文章编号:1001-2486(2005)05-0126-03

$P_{3,4m}$的优美性*

戴　丽[1],王正华[2],谢　政[1]

(1.国防科技大学 理学院,湖南 长沙　410073; 2.国防科技大学 计算机学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:设 u、v 是两个固定顶点,用 b 条内部互不相交且长度均为 a 的道路连接 u、v 所得到的图用 $P_{a,b}$ 表示。Kathiresan 证实 $P_{2r,2m-1}$(r,m 均为任意正整数)是优美的,且猜想:除了$(a,b)=(2r+1,4s+2)$外,所有的 $P_{a,b}$都是优美的。杨元生已证实 $P_{2r+1,2m-1}$是优美的。本文证明 $P_{3,4m}$是优美图,从而当 $a=3$ 时 Kathiresan 猜想成立。

关键词:优美图;顶点标号;边标号

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

The Gracefulness of $P_{3,4m}$

DAI Li[1],WANG Zheng-hua[2],XIE Zheng[1]

(1.College of Science,National Univ.of Defense technology,Changsha 410073,China;

2.College of Computer, National Univ. of Defense Technology,Changsha 410073,China)

Abstract:Let u and v be two fixed vertices. Connect u and v by b internally disjoint paths of length a, the resulting graphs denoted by $P_{a,b}$. Kathiresan showed that $P_{2r,2m-1}$ is graceful and conjectured that $P_{a,b}$ is graceful except for $(a,b)=(2r+1,4s+2)$. Yang showed that $P_{2r+1,2m-1}$ are graceful. In this paper, $P_{3,4m}$ is proved to be graceful. So we prove the conjecture for $a=3$.

Key words:graceful graph; vertex labeling; edge labeling

优美图的研究是从 Ringel 于 1963 年提出的一个猜想[1]开始的,这个猜想就是:设 T 是一个给定的有 n 个顶点,$n-1$ 条边的树,那么 K_{2n-1}可分解成 $2n-1$ 个树同构于 T。1966 年,Rosa 猜想[2]:所有的树都是优美图。这就是著名的优美树猜想。文献[2]中指出:如果所有的树都是优美图,则 Ringel 猜想成立。1972 年,Golomb 明确给出了优美图的定义[3]。近几年,国内外获得不少关于优美图的研究成果[4],它们被应用于射电天文学、X-射线衍射晶体学、密码设计、导弹控制码设计、同步机码设计等领域[5]。

对于一个给定的简单图 $G=(V,E)$,如果对每一个 $v\in V$,存在一个非负整数 $f(v)$(称为顶点 v 的标号),满足下述三个条件:

(1)对任意的 $v_1,v_2\in V$,如果 $v_1\neq v_2$,则 $f(v_1)\neq f(v_2)$;

(2)$\max\{f(v)\mid v\in V\}=|E|$;

(3)对任意的 $e_1,e_2\in E$,如果 $e_1\neq e_2$,则 $g(e_1)\neq g(e_2)$,$g(e)=|f(v_1)-f(v_2)|$,$(\forall e=v_1v_2)$。

则 f 称为 G 的一个优美标号(graceful labeling),G 称为优美图(graceful graph)。

设 u,v 是两个固定的顶点,用 b 条内部不相交的且长度均为 a 的道路连接 u,v 所得的图用 $P_{a,b}$表示。Kathiresan[6]证实 $P_{2r,2m-1}$(r,m 皆为任意正整数)是优美的,且猜想:除了$(a,b)=(2r+1,4s+2)$外,所有的 $P_{a,b}$都是优美的。杨元生已证实 $P_{2r+1,2m-1}$是优美的,并且证实了当 $r=1,2,3,4,5,6,7$ 时的 $P_{2r,2m}$也是优美的[7]。本文研究 $P_{2k+1,4m}$图,证明对任意的自然数 m,$P_{3,4m}$都是优美图。从而证明了当 $a=3$ 时 Kathiresan 猜想成立。

用 v_0^i,v_1^i,v_2^i,v_3^i 表示 $P_{3,b}$的第 i 条长度为 3 的道路上的顶点,对所有的 i,$v_0^i=u$,$v_3^i=v$。如图 1 所

* 收稿日期:2005-04-20

作者简介:戴　丽(1974—),女,博士生,讲师。

示为 $P_{3,2}$的顶点表示图。

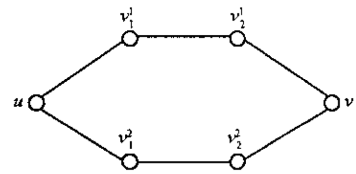

图 1　$P_{3,2}$的顶点表示图

Fig. 1　The vertex denotation of $P_{3,2}$

定理 1　对任意大于 1 的自然数 n,$P_{3,2^n}$都是优美图。

证明　对于图 $P_{3,2^n}$,设 $A=2^{n-1}$,当 $n\geqslant 2$ 时定义它的标号 f_n 如下所示:

$$f_n(u)=0;f_n(v)=A;$$

$$f_n(v_1^i)=6A+1-i\quad(1\leqslant i\leqslant 2A);$$

$$f_n(v_2^i)=\begin{cases}2A+i,(1\leqslant i\leqslant A)\\ 2A,(i=A+1)\\ i-1,(A+2\leqslant i\leqslant \frac{3A}{2},\frac{3A}{2}+2\leqslant i\leqslant 2A)\\ \frac{A}{2},(i=\frac{3A}{2}+1)\end{cases}$$

下面验证上述定义的 f_n 为 $P_{3,2^n}$的优美标号。

设 $D_j=\{|f_n(v_j^i)-f_n(v_{j+1}^i)|:1\leqslant i\leqslant b\}$,$0\leqslant j\leqslant 2$。由 f_n 的定义知:

$$\begin{aligned}D_0&=\{f_n(v_1^i)-f_n(u):1\leqslant i\leqslant b\}\\&=\{6A+1-i:1\leqslant i\leqslant b\}\\&=\{6A,6A-1,6A-2,\cdots,4A+1\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1&=\{f_n(v_1^i)-f_n(v_2^i):1\leqslant i\leqslant b\}\\&=\{(6A+1-i)-(2A+i)\}:1\leqslant i\leqslant A\}\\&\quad\cup\{(6A+1-i)-2A:i=A+1\}\\&\quad\cup\{(6A+1-i)-(i-1):(A+2\leqslant i\leqslant\frac{3A}{2},\frac{3A}{2}+2\leqslant i\leqslant 2A)\}\\&\quad\cup\{(6A+1-i)-\frac{A}{2}:i=\frac{3A}{2}+1\}\\&=\{4A-1,4A-3,\cdots,2A+1\}\cup\{3A\}\cup\\&\quad\{4A-2,4A-4,\cdots,3A+2,3A-2,\cdots,2A+2\}\cup\{4A\}\\&=\{4A,4A-1,\cdots,2A+1\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2&=\{|f_n(v_1^i)-f_n(v_2^i)|:1\leqslant i\leqslant b\}\\&=\{(2A+i)-A:1\leqslant i\leqslant A\}\\&\quad\cup\{2A-A:i=A+1\}\\&\quad\cup\{(i-1)-A\}:(A+2\leqslant i\leqslant\frac{3A}{2},\frac{3A}{2}+2\leqslant i\leqslant 2A)\}\\&\quad\cup\{\frac{3A}{2}-A:i=\frac{3A}{2}+1\}\\&=\{A+1,A+2,\cdots,2A\}\cup\{A\}\cup\\&\quad\{1,2,\cdots,\frac{A}{2}-1,\frac{A}{2}+1,\cdots,A-1\}\cup\{\frac{A}{2}\}\\&=\{1,2,\cdots,2A\},\end{aligned}$$

易见 D_0,D_1,D_2 两两不交,且 $D_0\cup D_1\cup D_2=\{1,2,\cdots,6A\}$,由优美图的定义,即证。□

下面,证明本文的主要结论。

定理 2　对任意正整数 m,$P_{3,4m}$都是优美图。

证明　对任意正整数 m,设 $4m=2^n(2k+1)$,其中 $n,k(n\geqslant 2)$均为正整数。

设 f_n 为定理 1 中所定义的 $P_{3,2^n}$优美标号,$A=2^{n-1}$,$b=2^n$。构造 $P_{3,4m}=P_{3,2^n(2k+1)}$的标号 g 如下:

$$g(u)=0;g(v)=(2k+1)f_n(v)-k;$$

对任意 $1\leqslant i\leqslant b(2k+1)$,定义

$$g(v_1^i)=(2k+1)f_n(v_1^{i-sb})-s,(sb+1\leqslant i\leqslant sb+b);$$

当 $1\leqslant i\leqslant bk$ 时,定义

$$g(v_2^i)=(2k+1)f_n(v_2^{i-sb})+1+s,(sb+1\leqslant i\leqslant sb+b);$$

当 $bk+1\leqslant i\leqslant b(2k+1)$ 时,定义

$$g(v_2^i)=(2k+1)f_n(v_2^{i-sb})+s-2k,(sb+1\leqslant i\leqslant sb+b)。$$

下面证明 g 为优美标号。

设 $\hat{D}_j=\{|g(v_j^i)-g(v_{j+1}^i)|:1\leqslant i\leqslant b(2k+1)\}$,$0\leqslant j\leqslant 2$。则有(定义 $aD_j-b=\{ad-b:d\in D_j\}$)

$$\begin{aligned}\hat{D}_0&=\{|g(v_0^i)-g(v_1^i)|:1\leqslant i\leqslant b(2k+1)\}\\&=\{g(v_0^i):1\leqslant i\leqslant b(2k+1)\}\\&=\{(2k+1)f_n(g(v_1^{i-sb})-s:1\leqslant i\leqslant b(2k+1),(sb+1\leqslant i\leqslant sb+b)\}\\&=\bigcup_{s=0}^{2k}\bigcup_{i=1}^{b}\{(2k+1)f_n(v_1^i)-s\}\\&=(2k+1)D_0\cup((2k+1)D_0-1)\cup\cdots\cup((2k+1)D_0-2k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_1&=\{|g(v_2^i)-g(v_1^i)|:1\leqslant i\leqslant b(2k+1)\}\\&=\{((2k+1)f_n(v_1^{i-sb})-s)-((2k+1)f_n(v_2^{i-sb})+1+s):1\leqslant i\leqslant bk,sb+1\leqslant i\leqslant sb+b\}\\&\quad\cup\{((2k+1)f_n(v_1^{i-sb})-s)-((2k+1)f_n(v_2^{i-sb})+s-2k):\\&\qquad bk+1\leqslant i\leqslant b(2k+1),sb+1\leqslant i\leqslant sb+b\}\\&=(\bigcup_{s=0}^{k-1}((2k+1)D_1-1-2s))\cup(\bigcup_{s=k}^{2k}((2k+1)D_1-2s+2k))\\&=(2k+1)D_1\cup((2k+1)D_1-1)\cup\cdots\cup((2k+1)D_1-2k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_2&=\{|g(v_2^i)-g(v_3^i)|:1\leqslant i\leqslant b(2k+1)\}\\&=\{|g(v_2^i)-g(v)|:1\leqslant i\leqslant b(2k+1)\}\\&=\{|((2k+1)f_n(v_2^{i-sb})+1+s)-((2k+1)f_n(v)+k)|:\\&\qquad 1\leqslant i\leqslant bk,sb+1\leqslant i\leqslant sb+b\}\\&\quad\cup\{|((2k+1)f_n(v_2^{i-sb})+s-2k)-((2k+1)f_n(v)+k)|:\\&\qquad bk+1\leqslant i\leqslant b(2k+1),sb+1\leqslant i\leqslant sb+b\}\\&=(\bigcup_{s=0}^{k-1}((2k+1)D_2+s+1-k))\cup(\bigcup_{s=k}^{2k}((2k+1)D_2-3k+s))\\&=(2k+1)D_2\cup((2k+1)D_2-1)\cup\cdots\cup((2k+1)D_2-2k),\end{aligned}$$

由 D_0,D_1,D_2 两两不交,且 $D_0\cup D_1\cup D_2=\{1,2,\cdots,6A\}$ 知:

$\hat{D}_0,\hat{D}_1,\hat{D}_2$ 也是两两不交的,且 $\hat{D}_0\cup\hat{D}_1\cup\hat{D}_2=\{1,2,\cdots,6A(2k+1)\}$,由优美图的定义,即证。

参考文献:

[1] Ringel G. Problem 25 in Theory of Graphs and Its Application [J]. Proc. Symposium Smolenice, 1963: 162.

[2] Rosa A. On certain Valuations of the Vertices of a Graph [M]. Theory of Graphs, Proc. Internet, Sympos, Rome. 1966: 349 – 355.

[3] Golomb S W. How to Number a Graph [M]. Graph Theory and Computing, Academic Press, New York, 1972: 23 – 37.

[4] Gallian J A. A Dynamic Survey of Graph Labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2000, 6.

[5] 马克杰. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社, 1991.

[6] Kathiesan K M. Two Classes of Graceful Graphs [J]. Ars Combinatoria, 2000, 55: 129 – 132.

[7] 杨元生,容青,徐喜荣. 一类优美图[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 520 – 524.