国 防 科 技 大 学 学 报

第 23 卷 第 1 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol.23 No.1 2001

文章编号：1001-2486（2001）01-0097-05

具有正交（g，f）－因子分解的子图*

谢政，戴丽，王栓狮

（国防科技大学理学院，湖南 长沙　410073）

摘　要：设 G 是一个图，$g(x)$ 和 $f(x)$ 是定义在 $V(G)$ 上的整数值函数，且对任意的 $x\in V(G)$，设 $g(x)\leqslant f(x)$，H 是 G 的一个子图，$F=\{F_1, F_2, \cdots, F_t\}$ 是 G 的一个因子分解，如果对任意的 $1\leqslant i\leqslant t$，$|E(H)\cap E(F_i)|=1$，则称 F 与 H 正交。闫桂英和潘教峰在文[3]中提出如下猜想：设 G 是一个 $(mg+k, mf-k)$－图，$1\leqslant k<m$，其中对任意的 $x\in V(G)$，$0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$ 是定义在 $V(G)$ 上的整数值函数，则 G 存在一个子图 R 满足对 G 的任意一个具有 k 条边的子图 H，R 有 (g, f)－因子分解与 H 正交。并证明了当 $g(x)\geqslant 1$，$f(x)\geqslant 5$ 时成立。证明当 H 是匹配时，该猜想成立。

关键词：图；因子；因子分解；正交

中图分类号：O157.6　　**文献标识码**：A

Orthogonal (g, f)－Factorizations of Subgraphs

XIE Zheng，DAI Li，WANG Shuan-shi

（College of Science，National Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract: We deal with simple graphs only. Let G be a graph, and g(x) and f(x) be integer－valued functions defined on V(G) such that $g(x)\leqslant f(x)$ for every $x\in V(G)$. Let H is a subgraph of G and $F=\{F_1, F_2, \cdots, F_t\}$ is a (g, f) factorization of G. If $|E(H)\cap E(F_i)|=1$, $1\leqslant i\leqslant t$, then we say that F is orthogonal to H. In the paper [3], Yan Guiying and Pan Jiaofeng gave the conjecture: Let G is an $(mg+k, mf-k)$－graph, $1\leqslant k<m$, and $g(x)$ and $f(x)$ be integer－valued functions defined on $V(G)$ such that $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$ for every $x\in V(G)$. Then for any subgraph H with k edges of G, there exists a subgraph R with a (g, f)－factorization orthogonal to H. And it is proved that when $g(x)\geqslant 1$, $f(x)\geqslant 5$, the conjecture is correct in the paper [3]. It is proved that when H is a matching, the conjecture is correct.

Key words: graph; factor; factorization; orthogonality

1　基本概念和记号

本文所考虑的图均指有限无向简单图。设 G 是一个图，分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集，$d_G(x)$ 表示顶点 x 在 G 中的度数，G 的支撑子图是指顶点集和 G 相同的子图。设 g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数且对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$，则图 G 的一个 (g, f)－因子是 G 的一个支撑子图 H，满足对每个 $x\in V(G)$，有 $g(x)\leqslant d_H(x)\leqslant f(x)$。特别地，如果 G 本身是一个 (g, f)－因子，则称之为 (g, f)－图。若 G 的边能划分为 t 个边互不相交的 (g, f)－因子 $F_1, F_2, \cdots F_t$，则称 $F=\{F_1, F_2, \cdots, F_t\}$ 是 G 的一个 (g, f)－因子分解。设 H 和 F 分别是图 G 的子图和因子分解，如果对所有的 $1\leqslant i\leqslant t$，$|E(H)\cap E(F_i)|=1$，则称 F 和 H 正交。

设 S 与 T 是 $V(G)$ 的两个不相交的子集，用 $E(S, T)$ 表示 G 中连接 S 及 T 的边集合，即 $E(S, T)=\{xy: x\in S, y\in T\}$，且记 $e(S, T)=|E(S, T)|$。设 C 是 $G-(S\cup T)$ 的分支且对所有的 $x\in V(C)$，有 $g(x)=f(x)$，则根据 $e(T, V(C))+f(V(C))$ 是奇数或偶数称 C 是 $G-(S\cup T)$ 的奇分支或偶分支，其他的分支称为中分支。用 $h(S, T)$ 表示 $G-(S\cup T)$ 的

* 收稿日期：2000-09-28
作者简介：谢政（1960-），男，教授。

奇分支的数目。记 $f(S)=\sum_{x\in S}f(x)$，$g(T)=\sum_{x\in T}g(x)$，$d_G(T)=\sum_{x\in T}d_G(x)$，特别地，$f(\varnothing)=0$。并记

$$\delta_G(S,T)=d_{G-S}(T)-g(T)-h(S,T)+f(S)$$

其他未加说明的概念和记号见文献 [1]。

2 预备引理

引理 1[2] 设 G 是一个图，$g(x)$ 和 $f(x)$ 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，且对任意的 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$，则对任意的边 e，G 存在一个 (g,f)－因子含 e 当且仅当对 $V(G)$ 的任意不交的子集 S 和 T，有 $\delta_G(S,T)\geqslant\varepsilon(S,T)$，其中：

(ⅰ) 如果 $e=uv$，$u,v\in S$，则 $\varepsilon(S,T)=2$；

(ⅱ) 如果存在 $G-(S\cup T)$ 的一个中分支 C 满足 $e\in E(S,V(C))$，则 $\varepsilon(S,T)=1$；

(ⅲ) 否则，$\varepsilon(S,T)=0$。

下面总假设 G 是一个 $(mg+k,mf-k)$－图，$1\leqslant k<m$，k 和 m 都是整数。定义 $V(G)$ 上的整值函数：

$$p(x)=\max\{g(x),d_G(x)-(m-1)f(x)+k-1\}$$
$$q(x)=\min\{f(x),d_G(x)-(m-1)g(x)-k+1\}$$

由 $p(x)$，$q(x)$ 的定义，有：

引理 2 对一切的 $x\in V(G)$，有：

(1) $k<m\leqslant 2k$ 时，$g(x)\leqslant p(x)\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}<\frac{d_G(x)+m-k}{m}\leqslant q(x)\leqslant f(x)$

(2) $m>2k$ 时，$g(x)\leqslant p(x)\leqslant\frac{d_G(x)-k}{m}<\frac{d_G(x)+k}{m}\leqslant q(x)\leqslant f(x)$

证明 (1) 只需证 $p(x)\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}$，且 $q(x)\geqslant\frac{d_G(x)+m-k}{m}$。

先证 $p(x)\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}$。

因为 $m\leqslant 2k$，所以 $k\geqslant m-k$；又因为图 G 是 $(mg+k,mf-k)$－图，所以有 $d_G(x)\geqslant mg(x)+k\geqslant mg(x)+m-k$，从而有 $g(x)\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}$ (1)

因为

$$d_G(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}$$
$$\Leftrightarrow md_G(x)-m(m-1)f(x)+m(k-1)\leqslant d_G(x)+k-m$$
$$\Leftrightarrow(m-1)d_G(x)\leqslant m(m-1)f(x)-k(m-1)$$
$$\Leftrightarrow d_G(x)\leqslant mf(x)-k\qquad\text{成立}$$

所以有 $d_G(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}$ (2)

由 (1)、(2) 式可知 $p(x)\leqslant\frac{d_G(x)+k-m}{m}$ 成立；

类似地可证 $q(x)\geqslant\frac{d_G(x)+m-k}{m}$。

(2) 只需证 $p(x)\leqslant\frac{d_G(x)-k}{m}$，且 $q(x)\geqslant\frac{d_G(x)+k}{m}$。先证 $p(x)\leqslant\frac{d_G(x)-k}{m}$。

$g(x)\leqslant\frac{d_G(x)-k}{m}$，显然，只需证 $d_G(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant\frac{d_G(x)-k}{m}$，即需证

$$d_G(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant\frac{d_G(x)-k}{m}$$

$$\Leftrightarrow m d_G(x) - m(m-1)f(x) + mk - m \leqslant d_G(x) - k$$
$$\Leftrightarrow (m-1)d_G(x) \leqslant m(m-1)f(x) - (mk - m + k)$$
$$\Leftrightarrow d_G(x) \leqslant mf(x) - \frac{mk - m + k}{m-1} \tag{3}$$

因为有 $d_G(x) \leqslant mf(x) - k$，所以要使（3）式成立，需有

$$k \geqslant \frac{mk - m + k}{m} \Leftrightarrow mk - k \geqslant mk - m + k \Leftrightarrow m - k \geqslant k \Leftrightarrow m \geqslant 2k$$

因为此时 $m > 2k$，所以（3）式成立，也即 $d_G(x) - (m-1)f(x) + k - 1 \leqslant \frac{d_G(x) - k}{m}$ 成立，从而 $p(x) \leqslant \frac{d_G(x) - k}{m}$ 成立；

类似地可证 $q(x) \geqslant \frac{d_G(x) + k}{m}$。

由（1）（2），引理得证。

3　主要结果及其证明

定理 1　设 G 是一个（$mg+k$，$mf-k$）－图，其中 $1 \leqslant k < m$，H 是 G 的任意一个具有 k 条边的匹配，则 G 存在一个子图 R，使得 R 有（g，f）－因子分解与 H 正交。

为了证明定理，先证明下面的引理。

引理 3　设 G 是一个（$mg+k$，$mf-k$）－图，其中 $1 \leqslant k < m$，H 是 G 的一个匹配，且 $E(H) = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$，则 G 有一个（g，f）－因子 F_1 含 e_1 而不含 $e_2, e_3, \cdots, e_k$。

证明　令 $G' = G - \{e_2, e_3, \cdots, e_k\}$，则 G' 是一个（$mg+k-1$，$mf-k$）－图，$\Delta_1(x) = \frac{1}{m}d_{G'}(x) - p(x)$，$\Delta_2(x) = q(x) - \frac{1}{m}d_{G'}(x)$，其中 $p(x)$，$q(x)$ 同前定义。

由引理 2 可得：

$k < m \leqslant 2k$ 时，

$$\Delta_1(x) = \frac{1}{m}d_{G'}(x) - p(x) \geqslant \frac{1}{m}d_{G'}(x) - \frac{d_G(x) + k - m}{m}$$
$$= \frac{1}{m}(d_{G'}(x) - d_G(x) + m - k) \geqslant \frac{1}{m}(-1 + m - k) = 1 - \frac{k+1}{m} \geqslant 0$$
$$\Delta_2(x) = q(x) - \frac{1}{m}d_{G'}(x) \geqslant \frac{d_G(x) + m - k}{m} - \frac{1}{m}d_{G'}(x)$$
$$= \frac{1}{m}(d_{G'}(x) - d_{G'}(x) + m - k) \geqslant \frac{1}{m}(m - k) > 0$$

$m > 2k$ 时，

$$\Delta_1(x) = \frac{1}{m}d_{G'}(x) - p(x) \geqslant \frac{1}{m}d_{G'}(x) - \frac{d_G(x) - k}{m}$$
$$= \frac{1}{m}(d_{G'}(x) - d_G(x) + k) \geqslant \frac{1}{m}(-1 + k) = \frac{k-1}{m} \geqslant 0$$
$$\Delta_2(x) = q(x) - \frac{1}{m}d_{G'}(x) \geqslant \frac{d_G(x) + k}{m} - \frac{1}{m}d_{G'}(x)$$
$$= \frac{1}{m}(d_G(x) - d_{G'}(x) + k) \geqslant \frac{k}{m} > 0$$

综上所述，对任意的 $x \in V(G)$，有：

$$\Delta_1(x) \geqslant \begin{cases} 1 - \dfrac{k+1}{m} \geqslant 0 & k < m \leqslant 2k \\ \dfrac{k-1}{m} \geqslant 0 & m > 2k \end{cases}$$

$$\Delta_2(x) \geqslant \begin{cases} 1-\dfrac{k}{m}>0 & k<m\leqslant 2k \\ \dfrac{k}{m}>0 & m>2k \end{cases}$$

设 S 和 T 是 $V(G')$ 的不相交子集，由于对任意的 $x\in V(G')$ 有：$p(x)<q(x)$，所以 $h(S,T)=0$。

下面说明 G' 满足引理1的条件。

$$\delta(S,T) = d_{G}{'}(T) - e(S,T) - p(T) + q(S)$$

$$= \frac{1}{m}d_{G'}(T) - p(T) + q(S) - \frac{1}{m}d_{G'}(S) + (1-\frac{1}{m})d_{G'-S}(T) + \frac{1}{m}d_{G'-T}(S)$$

$$= \Delta_1(T) + \Delta_2(S) + (1-\frac{1}{m})d_{G'-S}(T) + \frac{1}{m}d_{G'-T}(S)$$

因为 $\Delta_1(x)\geqslant 0$，$\Delta_2(x)>0$，所以 $\delta(S,T)\geqslant 0$。

（ⅰ）若存在 $G-(S\cup T)$ 的一个中分支 C，使得 $e\in E(S,V(C))$，则 $|S|\geqslant 1$，从而

$$\delta(S,T) \geqslant \Delta_2(S) \geqslant \begin{cases} 1-\dfrac{k}{m}>0, & k<m\leqslant 2k \\ \dfrac{k}{m}>0 & m>2k \end{cases}$$

因为 $\delta(S,T)$ 只取整数，所以 $\delta(S,T)\geqslant 1$。

（ⅱ）若 $e_1=uv$，u，$v\in S$，下证 $\delta(S,T)\geqslant 2$. 这时有 $d_{G'-T}(S)\geqslant 2$。

若 $d_{G'-S}(T)\neq 0$，则

$$\delta(S,T) \geqslant (1-\frac{1}{m})d_{G'-S}(T) + \frac{1}{m}d_{G'-1}(S) \geqslant 1-\frac{1}{m}+\frac{2}{m} = 1+\frac{1}{m} > 1$$

若 $d_{G'-S}(T)=0$，

ⅰ）当 $T=\phi$ 时，有：$\delta(S,T)=q(S)\geqslant g(S)+|S|\geqslant |S|\geqslant 2$

ⅱ）当 $T\neq\phi$ 时，$|S|\geqslant \max\limits_{x\in T} d_{G'}(x)=\Delta_{G'}(T)$

当 $k<m\leqslant 2k$ 时，

① 若 $\Delta_{G'}(T)\geqslant k$，则

$$\delta(S,T) \geqslant \Delta_2(S) + \frac{1}{m}d_{G'-T}(S) \geqslant k(1-\frac{k}{m}) + \frac{2}{m}$$

$$= \frac{1}{m}(km-k^2+2) = \frac{1}{m}(m+km-m-k^2+1+1)$$

$$= \frac{1}{m}[m+m(k-1)-(k^2-1)+1]$$

$$= \frac{1}{m}\{m+(K-1)[m-(k+1)]+1\}$$

$$\geqslant \frac{1}{m}(m+1) > 1$$

② 若 $\forall x\in T$，$d_{G'}(x)\leqslant k-1$，则

$$mg(x) + k - 1 \leqslant d_{G'}(x) \leqslant k-1$$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \text{ 且 } d_{G'}(x) = k-1$$

$$\Rightarrow d_G(x) \leqslant d_{G'}(x) + 1 = k-1+1 = k(\forall x\in T)$$

故 $d_G(x)-(m-1)g(x)-k+1=d_G(x)-k+1\leqslant k-k+1=1$，而 $f(x)\geqslant q(x)\geqslant g(x)+1\geqslant 1$，所以 $q(x)=d_G(x)-(m-1)g(x)-k+1=d_G(x)-k+1\leqslant k-k+1=1$。

又因为 $q(x)\geqslant g(x)+1\geqslant 1$，所以 $q(x)=1$（$\forall x\in T$）；所以有：

$$\delta(S,T) = d_{G'-S}(T) + q(S) - p(T) = q(S) - p(T)$$

$$\begin{aligned}&\geqslant q(S)-(q(T)-|T|)\\&=q(S)-(|T|-|T|)\\&=q(S)\geqslant|S|\geqslant 2\end{aligned}$$

当 $m>2k$ 时，

① 若 $\Delta_{G'}(T)\geqslant m$，则 $\delta(S,T)\geqslant\Delta_2(S)+\frac{1}{m}d_{G'-T}(S)\geqslant m\frac{k}{m}+\frac{2}{m}=k+\frac{2}{m}>1$；

② 若对任意的 $x\in T$，$d_{G'}(x)\leqslant m-1$，则

$$mg(x)+k-1\leqslant d_{G'}(x)\leqslant m-1$$

$$\Rightarrow mg(x)\leqslant m-k<m\Rightarrow g(x)=0(\forall x\in T)$$

此时可断言，$p(x)=0$（$\forall x\in T$）。事实上，由 $p(x)$ 的定义及 $g(x)=0$ 知，只需证：

$$d_{G'}(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant 0(\forall x\in T)$$

可分两种情况讨论：

① 若 $f(x)=1$，则由 $d_{G'}(x)\leqslant mf(x)-k$ 知

$$d_{G'}(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant mf(x)-k-(m-1)f(x)+k-1=f(x)-1=0$$

② 若 $f(x)\geqslant 2$，则由 $d_{G'}(x)\leqslant m-1$（$\forall x\in T$）知

$$d_{G'}(x)-(m-1)f(x)+k-1\leqslant(m-1)-2(m-1)+k-1=k-m<0$$

由①、②及 $f(x)\geqslant q(x)\geqslant g(x)+1\geqslant 1$ 即可知断言成立；

于是 $\delta(S,T)=d_{G'-S}(T)-p(T)+q(S)\geqslant q(S)\geqslant 2$。

综上所述，G' 满足引理 1 的条件，从而 G' 有一个（p，q）－因子 F_1 含 e_1，显然 F_1 是 G 的一个含 e_1 而不含 e_2，e_3，…，e_k 的（g，f）－因子。

定理 1 的证明：设 $E(H)=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$，由引理 3 知，$G$ 有一个（g，f）－因子 F_1 含 e_1 而不含 e_2，e_3，…，e_k。由 F_1 是一个（p，q）－因子，可知 $G-E(F_1)$ 是一个（$(m-1)g(x)+k-1$，$(m-1)f(x)-k+1$）－图，且 $H-e_1$ 是 $G-E(F_1)$ 的一个具有 $k-1$ 条边的匹配。类似于引理 3 的讨论，可以证明 $G-E(F_1)$ 有一个（g，f）－因子 F_2 含 e_2 而不含 e_3，e_4，…，e_k，如此下去，可以证明 G 有 k 个（g，f）－因子 F_1，F_2，…，F_k 分别包含 e_1，e_2，…，e_k。令 $V(R)=V(G)$，$E(R)=E(\bigcup_{i=1}^{k}F_i)$，则 R 即为所要求的子图，定理得证。

参考文献：

[1] Bondy J A，Murty U S R. Graph Theory with Application [M]. London：MacMillan，1976.

[2] Liu Guizhen. Orthogonal [$k+1$，$k-1$] －factorizations in graph [J]. J Statistical Planning and Inference，1996，51：195-200.

[3] 闫桂英，潘教峰. 具有正交的（g，f）－因子分解的子图 [J]. 中国科学，A 辑，1997，27（11）：961-967.