

文章编号: 1001-2486 (2002) 02-0006-05

考虑  $J_2$  项摄动的卫星编队飞行\*

张玉锴, 戴金海

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 针对参考卫星运行于圆轨道的编队飞行, 分析了  $J_2$  项摄动的影响。在此基础上提出了一种方法, 通过调整环绕卫星的半长轴, 大大减小了  $J_2$  项摄动对编队飞行的破坏作用。此外, 基于冲量假设估计了编队保持的代价。数值结果表明, 调整长半轴的卫星编队可以长期保持, 节省了大量的控制燃料。

**关键词:** 编队飞行; 轨道设计;  $J_2$  项摄动; 轨道控制

**中图分类号:** V412      **文献标识码:** A

Satellite Formation Flying with  $J_2$  Perturbation

ZHANG Yu-kun, DAI Jin-hai

(College of Aerospace &amp; Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** As to the formation flying with the reference satellite running on the circle orbit, the  $J_2$  effect is analyzed. On this basis, a method is presented, which can greatly mitigate the breakage of the  $J_2$  term by adjusting the semi-major axis of the flying-around satellite. Furthermore, the cost required for formation-keeping is evaluated under impulse assumption. Numerical results show that satellite formations with semi-major axis adjustments will last much longer, and save much more fuel.

**Key Words:** formation flying; orbit design;  $J_2$  perturbation; orbit control

近年来, 由于小卫星技术特别是微型卫星技术的发展, 国际上出现了一种新的卫星应用方向, 即小卫星编队飞行<sup>[1,2]</sup>。它是指若干颗小卫星在围绕地球运动的同时, 彼此之间距离较近且保持某种特定的位置关系, 在运行过程中各小卫星联系密切、互相协同, 共同完成某项空间任务。编队飞行作为小卫星开拓了广阔的应用领域, 成为降低空间任务费用和增加任务灵活性的重要手段。

目前, 国内外的学者在小卫星编队飞行的运动分析和轨道设计方面已做了一些有益的工作, 但多是在二体假设下得出了一些理论结果, 然后通过数值计算分析了摄动因素对卫星编队的影响<sup>[3-5]</sup>。在编队飞行的轨道设计过程中就考虑摄动因素的相关工作还很少发现。

## 1 理想的编队飞行及摄动分析

## 1.1 理想的卫星编队飞行

为描述方便, 引入参考卫星、环绕卫星和绕飞轨道的概念。参考卫星一般位于编队的中心, 是整个编队的参考点。环绕卫星是指编队中的其他卫星, 它们在围绕地球运动的同时, 也周期性的围绕参考卫星运动。环绕卫星相对于参考卫星的运动轨迹(在参考卫星的轨道坐标系中)称为绕飞轨道。编队飞行主要研究的是环绕卫星相对于参考卫星的运动。本文中, 假设参考卫星运行于圆轨道, 环绕卫星运行于近圆轨道。

作为问题的出发点, 首先在二体假设下研究理想的编队飞行。若认为地球是均质圆球体, 不考虑轨道摄动, 则卫星沿开普勒轨道运行。这种情况下, 可以获得理想的编队飞行, 即绕飞轨道为闭合椭圆。根据以前的研究结果<sup>[4,5]</sup>, 参考卫星和环绕卫星的轨道根数应当满足以下约束: 1) 轨道半长轴相同, 确保轨道周期相同, 绕飞轨道闭合; 2) 轨道倾角及偏心率有微小的不同, 确保飞行时各卫星适当分离; 3) 纬度幅角之差为小量, 确保相伴运动。设  $a, e, i, \omega, \Omega$  和  $M$  分别为经典轨道根数,

\* 收稿日期: 2001-08-29  
基金项目: 国家 863 基金资助项目 (863-2-5-2.4)  
作者简介: 张玉锴 (1975-), 男, 博士生。

$f$  为真近点角,  $u = \omega + f$  为纬度幅角, 下标  $c$  和  $h$  分别表示参考卫星和环绕卫星, 记  $\Delta\sigma = \sigma_h - \sigma_c$  ( $\sigma$  为以上轨道参数) 表示环绕卫星和参考卫星的轨道参数之差。由假设, 参考卫星运行于圆轨道, 则  $e_c = 0$ , 取  $\omega_c = 0$ 。根据上述讨论, 在理想的卫星编队中:  $\Delta a = 0$ ,  $\Delta e = e_h$ 、 $\Delta i$ 、 $\Delta\Omega$  和  $\Delta u$  均为小量。

## 1.2 编队飞行的摄动分析

在平方反比引力场条件下, 如果不考虑摄动影响, 可以长期保持稳定的编队构型。但由于摄动因素的存在, 各卫星受到的摄动影响不完全相同, 编队构型会逐渐发生变化。研究表明<sup>31</sup>, 对于轨道高度为 800km 的编队飞行, 地球扁率  $J_2$  项摄动是破坏卫星编队的主要因素, 其对相对运动的影响比其他摄动因素至少高一个数量级。因此, 这里仅研究  $J_2$  项摄动对编队飞行的影响。

在  $J_2$  项摄动作用下, 利用平根数法, 可得轨道根数的一阶长期项变化<sup>61</sup>:

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 & \dot{e} = 0 & \dot{i} = 0 \\ \dot{\Omega} = -2A \cos i = f_{\Omega}(a, e, i) \\ \dot{\omega} = A(5 \cos^2 i - 1) = f_{\omega}(a, e, i) \\ \dot{M} = n + A(3 \cos^2 i - 1) \sqrt{1 - e^2} = f_M(a, e, i) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $A = 3J_2 n R_e^2 / (4p^2)$ ,  $R_e$  为地球赤道半径,  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  为平均轨道角速度,  $p = a(1 - e^2)$  为轨道半通径, 轨道根数均取平根数。对于近圆轨道 (即  $e$  为 0 或极小), 可以定义  $\theta = \omega + M$  为平纬度幅角, 综合考虑  $\omega$  和  $M$  的漂移, 则:

$$\dot{\theta} = \omega + \dot{M} = n + A[(5 \cos^2 i - 1) + (3 \cos^2 i - 1) \sqrt{1 - e^2}] = f_{\theta}(a, e, i) \quad (2)$$

由式 (1) 和 (2) 可知, 在  $J_2$  项摄动作用下,  $\Omega$  和  $\theta$  产生漂移, 而  $a$ 、 $e$  和  $i$  不变。鉴于参考卫星和环绕卫星的轨道根数之差为小量, 可通过级数展开并精确到一阶项求得相对变化率  $\Delta\dot{\Omega}$  和  $\Delta\dot{\theta}$ :

$$\begin{cases} \Delta\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_h - \dot{\Omega}_c = \partial f_{\Omega} / \partial a \cdot \Delta a + \partial f_{\Omega} / \partial e \cdot \Delta e + \partial f_{\Omega} / \partial i \cdot \Delta i \\ \Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}_h - \dot{\theta}_c = \partial f_{\theta} / \partial a \cdot \Delta a + \partial f_{\theta} / \partial e \cdot \Delta e + \partial f_{\theta} / \partial i \cdot \Delta i \end{cases} \quad (3)$$

式中, 各偏导数可由式 (1) 和 (2) 求得:

$$\begin{cases} \partial f_{\Omega} / \partial a = 7A \cos i / a & \partial f_{\Omega} / \partial e = -8ae \cos i / p & \partial f_{\Omega} / \partial i = 2A \sin i \\ \partial f_{\theta} / \partial a = -3n / (2a) - 7A / (2a) \cdot [(5 \cos^2 i - 1) + (3 \cos^2 i - 1) \sqrt{1 - e^2}] \\ \partial f_{\theta} / \partial e = Aae \cos i / p \cdot [4(5 \cos^2 i - 1) + 3(3 \cos^2 i - 1) \sqrt{1 - e^2}] \\ \partial f_{\theta} / \partial i = -A \sin 2i (5 + 3 \sqrt{1 - e^2}) \end{cases} \quad (4)$$

式中, 轨道参数  $a$ 、 $e$  和  $i$  取参考卫星的值。因为  $e_c = 0$  及  $\Delta a = 0$ , (3) 式可简化为:

$$\Delta\dot{\Omega} \frac{3}{2} J_2 n \frac{R_e^2}{a^2} \sin i \Delta i, \Delta\dot{\theta} = -6 J_2 n \frac{R_e^2}{a^2} \sin 2i \Delta i \quad (5)$$

上式表明, 对于理想的编队飞行, 由于参考卫星运行于圆轨道, 且二者的半长轴严格相等, 从长期意义上讲, 相对摄动仅与二者轨道倾角之差有关。经过时间  $T$ , 二者的升交点赤经之差和平纬度幅角之差的变化分别为:

$$\delta\Omega = \Delta\Omega_T - \Delta\Omega_0 = \Delta\dot{\Omega} \cdot T \quad \delta\theta = \Delta\theta_T - \Delta\theta_0 = \Delta\dot{\theta} \cdot T \quad (6)$$

式中, 下标 0 表示初值。

轨道根数漂移  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  会导致卫星不断偏离其标称位置, 如图 1 所示。图中坐标系为轨道坐标系, 定义为: 原点在卫星质心,  $ox$  轴取卫星的矢径方向,  $oz$  轴沿卫星轨道面正法线方向,  $oy$  轴由右手法则确定。A 点为卫星的标称位置, 由于  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  的存在, 实际位置变为 C 点。这样, 会在  $y$  和  $z$  两个方向产生偏离 (记为  $\Delta y$  和  $\Delta z$ ), 对于近圆轨

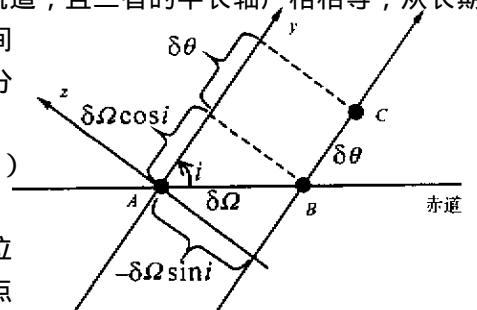


图 1 轨道根数漂移与相对位置的关系

Fig.1 Relation between drift of orbital elements and relative position

道,有:

$$\Delta y = a(\delta\Omega\cos i + \delta\theta) \quad (7)$$

$$\Delta z = a(-\delta\Omega\sin i\cos u) \quad (8)$$

式(5)和(6)表明,  $J_2$ 项摄动将使  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  单调变化,由此可见,其对编队飞行的破坏作用表现在:1)在运动方向(即  $y$  方向)的偏离单调增大;2)在轨道面正法线方向(即  $z$  方向)的偏离呈现简谐振荡变化,且振幅单调增大。

## 2 考虑 $J_2$ 项摄动的编队飞行

### 2.1 改进的编队设计

下面,通过调整环绕卫星的半长轴,消除  $y$  方向的漂移。由式(7),令  $\Delta y = 0$ ,需满足:

$$\delta\dot{\Omega}\cos i + \delta\dot{\theta} = 0 \quad (9)$$

仅令  $e = 0$ ,而使  $\Delta a \neq 0$ ,则式(3)化为:

$$\Delta\dot{\Omega} = \frac{3}{2}J_2n\frac{R_e^2}{a^2}\left(\frac{7}{2}\cos i\cdot\frac{\Delta a}{a} + \sin i\cdot\Delta i\right) \quad (10a)$$

$$\Delta\dot{\theta} = -\frac{3}{2}n\left[1 + \frac{7}{2}J_2\frac{R_e^2}{a^2}(2\cos 2i + 1)\right]\frac{\Delta a}{a} - 6J_2n\frac{R_e^2}{a^2}\sin 2i\cdot\Delta i \quad (10b)$$

将式(10)代入方程(9),可解得:

$$\Delta a = -\frac{14J_2R_e^2a\sin 2i}{4a^2 + 7J_2R_e^2(3\cos 2i + 1)}\Delta i \quad (11)$$

式(11)表明半长轴的调整量  $\Delta a$  与  $\Delta i$  是正比关系,比例系数随参考卫星的半长轴和轨道倾角变化,图2给出了轨道高度从300km变化到2300km,倾角由 $0^\circ$ 到 $180^\circ$ 时比例系数的变化情况。由图可知,该系数主要由轨道倾角决定,随轨道高度变化缓慢。

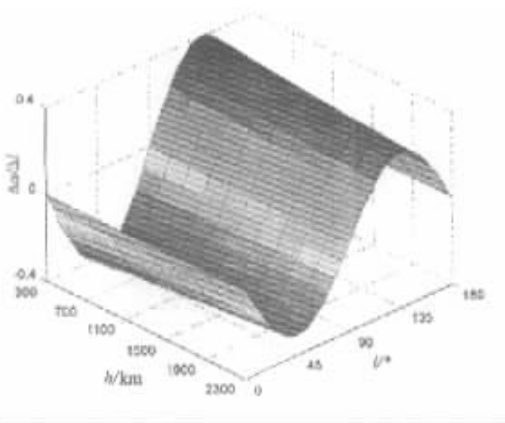


图2  $\Delta a/\Delta i$  的变化图

Fig.2 Plot of  $\Delta a/\Delta i$

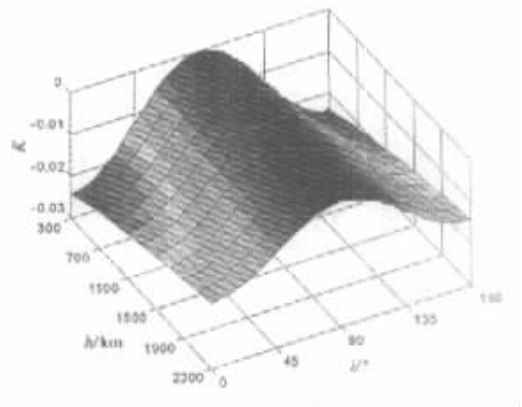


图3 系数  $K$  的变化图

Fig.3 Plot of the coefficient  $K$

### 2.2 改进设计的编队飞行的摄动分析

引入  $\Delta a$  校正后,为分析  $z$  方向的偏离规律,需要重新计算  $\Delta\dot{\Omega}$ 。若记长半轴严格相等时  $\Delta\dot{\Omega}$  的变化率为  $\Delta\dot{\Omega}_{\Delta a=0}$ ,则引入  $\Delta a$  后变为:

$$\Delta\dot{\Omega} = (1 + K) \cdot \Delta\dot{\Omega}_{\Delta a=0} \quad (12)$$

式中,  $K$  表示引入  $\Delta a$  前后  $\Delta\dot{\Omega}$  的变化比例,可由式(5)和(10a)求得:

$$K = \frac{7}{2}\cos i\cdot\frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{1}{\sin i\Delta i} = -\frac{49J_2R_e^2\cos 2i + 1}{4a^2 + 7J_2R_e^2(3\cos 2i + 1)} \quad (13)$$

图3所示为参数  $K$  随参考卫星的轨道高度和轨道倾角的变化图,该图表明  $K$  始终是一个较小的负数或0。这说明,引入  $\Delta a$  校正后的编队飞行中,升交点赤经的相对漂移率降低了0~3%;进一步由式

(8),  $z$  方向偏离振幅的增长速度减慢了 0~3%。

### 3 编队保持的能量估计

上述分析表明,  $J_2$  项摄动会引起  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  而使卫星编队发散, 为保持长期编队飞行, 需通过控制消除摄动引起的相对漂移。基于冲量假设, 下面给出一种编队保持策略。假设只对环绕卫星进行控制, 并且控制加速度的大小、方向可以是任意的。

根据高斯型摄动方程<sup>[6]</sup>, 可得:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W \quad (14)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = n - \frac{1}{nae} \left[ S \left( \frac{2r}{a} + \frac{e \sqrt{1-e^2} \cos f}{1+\sqrt{1-e^2}} \right) - T \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin f}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \quad (15)$$

式中,  $S$ ,  $T$ ,  $W$  分别为控制加速度的三个分量,  $S$  为径向分量,  $W$  沿轨道平面正法线方向,  $S$ ,  $T$ ,  $W$  构成右手坐标系。

根据式(14)和(15), 为不引入新的误差且燃料消耗尽量少, 采取控制策略依次消除相对漂移  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$ , 在纬度幅角  $u = \pm 90^\circ$  时, 沿轨道法向施加控制冲量消除  $\delta\Omega$ , 控制冲量大小为

$$\Delta V_W = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}{r} \delta\Omega \quad (16)$$

式中,  $r$  为该时刻的轨道半径。

在远地点沿径向加控制冲量, 消除漂移  $\delta\theta$  及由控制  $\delta\Omega$  引入的间接漂移, 控制冲量为:

$$\Delta V_S = - \frac{na(1+\sqrt{1-e^2})}{\chi(1-e)+(2-e)\sqrt{1-e^2}} (\delta\theta + \cos i \cdot \delta\Omega) \quad (17)$$

这样, 由(6)式计算出  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  后, 根据式(16)和(17)可分别计算出相应的速度增量。对于半长轴严格相等的编队飞行, 需要依次执行上述两步控制以维持编队飞行。而对于引入  $\Delta a$  校正后的编队飞行, 因为保证了(9)式的成立, 所以  $\delta\theta$  和  $\delta\Omega$  由法向冲量(16)式同时消除。这不仅节省了燃料, 还降低了编队保持的操作难度。

### 4 数值仿真

图4所示为二体假设下的理想编队飞行, 图中“\*”表示参考卫星, “o”表示环绕卫星的初始位置, 绕飞轨道的半径为 1km, 对应的参考卫星和环绕卫星的轨道根数表1所示, 其中半长轴严格相等, 即  $\Delta a = 0$ 。在  $J_2$  项摄动的作用下, 绕飞轨道经过 5 天(即运行 68.5 圈)后的演变如图5所示。为消除  $y$  方向的长期偏离, 根据式(11)调整环绕卫星的半长轴, 即  $\Delta a = -0.001707\text{km}$ , 图6为调整后相同条件下绕飞轨道的演化情况。比较图5和6发现, 引入  $\Delta a$  对  $J_2$  项摄动的抑制作用是非常明显的。

根据第3节的讨论, 可比较引入  $\Delta a$  前后编队保持所需的能量。当  $\Delta a = 0$  时, 在  $J_2$  项摄动作用下运行一圈的相对漂移  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  分别为  $2.8039 \times 10^{-5}$  度和  $-1.4418 \times 10^{-4}$  度, 需消耗的法向速度增量为  $0.002755\text{m/s}$ , 径向速度增量为  $0.008093\text{m/s}$ , 总的  $\Delta V$  为每圈  $0.01084\text{m/s}$ , 运行一年总共需要  $47.6093\text{m/s}$ 。加入  $\Delta a$  校正后, 在  $J_2$  项摄动作用下编队飞行一圈的相对漂移  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  分别为  $2.7811 \times 10^{-5}$  度和  $-1.9016 \times 10^{-5}$  度, 编队保持仅需消耗法向速度增量  $0.002733\text{m/s}$ , 运行一年的  $\Delta V$  为

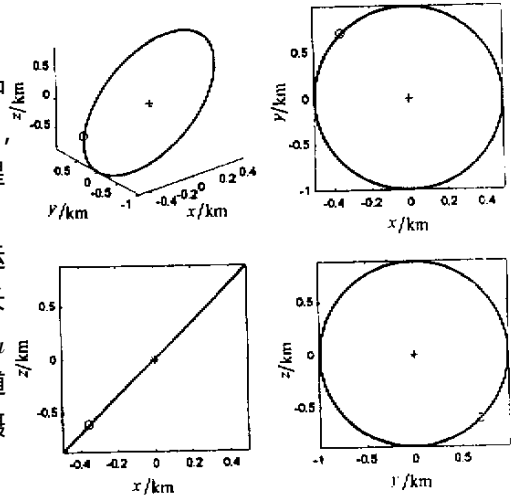


图4 二体假设下的理想编队飞行

Fig.4 Formation flying under 2-body assumption

加入  $\Delta a$  校正后, 在  $J_2$  项摄动作用下编队飞行一圈的相对漂移  $\delta\Omega$  和  $\delta\theta$  分别为  $2.7811 \times 10^{-5}$  度和  $-1.9016 \times 10^{-5}$  度, 编队保持仅需消耗法向速度增量  $0.002733\text{m/s}$ , 运行一年的  $\Delta V$  为

12.0033m/s。可见,引入  $\Delta a$  后,编队保持消耗的能量仅为原来的 1/4 左右。

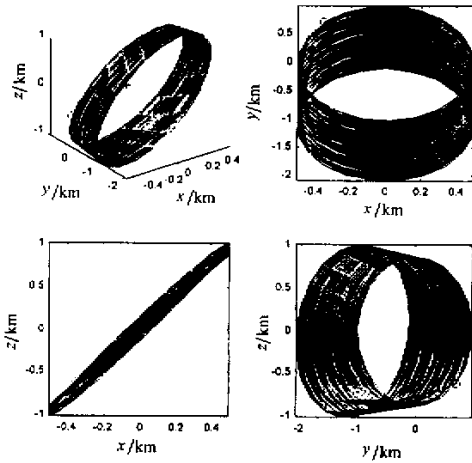


图5  $J_2$  项作用下的编队飞行 ( $\Delta a = 0$ )

Fig.5 Formation flying with  $J_2$  term ( $\Delta a = 0$ )

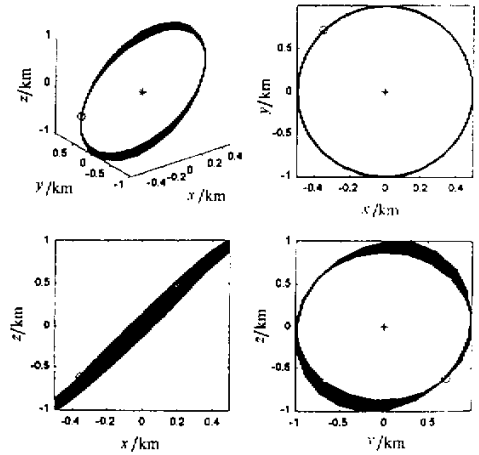


图6  $J_2$  项作用下的编队飞行 (加  $\Delta a$  校正)

Fig.6 Formation flying with  $J_2$  term ( $\Delta a \neq 0$ )

表1 编队飞行的轨道根数

Tab.1 Orbital elements for formation flying

	$a$ (km)	$e$	$i$ ( $^\circ$ )	$\Omega$ ( $^\circ$ )	$\omega$ ( $^\circ$ )	$f$ ( $^\circ$ )
参考卫星	7378	0	50	100	0	0
环绕卫星	$7378 + \Delta a$	0.00006777	50.0048	100.0062	315	45.0015

## 5 结束语

小卫星编队飞行有诸多潜在的应用,为微小卫星的发展开辟了新的方向。同时,也带来一些新的研究课题,其中较为关键的就是摄动作用下卫星编队如何演化,如何设计才能最大程度上保持编队飞行和编队保持的代价多大。通过调整环绕卫星的半长轴,消除了运动方向上的相对偏离,大大减小了  $J_2$  项摄动对编队飞行的破坏作用,不仅极大地节省了控制燃料,还使控制次数由两次减为一次。显然,这对编队飞行的应用有很大的参考价值。

## 参考文献:

- [1] Folta D C, Newman L K, Gardner T. Foundation of Formation Flying for Mission to Planet Earth and New Millenium [ C ]. AIAA-96-3645-CP, 1996.
- [2] Kim Luu, et al. Microsatellite and Formation Flying Technologies on University Nanosatellites [ C ]. AIAA Space Technology Conference, Albuquerque, NM, 1999.
- [3] Chris Sabol, et al. Satellite Formation Flying Design and Evolution [ J ]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2001, 38 ( 2 ): 270 ~ 278
- [4] 张玉钊等. 基于 Hill 方程的编队卫星群运动分析与轨道设计 [ J ]. 国防科技大学学报, 2000, 22 ( 6 ): 1 ~ 5.
- [5] 肖业伦等. 编队飞行卫星群的轨道动力学特性与构型设计 [ J ]. 宇航学报, 2001, 22 ( 4 ): 7 ~ 13.
- [6] 刘林. 航天器轨道理论 [ M ]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

