

文章编号:1001-2486(2001)06-0099-05

## 高速精密主轴径向误差的测试\*

王建敏,戴一帆,王宪平

(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南长沙 410073)

**摘要** 对高速精密主轴的径向误差进行测试,主轴的高速可能会使误差分离的方法不再成立,通过模态分析,验证了该系统的误差分离的可能性。在测试中常用精密主轴来直接代替精密钢球进行测试,这样会带来测量误差,本文对这个问题进行了分析。另外还对传感器探头安装误差进行了分析。

**关键词** 两点测量法;模态分析;精密主轴;安装误差

**中图分类号** TH161+.21 **文献标识码** A

## Roundness Measurement of High-speed Precision Spindle

WANG Jian-min, DAI Yi-fan, WANG Xian-ping

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** In the test of high-speed precision spindle, the high speed may make error separation impossible. In this paper, modal analysis is applied to testify the possibility of error separation. Then the error due to testing with precision spindle instead of precision ball is analyzed, and the setup error of sensors is analyzed as well.

**Key words** two-point method; modal analysis; precision spindle; setup error

在忽略轮廓影响的前提下,对精密回转主轴的径向误差的测量,采用了传感器探头成相互垂直安放的两点法。但由于主轴的高速运动,决定了主轴究竟是工作在刚性状态还是工作在柔性状态,而主轴的工作状态又直接影响到能否运用误差分离的方法来对高速精密主轴进行测试。

精密主轴和精密钢球都是测试中的被测试对象。精密钢球应用在两点法的测量中,由于在任意测量位置时其被测截面都是圆,不会因被测截面的变化而带来测量误差,是比较好的测试对象,精密主轴则不一样,其被测截面是一椭圆,在任意位置给测量结果叠加了不同的径向值,从而造成一定的测量误差,相对精密钢球来说不是理想的测试对象。这样用精密主轴来直接进行测试,会给测试结果带来误差,需要进行分析。

传感器探头安装偏心也是影响系统误差的原因之一,由于安装偏心是不可避免的,因此,需要分析安装偏心的多大范围内给测量结果带来的误差可忽略。

## 1 系统的模态分析

回转主轴的转速如果低于系统的最低临界转速,这个主轴就称为刚性轴<sup>[2]</sup>。主轴工作在刚性状态时,振型以一阶为主,被测的各要素的耦合仅是线性耦合,符合误差分离的测试原理,即能够运用两点法来进行测试,分离出各项误差,但如果主轴工作在柔性状态下,则被测各要素间的耦合就是非线性耦合,不符合误差分离的测试前提,故不能运用两点法来进行测试。因此要对高速主轴的工作模态进行分析,分析其工作状态。

如图1所示一个高速主轴系统模型,由于被测试部分的质量和体积相对较大,重量基本上集中在上面的圆盘部分,下面有两个可以看成是刚性支撑的轴承(已知轴承的刚度较大),其驱动是通过下部的高频马达实现的,这里没有画出。现对这一刚性支撑的细长轴系统进行分析和简化。设以坐标 $x$ 、 $y$ 和转角 $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 表示圆盘在运动过程中任意瞬时的位置, $m$ 为圆盘的质量,极转动惯量为 $J_d$ ,直径转动惯量为

\* 收稿日期:2001-04-01  
基金项目:国防重点实验室基金资助(99JS53.6.1KG0112)  
作者简介:王建敏(1973-)男,硕士生。

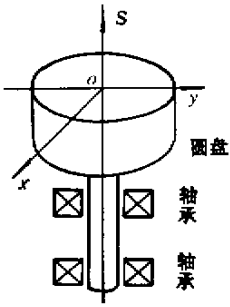


图1 结构模型

Fig.1 Mode of structure

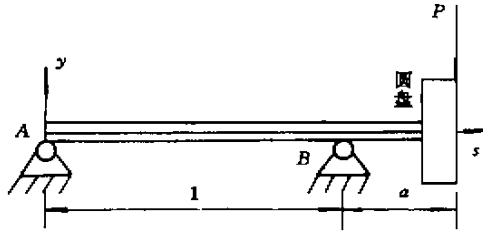


图2 简化模型

Fig.2 Simplified mode

$J_p, \Omega$  表示主轴的转动角速度。图2为系统的简化模型。则圆盘的动能为：

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}[J_d(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + J_p\Omega^2 - 2J_p\Omega\dot{\theta}_y\dot{\theta}_x] \quad (1)$$

设广义坐标为：

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \theta_x, q_4 = \theta_y$$

广义力表示为：

$$U_1 = -k_{11}x - k_{14}\theta_y; U_2 = -k_{22}y + k_{23}\theta_x; \\ U_3 = k_{32}y - k_{33}\theta_x; U_4 = -k_{41}x - k_{44}\theta_y$$

其中  $k_{11}$  为圆盘中心  $o$  在  $x$  方向有单位位移时所需加于  $o$  点而沿  $x$  方向的力； $k_{22}$  为  $o$  点在  $y$  方向有单位位移时所需加于  $o$  点而沿  $y$  方向的力； $k_{33}$  为圆盘绕  $ox$  轴有单位转角时所需加的对  $ox$  轴的力矩； $k_{44}$  为圆盘绕  $oy$  轴有单位转角时所需加的对  $oy$  轴的力矩； $k_{14}$  为圆盘绕  $oy$  轴有单位转角时所需加于  $o$  而沿  $x$  方向的力； $k_{23}$  为圆盘绕  $ox$  轴有单位转角时所需加于  $o$  而沿  $y$  方向的力； $k_{32}$  为  $o$  点在  $y$  方向有单位位移时所需对  $ox$  轴的力矩； $k_{32}$  为  $o$  点在  $x$  方向有单位位移时所需对  $oy$  轴的力矩。

应用 Lagrange 方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = U_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

则

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{14}\theta_y = 0 \\ m\ddot{y} + k_{22}y - k_{23}\theta_x = 0 \\ J_d\ddot{\theta}_x + H\dot{\theta}_y - k_{32}y + k_{33}\theta_x = 0 \\ J_d\ddot{\theta}_y - H\dot{\theta}_x + k_{41}x + k_{44}\theta_y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $H = J_p\Omega$ 。

上式是一组齐次线性微分方程，求解特征根就可以得到转子振动的自然频率  $\tilde{\omega}_n$ 。各刚度系数有如下关系：

$$k_{11} = k_{22} = k_{rr}; k_{33} = k_{44} = k_{\varphi\varphi}; k_{14} = k_{41} = k_{23} = k_{32} = k_{r\varphi} = k_{\varphi r}$$

令  $z = x + iy; \varphi = \theta_y - i\theta_x$  则(2)式变为：

$$\begin{cases} m\ddot{z} + k_{rr}z + k_{r\varphi}\varphi = 0 \\ J_d\ddot{\varphi} - H\dot{\varphi} + k_{\varphi r}z + k_{\varphi\varphi}\varphi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

令  $\tilde{\omega}_{rr}^2 = k_{rr}/m; \tilde{\omega}_{r\varphi}^2 = k_{r\varphi}/m; \tilde{\omega}_{\varphi\varphi}^2 = k_{\varphi\varphi}/J_d; \tilde{\omega}_{\varphi r}^2 = k_{\varphi r}/J_d$ 。设方程的解为：

$$z = z_0 e^{i\tilde{\omega}_n t}; \varphi = \varphi_0 e^{i\tilde{\omega}_n t}$$

代入(3)式得：

$$(-\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\omega}_{rr}^2)z_0 + \tilde{\omega}_{r\varphi}^2\varphi_0 = 0$$

$$\tilde{\omega}_{\varphi\varphi}^2 \approx 0 + [ -\tilde{\omega}_n^2 + (J_p/J_d)\Omega\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{\varphi\varphi}^2 ] p_0 = 0 \quad (4)$$

它的特征方程即频率方程为

$$\tilde{\omega}_n^4 - (J_p/J_d)\Omega\tilde{\omega}_n^3 - (\tilde{\omega}_{rr}^2 + \tilde{\omega}_{\varphi\varphi}^2)\tilde{\omega}_n^2 + (J_p/J_d)\Omega\tilde{\omega}_{rr}^2\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{rr}^2\tilde{\omega}_{\varphi\varphi}^2 - \tilde{\omega}_{r\varphi}^2\tilde{\omega}_{\varphi r}^2 = 0 \quad (5)$$

所要测量的圆盘的质量  $m = 0.025\text{kg}$ , 半径  $R = 1\text{cm}$ , 高  $h = 1\text{cm}$ , 两支点的跨距为  $l = 2.5\text{cm}$ , 轴段直径  $d = 0.3\text{cm}$ 。圆盘中心至最近支点的距离为  $a = 1\text{cm}$ , 转速为  $\Omega = 10\,000\text{rpm}$ , 材料的弹性模量为  $E = 20.58 \times 10^6\text{N/cm}^2$ 。

当转轴的  $o$  点受  $P$  力作用时(见图 2), 此点的挠度及截面转角分别为:

$$r = \frac{Pa^2}{3EI}(l+a) = \frac{28Pl^3}{375EI}, \varphi = \frac{Pa}{6EI}(2l+3a) = \frac{16Pl^2}{75EI}$$

当转轴在  $o$  处、垂直于  $s$  轴的平面内受力矩  $M$  作用时, 此点的挠度和转角分别为:

$$r = \frac{16Ml^2}{75EI}, \varphi = \frac{Ml}{5EI}$$

因此转轴在  $o$  处受单位力或单位力矩时所产生的挠度或转角即柔度系数为:

$$a_{rr} = \frac{28l^3}{375EI}, a_{\varphi\varphi} = \frac{l}{5EI}, a_{r\varphi} = a_{\varphi r} = \frac{16l^2}{75EI}$$

按照刚度系数的定义或刚度矩阵和柔度矩阵互为逆矩阵的关系, 可求得刚度系数:

$$k_{rr} = -k_c, k_{r\varphi} = k_{\varphi r} = \frac{16l}{25}k_c, k_{\varphi\varphi} = -\frac{28l^2}{75}k_c, \text{其中 } k_c = \frac{1125EI}{172l^3}$$

则可计算出  $k_c$  及  $\tilde{\omega}_{rr}^2$ 、 $\tilde{\omega}_{\varphi\varphi}^2$ 、 $\tilde{\omega}_{r\varphi}^2$ 、 $\tilde{\omega}_{\varphi r}^2$  的值, 代入(5)式得:

$$\tilde{\omega}_n^4 - 2\Omega\tilde{\omega}_n^3 + 46.28 \times 10^6\tilde{\omega}_n^2 - 8.96 \times 10^6\Omega\tilde{\omega}_n + 1.820 \times 10^{13} = 0 \quad (6)$$

由(6)式计算得:

$$\omega_{n1} = 227.1991/\text{s}; \quad \omega_{n2} = 17663.8231/\text{s}$$

由于  $\Omega/60 < \tilde{\omega}_{n1}$ , 此轴工作在刚性状态下, 为刚性轴, 可以用两点法进行误差分离的测试。

## 2 精密主轴代替精密钢球的测试条件

图 3 所示的是探头测量精密钢球的情况, 可以观察到, 在小偏心条件下<sup>[3]</sup>, 测量轮廓总是一个正圆。相应的测量误差:

$$\Delta r = r' - r = 0$$

图 4 所示的是探头测量主轴的情况, 此时测到的轮廓是椭圆, 设主轴的偏心角为  $\theta$ , 在轴截面上探头在任意时刻的转角为  $\alpha$ , 则由于主轴安装倾斜或探头安装偏心而引起的测量误差为:

$$\Delta r = r' - r = r(\sec\theta - 1)\sin\alpha \quad (7)$$

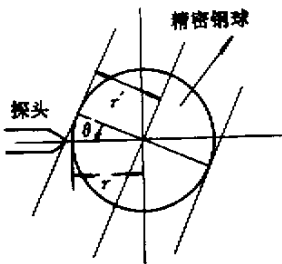


图 3 探头和精密钢球

Fig.3 Probe and precision ball

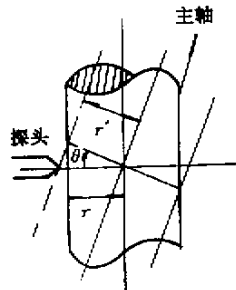


图 4 探头和精密主轴

Fig.4 Probe and precision spindle

因  $\sec\theta - 1 \approx \frac{\theta^2}{2}$  (当  $\theta$  很小时), 由(7)式, 所要求的最大安装夹角为:

$$|\theta|_{\max} = \sqrt{\frac{2\Delta r_{\max}}{r}} \quad (8)$$

若系统  $r = 10\text{mm}$  ,探头至主轴支撑点的距离为  $a = 10\text{mm}$  ,设测试轴线与被测轴线的安装偏心量为  $e$  ,若已知偏心量较大  $e = 10\mu\text{m}$  则 :

$$\theta_{\max} = \arctan\left(\frac{e}{a}\right) \approx \frac{e}{a} \quad (9)$$

由(8)式和(9)式得 :

$$\Delta r_{\max} = \frac{re^2}{2a^2} = 5\text{nm}$$

探头的测量值用  $A$  表示 ,若主轴的跳动较小 ,取  $A = 0.2\mu\text{m}$  ,则误差占测量值的百分比 :

$$\frac{\Delta r_{\max}}{A} = 2.5\%$$

由(9)式知道 ,偏心值越小 ,此误差所占比例越小。然而这个误差是否跟测量位置有关 ,下面来观察图5 测量轴线与被测轴线的夹角为  $\theta$  ,无论探头在位置 I 或在位置 II ,其对应位置的主轴截面都是一样的椭圆。此图表明 ,椭圆的大小与位置无关 ,仅与夹角  $\theta$  有关 ,亦即测量误差并没有因位置改变而放大或缩小 ,因此在安装时 ,要想办法减小测量轴线和被测主轴轴线的夹角 ,至于测量位置可不用考虑。

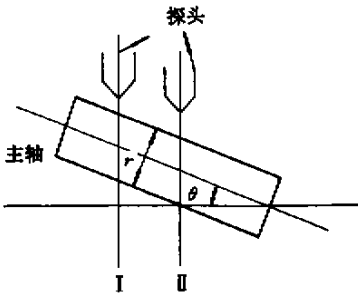


图5 探头在不同的位置

Fig.5 The different position of probe

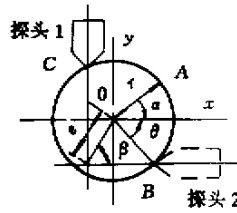


图6 两点法测试位置图

Fig.6 The placement of probes with two-method

### 3 探头安装位置造成的误差

当测头的位置和被测主轴的轴线有偏心时 ,相应的偏心距为  $e$  ,如图与  $x$  方向的偏心角为  $\beta$  ,设任意时刻的跳动发生在位置  $A$  ,对应旋转角为  $\alpha$  ,如图6。

对于跳动  $A$  ,探头的测量值分别为 :

$$C_B = C_A \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2 \beta}{r^2}} \quad (10)$$

$$C_C = C_A \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \beta}{r^2}} \quad (11)$$

其中  $C_A$  表示  $A$  处的跳动值 , $C_B$  表示探头在  $B$  处的测量值 , $C_C$  表示探头在  $C$  处的测量值。用  $C_Z$  表示两探头测量值的合成值 :

$$C_Z^2 = C_A^2 - \frac{e^2}{r^2} (C_A^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + C_A^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \quad (12)$$

对(12)式求极值后得到  $C_Z$  与  $C_A$  的表达式 :

$$\frac{C_Z}{C_A} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{2r^2}} \quad (13)$$

由(13)式可以看出 ,小偏心条件下 ,读数的误差是可以忽略的。

下面进行探头位置误差的确定,取  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta$  表示探头  $B$  与方向  $x$  的夹角,见图 6,则探头  $B$  的测量值占跳动在  $x$  方向的分量相对值:

$$\frac{C_A \cos \alpha - C_A \cos \alpha \cos \theta}{C_A \cos \alpha} = 1 - \cos \theta \quad (14)$$

如果要使此误差相对值仅占 1%, 则所要求的  $\theta$  值:  $\theta \leq 10.2'$

#### 4 结论

(1) 误差分离的原理要求主轴的被测量是线性耦合,对高速精密主轴的测试,其高速可能使这一测试前提不能成立,因此需要作模态分析,以确定误差分离的可能性。

(2) 在实用过程中,用精密主轴来代替精密钢球进行测试的方法是可行的,由此带来误差可以忽略。

(3) 传感器探头的安装偏心在一定的范围内,其读数误差也可以忽略不计。

#### 参考文献:

- [1] 花国梁. 精密测量方法 [M]. 北京: 中国计量出版社, 1990.
- [2] 闻邦椿等. 高等转子动力学—理论、技术与应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [3] 熊有伦. 精密测量的数学方法 [M]. 北京: 中国计量出版社, 1989.

