 的余集。这样, (1) 式所确定的量是 $\theta \in C$ 的验后概率的范围。

特例 2 对于统计假设

$$\mathscr{H}_0: \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow \mathscr{H}_1: \theta \in \Theta_1.$$

其中 Θ_0, Θ_1 为参数集, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \Phi$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$。记 a_i 为采纳假设 $\mathscr{H}_i (i = 0, 1)$ 的决策。定义 $L(\theta, a)$ 如上, 而 $C = \Theta_0$。于是

$$P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in C) = P^{\pi(\theta|X)}(\mathscr{H}_0)$$

它为采纳 $\mathscr{H}_0$ 的验后概率。于是(1) 式所确定的量为当 $\pi(\theta) \in \Gamma$ 时 $\mathscr{H}_0$ 的验后概率的范围。

2.1 正态总体期望值置信域的验后稳健性分析

设 $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 为已知。关于 θ 的验前分布假定取共轭验前分布, 分布密度函数为 $N(\mu, \tau^2)$, 此处 μ, τ^2 可以在某范围内取值, 为

$$\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2,$$
$$\tau_1^2 \leqslant \tau^2 \leqslant \tau_2^2,$$

在获得了子样 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 后, 作 θ 的 Bayes 置信估计, 置信域 $C = (a(X), b(X))$. 以下分析其验后稳健性。

下面确定 $\inf_{\pi \in \Gamma}P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in C)$ 和 $\operatorname*{Sup}_{\pi \in \Gamma}P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in C)$, 这里 Γ 为验前分布集: $\Gamma = \left\{N(\mu, \tau^2) \text{ 分布}: \begin{array}{l}\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2,\\ \tau_1^2 \leqslant \tau^2 \leqslant \tau_2^2.\end{array}\right\}$.

首先注意 θ 的验后分布仍为正态分布, 其验后均值和方差分别为

$$\mu^\pi(X) = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2}\mu + \frac{\tau^2}{\sigma^2/n + \tau^2}X,$$

$$V^\pi(X) = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2}\tau^2.$$

于是 θ 的验后分布集为

$$\begin{aligned}\Gamma^{\pi(\theta|X)} = \{&\pi(\theta \mid X): \pi(\theta \mid X) \text{ 为 } N(\mu^\pi, V^\pi) \text{ 分布},\\ &\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2, \tau_1^2 \leqslant \tau \leqslant \tau_2^2\}.\end{aligned}$$

而

$$P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in (a, b))$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{V^\pi}} e^{-\frac{1}{2V^\pi}(\theta-\mu^\pi)^2} d\theta$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu^\pi(X)}{\sqrt{V^\pi(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu^\pi(X)}{\sqrt{V^\pi(X)}}\right).$$

只要由 $(\mu, \tau^2)(\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2, \tau_1^2 \leqslant \tau^2 \leqslant \tau_2^2)$ 所计算的 $\mu^\pi(X)$ 最靠近 (a, b) 的中点，即 $a + \frac{b-a}{2}$，则此 (μ, τ^2) 使 $P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in c)$ 取极大值；反之，如果由 (μ, τ^2) 所计算的 $\mu^\pi(X)$ 最靠近 (a, b) 的边界（例如图 1 中的 a 点），则使 $P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in c)$ 取极小值。记此相应的极小，极大点为 $\underline{\mu}^\pi(X)$，$\underline{V}^\pi(X)$ 和 $\overline{\mu}^\pi(X)$，$\overline{V}^\pi(X)$，则

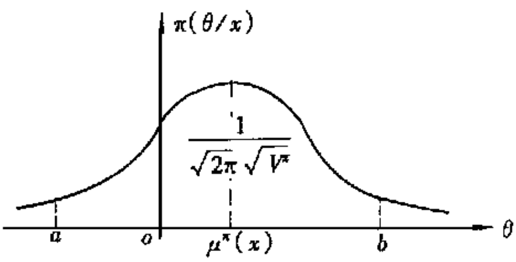

图 1 $\pi(\theta | x)$ 图示

Fig. 1 figure of $\pi(\theta | x)$

$$\inf_{\pi\in\Gamma} P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in c) = \Phi\left(\frac{b-\underline{\mu}^\pi(X)}{\sqrt{\underline{V}^\pi(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\underline{\mu}^\pi(X)}{\sqrt{\underline{V}^\pi(X)}}\right),$$

$$\operatorname{Sup}_{\pi\in\Gamma} P^{\pi(\theta|X)}(\theta \in c) = \Phi\left(\frac{b-\overline{\mu}^\pi(X)}{\sqrt{\overline{V}^\pi(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\overline{\mu}^\pi(X)}{\sqrt{\overline{V}^\pi(X)}}\right).$$

数字示例：设 $X \sim N(\theta, 1)$，分布族 Γ 中的参数范围为 $1 \leqslant \mu \leqslant 2$, $3 \leqslant \tau^2 \leqslant 4$。取 $c = (-1, 2)$, $x = 0$ 为观测到的样本值。此时 θ 的验后分布为 $N(\mu^\pi(x), V^\pi(x))$，此处

$$\mu^\pi(x) = \frac{1}{1+\tau^2}\mu + \frac{\tau^2}{1+\tau^2} = \frac{\mu}{1+\tau^2},$$

$$V^\pi(x) = \frac{\tau^2}{1+\tau^2}.$$

而

$$\Gamma^{\pi(\theta|0)} = \left\{\pi(\theta|0): \pi(\theta|0) \sim N(\mu^\pi(0), V^\pi(0)), \begin{matrix} 1 \leqslant \mu \leqslant 2, \\ 3 \leqslant \tau^2 \leqslant 4 \end{matrix}\right\},$$

此时，可算得

$$\inf_{\pi\in\Gamma} P^{\pi(\theta|0)}(\theta \in (-1, 2)) = 0.888,$$

$$\operatorname{Sup}_{\pi\in\Gamma} P^{\pi(\theta|0)}(\theta \in (-1, 2)) = 0.916.$$

因此，可以认为 $C = (-1, 2)$ 为 θ 的“稳健度”约90%的可信集。

2.2 指数寿命型中失效率 λ 的验后稳健性分析

设某设备在时间 t 内正常工作的概率服从指数分布，即

$$f(t | \lambda) = e^{-\lambda t}, \lambda > 0.$$

其中 λ 为设备的失效率。今考虑定数截尾试验情况。假定共试验了 M 个相同的设备，直到有 N 个失效时试验终止。记失效时间为

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_N;$$

则在 N 个设备失效的场合下，λ 的似然函数为

$$L(\lambda | T, N) \propto \lambda^N e^{-\lambda T},$$

其中

$$T = \sum_{i=1}^N t_i + (M-N)T_N.$$

T 为总的寿命试验时间（或总的有效工作时间）。

取 λ 的验前分布族为

$$\Gamma = \left\{\pi(\lambda; \alpha_0, \beta_0): \pi(\lambda; \alpha_0, \beta_0) = G(\lambda; \alpha_0, \beta_0); \begin{matrix} \alpha_{10} \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_{20}, \\ \beta_{10} \leqslant \beta_0 \leqslant \beta_{20}. \end{matrix}\right\}$$

其中 $G(\lambda; \alpha_0, \beta_0)$ 为 Gamma 分布，即

$$G(\lambda;\alpha_0,\beta_0)=\frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}\lambda^{\beta_0-1}e^{-\alpha_0\lambda_0},\ \lambda>0.$$

现在用 (1) 式的方法讨论 λ 的验后稳健性。只要注意 λ 的验后密度为

$$\pi(\lambda\mid T,N)=G(\lambda;T+\alpha_0,N+\beta_0),$$

对于选定的 λ 的置信集 C,

$$\begin{aligned}\rho(\pi(\lambda\mid T,N),C)&=P^{\pi(\lambda\mid T,N)}(\lambda\in C)\\&=\int_c G(\lambda;T+\alpha_0,N+\beta_0)\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{(T+\alpha_0)^{N+\beta_0}}{\Gamma(N+\beta_0)}\int_c\lambda^{N+\beta_0-1}e^{-\lambda(T+\alpha_0)}\mathrm{d}\lambda\end{aligned}\tag{3}$$

取 C 为 $(0,\lambda^*)$ 的形式,上式表示的积分,对于不同的 α_0,β_0 的取值,可以由不完全 Gamma 函数表给出。事实上,由不完全 Gamma 函数定义,它为

$$I_x(\beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

对不同的 x 和 β, $I_x(\beta)$ 的值可直接查表获得。而公式 (3) 的右端,具有形式

$$\frac{T_1^{N_1}}{\Gamma(N_1)}\int_0^{\lambda^*}\lambda^{N_1-1}e^{-\lambda T_1}\mathrm{d}\lambda\tag{4}$$

置 $\lambda T_1=t$,于是 (4) 式成为

$$\begin{aligned}&\frac{T_1^{N_1}}{\Gamma(N_1)}\int_0^{\lambda^*T_1}\left(\frac{t}{T_1}\right)^{N_1-1}e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{T_1}\\=&\frac{1}{\Gamma(N_1)}\int_0^{\lambda^*T_1}t^{N_1-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\=&I_{\lambda^*T_1}(N_1)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\rho(\pi(\lambda\mid T,N),C)&=P^{\pi(\lambda\mid T,N)}(\lambda\in(0,\lambda^*))\\&=I_{\lambda^*T_1}(N_1)\end{aligned}\tag{5}$$

式中 $T_1=T+\alpha_0,N_1=N+\beta_0$

由数值计算法,可以获得 $\inf\limits_{\pi\in\Gamma}P^{\pi(\lambda\mid T,N)}(\lambda\in(0,\lambda^*))$ 和 $\operatorname{Sup}\limits_{\pi\in\Gamma}P^{\pi(\lambda\mid T,N)}(\lambda\in(0,\lambda^*))$.

3 ε- 污染验前分布族之下的验后稳健性分析

记 ε- 污染验前分布族为

$$\Gamma=\{\pi:\pi=(1-\varepsilon)\pi_0+\varepsilon q,\ q\in\mathscr{D}\}$$

其中 εq 为污染分布部分, π_0 是预先选定的某验前分布, $\mathscr{D}$ 为分布集。

定理 1[3] 设 $\pi=(1-\varepsilon)\pi_0+\varepsilon q$, 验后密度 $\pi_0(\theta\mid x)$ 和 $q(\theta\mid x)$ 存在,且边缘密度 $m(x\mid\pi)>0$, 则

$$\pi(\theta\mid x)=\lambda(x)\pi_0(\theta\mid x)+[1-\lambda(x)]q(\theta\mid x)\tag{6}$$

其中

$$\lambda(x)=\left[1+\frac{\varepsilon m(x\mid q)}{(1-\varepsilon)m(x\mid\pi_0)}\right]^{-1}$$

而

$$\begin{aligned}&\rho(\pi(\theta\mid x),a)\triangleq E^{\pi(\theta\mid x)}[L(\theta,a)]\\=&\lambda(x)\rho(\pi_0(\theta\mid x),a)+[1-\lambda(x)]\rho(q(\theta\mid x),a)\end{aligned}\tag{7}$$

(6) 式表示了验后分布的融合表示，说明了验前污染分布的影响。而 (7) 式则表示了验后期望由于污染分布的作用造成的影响。

特例 1　令 $L(\theta, a) = \theta$, 则得当 $\pi \in \Gamma$ 时的验后均值为

$$\mu^{\pi}(x) = \lambda(x)\mu^{\pi_0}(x) + [1 - \lambda(x)]\mu^{q}(x); \tag{8}$$

特例 2　令 $L(\theta, a) = (\theta - \mu^{\pi}(x))^2$, 则当 $\pi \in \Gamma$ 时的验后方差为

$$V^{\pi}(x) = \lambda(x)[V^{\pi_0} + (\mu^{\pi_0} - \mu^{\pi})^2] + [1 - \lambda(x)][V^{q} + (\mu^{q} - \mu^{\pi})^2]. \tag{9}$$

(8), (9) 式给出了由于污染分布 $q(x)$ 对验后均值和验后方差所造成的影响。如果 $\lambda(x) \approx 1$, 那末这种影响是微小的。

定理 2[3]　设 $L(\theta, a) = I_C(\theta)$，于是

$$\rho(\pi(\theta \mid x), a) = P^{\pi(\theta \mid x)}(\theta \in C).$$

则有

$$\inf_{\pi \in \Gamma} P^{\pi(\theta \mid x)}(\theta \in C) = P_0\left[1 + \frac{\varepsilon \operatorname{Sup}_{\theta \notin C} f(x \mid \theta)}{(1 - \varepsilon) m(x \mid \pi_0)}\right]^{-1}, \tag{10}$$

$$\operatorname{Sup}_{\pi \in \Gamma} P^{\pi(\theta \mid x)}(\theta \in C) = 1 - (1 - P_0)\left[1 + \frac{\varepsilon \operatorname{Sup}_{\theta \in C} f(x \mid \theta)'}{(1 - \varepsilon) m(x \mid \pi_0)}\right]^{-1}. \tag{11}$$

其中

$$P_0 = P^{\pi_0(\theta \mid x)}(\theta \in C).$$

$f(x \mid \theta)$ 为给定 θ 时 x 的密度函数(似然函数), $m(x \mid \pi_0)$ 为在 π_0 之下 x 的边缘分布，即

$$m(x \mid \pi_0) = \int_{\Theta} f(x \mid \theta)\pi_0(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

(10) 和 (11) 式表示了验前分布历遍 Γ 时，验后期望的最小和最大取值。它们是分析验后期望值稳健性的重要方法。此外，(10), (11) 式在计算方法上将带来方便。本来，inf, Sup 应在验前分布族上求取，但 (10)、(11) 式显示，只需在 C 和 $\bar{C}$ 上确定 $f(x \mid \theta)$ 关于 θ 的最大值就可以了。

3.1　在正态总体期望估计中的应用

设 $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 为已知, 且设 $\pi_0(\theta)$ 为 $N(\mu, \tau^2)$ 分布。记 $X = (X_1, \cdots, X_m)$ 为 $i.i.d$ 子样, 则 $\pi(\theta \mid X) \sim N(\mu^{\pi}, V^{\pi})$。其中 μ^{π}, V^{π} 已为第 2 部分所示, 此时 θ 的 $1 - \alpha$ 置信域为

$$C = (\mu^{\pi}(x) - Z_{\alpha/2}\sqrt{V^{\pi}(x)},\ \mu^{\pi}(x) + Z_{\alpha/2}\sqrt{V^{\pi}(x)}),$$

其中 Z_α 是 $N(0, 1)$ 的 α 分位数。

当 σ^2 为已知时, $\bar{X}$ 是 θ 的充分统计量, 因此以 $\bar{X}$ 代替子样, 此时 $\bar{X} \sim N(\theta, \frac{\sigma^2}{n})$。

如果 $\bar{X} \in C$, 则

$$\operatorname{Sup}_{\theta \in C} f(\bar{X} \mid \theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma};$$

而　　$\operatorname{Sup}_{\theta \notin C} f(\bar{X} \mid \theta) = f(\bar{X}) \mid$ 最接近于 C 的终点处的 θ 值)。

注意到

$$\mu^{\pi}(x) = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2}\mu + \frac{\tau^2}{\sigma^2/n + \tau^2}\bar{X}$$

$$= \bar{X} - \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + \tau^2}(\bar{X} - \mu)$$

于是

$$\operatorname{Sup}_{\theta \notin C} f(\bar{X} \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X} - \text{终点})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2\sigma^2}(|\mu^{\pi}(\bar{X}) - \bar{X}| + Z_{\alpha/2}\sqrt{V^{\pi}(\bar{X})})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n+\tau^2}|X-\mu|+Z_{\alpha/2}\sqrt{V^{\pi}(X)}\right)^2}$$

而 $P_0=1-\alpha$, 且

$$m(X\mid\pi_0)\text{ 为 }N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}+\tau^2\right)\text{ 分布。}$$

这样, 定理2的(10), (11)式中的各项有关的量的计算都已齐全。由此, 最终可获得$\inf\limits_{\pi\in\Gamma}P^{\pi(\theta|X)}(C)$和$\operatorname*{Sup}\limits_{\pi\in\Gamma}P^{\pi(\theta|X)}(\theta\in C)$。

3.2 在指数寿命型可靠性分析中的应用

仍考虑定数截尾情况。

λ的似然函数为$f(t_1,\cdots,t_N\mid\lambda)\propto\lambda^N e^{-\lambda T}$,

取$\pi_0(\lambda)$为$G(\lambda;\alpha_0,\beta_0)$. 前已算得

$$m(t_1,\cdots,t_N\mid\pi_0)$$

$$=\frac{M!}{(M-N)!}\frac{\Gamma(N+\beta_0)}{\Gamma(\beta_0)}(T+\alpha_0)^{-(N+\beta_0)}$$

关于λ的置信区间, 取$C=(0,\lambda_u)$, λ_u为λ的$1-\alpha$置信度的上界, 即

$$\lambda_u=x^2_{1-\alpha}(2(N+\beta_0))/[2(T+\alpha_0)]$$

而

$$P=1-\alpha_0$$

注意似然函数$f(t_1,\cdots,t_N\mid\lambda)=\frac{M!}{(M-N)!}\lambda^N e^{-\lambda T}$, $\lambda>0$. 为确定$\operatorname*{Sup}\limits_{\lambda\in C}f(t_1,\cdots,t_N\mid\lambda)$, 只需注意$\hat{\lambda}=\frac{N}{T}$是$\lambda$的ML估计, 因此

$$\operatorname*{Sup}_{\lambda\in C}f(t_1,\cdots,t_N\mid\lambda)=f(t_1,\cdots,t_N\mid\hat{\lambda})$$

$$=\frac{M!}{(M-N)!}\hat{\lambda}^N e^{-\hat{\lambda}T};$$

如果$\hat{\lambda}=\frac{N}{T}\notin C$, 则

$$\operatorname*{Sup}_{\lambda\notin C}f(t_1,\cdots,t_N\mid\lambda)=f(t_1,\cdots,t_N\mid\lambda_u)$$

于是按(10), (11)式, 可以计算出$\inf\limits_{\pi\in\Gamma}P^{\pi(\theta|t_1,\cdots,t_N)}(C)$及$\operatorname*{Sup}\limits_{\pi\in\Gamma}P^{\pi(\theta|t_1,\cdots,t_N)}(C)$.

参考文献:

[1] 张金槐, 唐雪梅. Bayes方法[M]. 国防科技大学出版社, (修订版) 1992.
[2] 张金槐, Bayes方法的稳健性[C](综合性报告). 1998.
[3] J. Berger, Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis [M]. Springer-Verlag. 2nd Edi., 1985.