

基于中位秩的动态可靠性增长模型*

冯 静,刘 琦,周经伦,沙基昌

(国防科技大学人文与管理学院,湖南长沙 410073)

摘 要 给出了一种动态可靠性增长模型。首先利用统计中的中位秩法结合试验数据确定各个增长阶段的失效率,这一技术可以很好地解决小子样问题,并且由于利用了动态建模的思想,因而可以客观地反映系统的实际状态。其次,该模型继承了传统 Duane 模型简单、直观、易于进行参数估计的优点,同时又很好地处理了传统 Duane 模型所不适用的分阶段、多场景试验的情形,因而有很广阔的工程应用前景。最后通过仿真实例验证了该模型的正确性。

关键词 :可靠性增长 ;中位秩 ;动态建模 ;Duane 模型 ;失效率

中图分类号 :TB114.3 **文献标识码** :A

The Dynamic Reliability Growth Model Based on the Middle Rank

FENG Jing, LIU Qi, ZHOU Jing-lun, SHA Ji-chang

(College of Humanities and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract : We propose a kind of dynamic reliability growth model. Firstly, by using the middle rank in statistical field and the data gathered in the practical tests, we can find the failure rate of different growth periods. And this technique can solve the small sample problems. At the same time, this technique embodies the dynamic modeling thoughts, so it can well describe the practical condition of the running system. Secondly, this model inherits the merits that is simple, direct, easy to value the references of traditional Duane model, on the other hand, it can be used in the multi-period or multi-environmental tests in which traditional Duane model can not be applied. Thus, this model can be widely used in engineering. Finally we give a simulating example in order to demonstrate how to use this model and test the correctness of the model.

Key words : reliability growth ; middle rank ; dynamic modeling ; Duane model ; failure rate

可靠性试验中,可靠性增长的研究从 20 世纪 50 年代就开始了。可靠性增长的研究,首先遇到的是增长模型问题^[1]。国外自 60 年代以来,提出了 Duane 模型(1962 年),AMSAA(Army Material System Analysis)模型以及 Gompertz,Edric 模型^[2]等。国内,在上述基础上,70 年代以来进行了有关模型的研究。模型的工程背景很强,因此,应根据不同的对象提出适用的应用模型。经常应用的是三种模型,即 Duane 模型、AMSAA(或 Crow)模型以及动态建模^[2]。动态建模方法按不同对象建立可靠性(或某些特性)的回归模型,可以很好地反映不同的工程试验的状况,因而可以较客观地反映系统可靠性指标的当前水平,从而可以更加客观合理地反映系统可靠性增长的状况。Duane 模型具有简单、直观,易于进行参数估计的优点。但 Duane 模型只适用于较长投试时间,可修复系统的可靠性增长试验,对于分阶段试验或不同场景下的试验,应用上将遇到困难。通常的产品可靠性增长的研制规划由 n 个阶段组成,在同一个阶段中的试验产品是同批次的,因而有理由假定其失效机理是一致的。每个阶段的试验结果被用来改进下一批产品,然后再进入下一阶段的试验(其试验产品是前一阶段被改进的)。本文将利用动

* 收稿日期:2002-04-19
基金项目:总装备部年度课题资助项目
作者简介:冯静(1975—),女,博士生。

态建模的思想,结合统计学中的中位秩的概念,给出一种简单、直观、易于进行参数估计的,并适用于多阶段、多场景试验分析的可靠性增长模型。

1 次序统计量和秩的概念^[3]

从概率论中知道,应用直方图可求得随机变量的概率密度函数 $f(x)$ 和累积分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$,但直方图形成的函数只有在数据多、分组多的情况下才有较高的精确性。在工程试验中,样本数一般不可能很多,尤其对于液体火箭发动机等试验费用昂贵的复杂系统,更是如此。因此,常用的方法是直接根据样本观察值作累积分布函数图,而引入次序统计量和秩的概念是做好累积分布函数图的基础。

1.1 定义(次序统计量)

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为总体 X 的一个子样,若将样本观察值 x_1, x_2, \dots, x_n 按自小到大的次序排列,则子样第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$ 就是取排列到第 k 个数值作为观察值的统计量。子样的第 1 个次序统计量就是子样的最小值,子样的第 n 个次序统计量就是子样的最大值。次序统计量是子样 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的函数,是一个随机变量。

次序统计量 $X_{(k)}$ 有其自身的密度函数 $f_k(x)$ 根据数学推导可得

$$f_k(x) = n C_{n-1}^k [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k} f(x)$$

其中 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别为总体的分布函数和密度函数。

由上式可知,只要知道总体分布 $F(x)$ 和 $f(x)$ 就可求得子样中任一次序统计量的分布。

如 $k=1$ 时, $f_1(x) = n[1-F(x)]^{n-1} f(x)$; $k=n$ 时, $f_n(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$

1.2 定义(秩)

根据样本观察值作总体累积分布函数时,首先将观察值按从小到大的次序排列描点于横坐标上,然后运用秩的概念确定相应的纵坐标值。

设总体分布为 $[0, 1]$ 上的均匀分布,这个均匀分布的分布函数和密度函数分别为

$$F(x) = x, \quad 0 < x < 1; \quad f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

则子样 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的第 k 个次序统计量的密度函数可表示为

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

其分布函数为 $F_k(x) = \int f_k(x) dx$ 。

上述分布函数的分位点,常被用来估计总体分布函数,这个分位点即为秩。

若 $F_k(x) = \int_0^{x_{0.5}} f_k(x) dx = 0.5$, 则分位点 $x_{0.5}$ 称为中位秩;

若 $F_k(x) = \int_0^{x_{0.05}} f_k(x) dx = 0.05$, 则分位点 $x_{0.05}$ 称为 5% 秩;

若 $F_k(x) = \int_0^{x_{0.95}} f_k(x) dx = 0.95$, 则分位点 $x_{0.95}$ 称为 95% 秩。

根据给定的 n, k 和 $f_k(x)$ 密度函数,即可求得各中位、5% 秩、95% 秩等,为方便应用,可查表。工程实践中多用中位秩,在无表格可查的情况下,可用下列近似公式求得:

$$\text{中位秩} = \frac{j-0.5}{n+0.4}$$

式中, j 为次序统计量的序号, n 为样本容量。

2 可靠性增长动态建模

2.1 基本假设

(1) 可靠性增长分为 n 个阶段,在第 k 阶段内的延缓纠正模式为:可靠性取定值,且寿命(设备正

常工作的时间)服从分布参数为 λ_k 的指数寿命型分布,即寿命 t 的分布密度为:

$$f_k(t|\lambda_k) = \lambda_k e^{-\lambda_k t}, \lambda_k, t > 0, k = 1, \dots, n$$

(2)第 k 阶段内采用定时截尾试验,试验结果记为 (z_k, τ_k) 这里

τ_k 为第 k 阶段的总投试时间,或累积试验时间,为给定的值;

z_k 为第 k 阶段内的累积故障数,它为随机变量。

记 x_{ki} 为第 k 阶段内第 i 次故障发生的时间, $i = 1, 2, \dots, z_k$, 则有

$$0 < x_{k1} < x_{k2} < \dots < x_{kz_k} < \tau_k$$

(3)各阶段试验互相独立,且各阶段试验结束后的纠正措施有效,后一阶段的系统可靠性高于前一阶段的可靠性。记 λ_i 为第 i 阶段试验的故障率,则

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n, \lambda_i - \lambda_{i+1} = \Delta\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$$

2.2 可靠性增长模型的建立及参数确定

(1)对于第 k 阶段的试验数据 $0 < x_{k1} < x_{k2} < \dots < x_{kz_k} < \tau_k$ 根据中位秩表,可以查得对应的分布函数值 $F_{k1} < F_{k2} < \dots < F_{kz_k}$,即得到数对 $(x_{k1}, F_{k1}), (x_{k2}, F_{k2}), \dots, (x_{kz_k}, F_{kz_k})$ 。由假设,第 k 阶段内寿命分布函数为 $F(x) = 1 - e^{-\lambda_k x}$,两边取对数,得到 $\ln(1 - F) = -\lambda_k x$,利用线性回归方法,可以得到 λ_k 的估计值 $\hat{\lambda}_k$ 。

于是,根据系统可靠性增长试验记录下的每一阶段的具体数值,就可以得到各个增长阶段的故障率值 $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$,进一步,可以将 $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ 看作 $t = \tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ 时刻的瞬时故障率。

(2)由经典 Duane 模型的假设,瞬时故障率与试验时间的关系满足 $\lambda(t) = a(1 - m)t^{-m}$,其中 a, m 为要确定的模型参数, m 称为增长率, t 为累积试验时间。

两边取对数,得到 $\ln\lambda = \ln a(1 - m) - m \ln t$,通过线性回归方法,可以得到 a, m 的估计值 \hat{a}, \hat{m} 。从而得到可靠性增长曲线(用瞬时故障率单调递减的形式表示): $\hat{\lambda}(t) = \hat{a}(1 - \hat{m})t^{-\hat{m}}$ 。

3 仿真实例

某系统在可靠性增长试验过程中,先后进行了 5 次改进,并且每一次改进都是有效的,即系统的可靠性增长过程可以划分为 5 个阶段进行分析,且系统后一阶段可靠性高于前一阶段。各阶段均为定时截尾试验,具体数据记录如下(时间单位均为小时):

$k = 1, \tau_1 = 5$, 失效了 5 次,时刻为 0.1535, 0.3452, 1.4985, 2.1647, 4.3942

$k = 2, \tau_2 = 6$, 失效了 4 次,时刻为 1.1555, 1.2472, 3.9360, 5.0290

$k = 3, \tau_3 = 6$, 失效了 3 次,时刻为 0.2247, 1.7819, 5.6984

$k = 4, \tau_4 = 7$, 失效了 2 次,时刻为 2.9611, 6.9287

$k = 5, \tau_5 = 8$, 失效了 1 次,时刻为 7.005

通过失效数据,结合中位秩表,由线性回归方法分别拟合曲线 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$,得到各阶段的失效率为:

$$\lambda_1 = 0.4805, \lambda_2 = 0.3159, \lambda_3 = 0.2880, \lambda_4 = 0.1044, \lambda_5 = 0.0989$$

再将这些失效率数据看作每一阶段截尾时刻的瞬时失效率,由线性回归方法拟合曲线 $\lambda(t) = a(1 - m)t^{-m}$,得到模型参数 $a = 23.2015, m = 0.8964$ 。于是系统的可靠性增长曲线(即瞬时失效率单调递减曲线)如图 1 所示。

4 结论

本文所给出的可靠性增长模型的特点主要有以下三点:首先直接从系统失效时间样本数据出发,通过线性回归方法,得到系统可靠性增长各个阶段的失效率值。这是一种动态建模的思想,与传统的只从累积失效次数确定系统失效率的方法相比,可以提高数据的利用率,并且可以很客观地反映系统在各个不同试验阶段的实际状况;其次,在进行第一阶段失效率数据的线性拟合时,利用了统计学中的中位秩

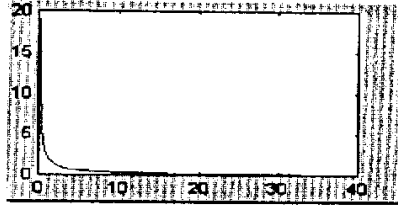


图1 系统瞬时失效率曲线

Fig.1 Moment failure rate of system

确定随机变量分布函数的方法,可以很好地解决小样本,甚至极小样本问题。当前,随着系统结构日趋复杂化,以及技术条件、经济条件等诸多因素的制约,系统的试验数据越来越有限,因而该技术有很大的工程应用价值;再次,在曲线拟合的第二阶段,吸收了 Duane 模型简单、直观、易于进行参数估计的优点,但经典的 Duane 模型只适用于较长投试时间内,可修复系统的可靠性增长试验。对于分阶段试验、不同场景下的试验,应用上将遇到困难。本文所给出的方法则可以不受此限制,可以很好地解决分阶段试验,甚至是不同场景下的试验的可靠性增长分析,因而有着很广阔的应用前景。

参考文献:

- [1] [美] 阿姆斯特特. 可靠性数学 [M]. 彭兴文译. 北京: 科学出版社, 1978.
- [2] 武小悦, 陈忠贵等. 柔性制造系统的可靠性技术 [M]. 北京: 兵器工业出版社, 2000.
- [3] 陈兆能, 邱泽麟, 余经洪. 试验设计与分析 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1991.

(上接第 40 页)

参考文献:

- [1] Liu G F, Wu Y L, Li Z X. Analysis and Control of Redundant Parallel Manipulators [C]. IEEE international Conference on Robotics and Automatiom (ICRA). 2001 3748 - 3754.
- [2] Merlet J P. Singular Configuration of Parallel Manipulators and Grassman Geometry [J]. Int. J. of Rob. Res, 1989, (5) 45 - 56.
- [3] Collins C L. The Quartic Singularity Surfaces of Planal Platforms in the Clifford Algebra of the Projective Plan [J]. Mech. Mach. Theory, 1998, 33(7) 931 - 944.
- [4] 沈辉, 吴学忠, 李圣怡, 李泽湘. 并联机构的奇异位形分析及冗余驱动控制方法 [J]. 国防科技大学学报, 2002 (2): 19 - 22.
- [5] Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps [M]. Volumn I. Birkhauser, 1985.

