文章编号:1001-2486(2006)04-00128-05

指数寿命产品可靠性增长试验的 Bayes 分析*

刘 飞,王中伟,张为华

(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410008)

摘 要:针对指数寿命产品的定时、定数截尾试验方案,推广了 Mazzuchi-Soyer 模型的应用范围。首先引入模型假设,以狄氏分布作为先验分布,综合利用产品研制的历史信息和专家信息,结合产品研制各阶段试验数据,给出了各阶段可靠性的联合后验分布。然后利用 Gibbs 抽样算法解决后验推断计算问题,得到各阶段产品可靠性的 Bayes 点估计和区间估计。最后给出产品可靠性增长分析实例,表明了模型的优越性。

关键词:指数分布;可靠性增长;狄氏分布;Bayes 估计;联合后验分布;Gibbs 抽样算法

中图分类号:V435 文献标识码:A

Bayesian Analysis of Reliability-growth Test for Exponential Life Distribution Cases

LIU Fei, WANG Zhong-wei, ZHANG Wei-hua

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410008, China)

Abstract: In view of Type I and Type II censored for exponential life distribution cases, the Mazzuchi-Soyer reliability growth model was extended to cover the life test. The Dirichlet distribution was taken as prior distribution in the model. The historical information and expert information were synthetically used. Combined with the life test data of each development stage, the joint posterior distribution of each stage reliability was presented. Then, the Gibbs sampling algorithm was used to compute the posterior inference. The Bayesian estimators and Bayesian lower bound were gained for each stage reliability. Finally, the example shows that the Bayesian model has apparent advantages.

Key words: exponential distribution; reliability growth; Dirichlet distribution; Bayesian estimation; joint posterior distribution; Gibbs sampling

在航空航天领域,一些产品寿命服从指数分布。产品研制过程中,可靠性与性能参数都不能立即达到所规定的指标,必须经过反复试验-改进-再试验的过程,不断暴露产品设计、制造工艺等缺陷,进行分析和修正后,使产品的可靠性和性能不断提高,这就是可靠性增长试验。可靠性增长试验通常有若干阶段,人们关心的是可靠性增长试验结束时产品最终可靠性。若最后阶段的试验量充足,利用传统方法容易得到产品可靠度估计。但航天高科技产品每一阶段试验量很少。如何充分利用各个阶段的数据,给出最后阶段结束时可靠度的点估计和区间估计,是值得研究的问题。

可靠性增长模型是解决这一问题的重要手段,只要模型选取适当,可以跟踪产品可靠性增长过程,得到产品可靠度估计。在众多可靠性增长模型中,由于 Bayes 分析模型综合利用了验前信息和试验信息,对模型假设要求较少,适用于小子样分析,所以一直是可靠性增长模型研究热点。1991 年 Mazzuchi、Soyer[1] 针对成败型产品的序贯试验方案,提出了一种可靠性增长分析的 Bayes 模型(称为 Mazzuchi-Soyer 模型),克服了以往 Bayes 模型的缺点,既可提供当前可靠性评估,又可预测未来研制阶段产品可靠性。1998 年 Erkanli[3] 将这一模型应用于寿命试验数据的序贯试验方案。

1 模型假设和增长检验

1.1 模型假设

首先引入下列模型假设

* 收稿日期:2006-01-05

基金项目:国家 863 计划资助项目(2003AA765030)

作者简介:刘飞(1976—),男,博士生。

(1) 产品试验分成 m 个阶段进行,每阶段投试的产品数为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$,设各个阶段进行定时或定数截尾试验;

(2) 阶段 $i(1\leqslant i\leqslant m)$内,产品状态保持不变,在每阶段试验结束后,对产品进行改进;

(3) 第 i 阶段产品定时或定数截尾试验数据为 $t_{i1},\cdots,t_{ir_i},t_{ir_i+1},\cdots,t_{in_i}$,其中 $t_{i1},\cdots,t_{ir_i}$ 为失效样本失效时间,$t_{ir_i+1},\cdots,t_{in_i}$ 为成功样本试验时间;

(4) 每阶段试验产品的寿命服从指数分布。

第 i 阶段产品的寿命服从指数分布,即 $f(t)=\lambda_i e^{-\lambda_i t}$,则第 i 阶段产品的可靠性函数为 $R_i(t)=e^{-\lambda_i t}$。为便于分析,采用产品单位任务时间作为寿命度量单位,则第 i 阶段产品的可靠性为

$$R_i=R_i(t=1)=e^{-\lambda_i} \tag{1}$$

设增长试验结束后产品可靠性为 R_{m+1},随着试验推进,产品缺陷不断暴露并得到修正,故

$$0\leqslant R_1\leqslant R_2\leqslant\cdots\leqslant R_m\leqslant R_{m+1}\leqslant 1 \tag{2}$$

显然等价于

$$\infty>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{m+1}>0 \tag{3}$$

因此,指数可靠性增长也可用指数失效率下降模型表示。

1.2　阶段间可靠性增长检验[5]

在可靠性增长试验后,阶段间可靠性是否存在增长,除了依靠工程判断外,更为科学的方法是进行统计检验,验证试验数据是否满足顺序约束关系(2)或(3)。可采用下述方法进行假设检验:

对阶段 i 和 $i+1$,计算检验统计量

$$F_i^*=\begin{cases}T_{i+1}r_i/(T_i r_{i+1}), & \text{定数截尾}\\ T_{i+1}(2r_i+1)/[T_i(2r_{i+1}+1)], & \text{定时截尾}\end{cases} \tag{4}$$

若

$$F_i^*\geqslant\begin{cases}F_{2r_{i+1},2r_i;1-\alpha} & \text{定数截尾}\\ F_{2r_{i+1}+1,2r_i+1;1-\alpha} & \text{定时截尾}\end{cases}$$

其中 $F_{v1,v2;p}$ 表示自由度为 $v1$、$v2$,概率为 p 的分位点。此时,认为从阶段 i 到阶段 $i+1$,可靠性有显著增长;否则,将两阶段数据合并,再与下阶段作增长检验。其中 α 一般为 0.2;若工程上已经表明,产品可靠性确有增长,则 α 可取 0.3、0.4 甚至更高。

2　Bayes 先验分布

设 $\boldsymbol{R}=(R_1,\cdots,R_{m+1})$,根据 Mazzuchi-Soyer 模型,约束条件(2)式可以采用狄氏分布[1]描述,即以狄氏分布作为 $\boldsymbol{R}$ 的先验分布,则

$$\pi(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)=\frac{\Gamma(\beta)}{\prod_{i=1}^{m+2}\Gamma(\beta\alpha_i)}\prod_{i=1}^{m+2}(R_i-R_{i-1})^{\beta\alpha_i-1} \tag{5}$$

其中:$R_0\equiv 0$;$R_{m+2}\equiv 1$;$\beta>0$,$\alpha_i>0$,$i=1,\cdots,m+2$;$\sum_{i=1}^{m+2}\alpha_i=1$。

由狄氏分布的性质知,分布(5)的各边际分布均为 Beta 分布,即

$$R_i\sim\mathrm{beta}(\beta\alpha_i^*,\beta(1-\alpha_i^*)) \tag{6}$$

$$\frac{R_j}{R_i}\sim\mathrm{beta}(\beta\alpha_j^*,\beta(\alpha_i^*-\alpha_j^*)),j<i \tag{7}$$

其中 $\alpha_i^*=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j$。

可见分布(5)实际上是一个多元 Beta 分布。进一步由 Beta 分布的性质得到

$$\mathrm{E}[R_i]=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j=\alpha_i^* \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}[R_i]=\frac{\alpha_i^*(1-\alpha_i^*)}{\beta+1} \tag{9}$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{R_j}{R_i}\right]=\frac{\alpha_j^*}{\alpha_i^*} \tag{10}$$

于是有

$$\alpha_i=\mathrm{E}[R_i]-\mathrm{E}[R_{i-1}] \tag{11}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+2})$，可以看出参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示试验阶段间可靠性增长的幅度。通常在产品研制的早期阶段，可靠性提高的幅度较大，此时对应的 α 值较大。在后期阶段，可靠性提高比较困难，此时对应的 α 值较小。这就是参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的物理意义。参数 β 反映了技术人员对这些估计值的确信程度。对于给定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 值，β 值大(小)，则得到的先验标准差小(大)，从而说明对可靠性估计值的确信程度高(低)。

在实际使用中，可能存在两种形式的先验信息，一种以各试验阶段的失效率表示，一种以给定任务时间 t_0 内的可靠性表示。两种情形下分别通过如下方法得到先验分布的参数：

若先验信息以失效率表示，即给出了每一阶段产品的失效率先验估计。此时，注意到 $\lambda_i-\lambda_j=\ln(R_j/R_i)(j<i)$，可将以失效率表示的先验信息转变为以可靠性表示的先验信息，然后利用(9)、(10)式得到先验分布参数值。

若先验信息以给定任务时间 t_0 内的可靠性表示，则第 i 阶段产品的可靠性为 $R_i^{t_0}$。从第 j 阶段到第 i 阶段的可靠性提高量为 $(R_j/R_i)^{t_0}$，结合(9)、(10)式得到先验分布的参数值。

3 可靠性后验推断

若以各阶段投试产品总试验时间描述两种试验方案的似然函数，则阶段试验后似然函数的核为

$$L(\lambda)\propto\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_i T_i} \tag{12}$$

其中

$$T_i=\begin{cases}(n_i-r_i)t_i+\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}\text{，定时截尾}\\(n_i-r_i)t_{ir_i}+\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}\text{，定时截尾}\end{cases}$$

对(12)式作(1)式变换，则 k 阶段试验后似然函数的核改写为

$$L(\boldsymbol{R})\propto\prod_{i=1}^{k}(-\ln(R_i))^{r_i}R_i^{T_i} \tag{13}$$

此时已知 $\boldsymbol{R}$ 的先验分布(5)，以及 k 个阶段试验后的似然函数(13)，则 $\boldsymbol{R}$ 的后验分布核为

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)&\propto\prod_{i=1}^{m+2}(R_i-R_{i-1})^{\beta\alpha_i-1}\prod_{i=1}^{k}\ln(1/R_i)R_i^{T_i}\\&\propto\prod_{i=k+1}^{m+2}(R_i-R_{i-1})^{\beta\alpha_i-1}\prod_{i=1}^{k}(R_i-R_{i-1})^{\beta\alpha_i-1}(-\ln(R_i))^{r_i}R_i^{T_i}\end{aligned} \tag{14}$$

4 后验推断计算方法

基于联合后验分布，若要得到各个 R_i 的后验推断，传统做法是对联合后验分布进行数值积分，但计算代价很高。本文采用 Gibbs 抽样算法计算 R_i 的后验推断。Gibbs 抽样是一种 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)算法，其基本思想是：从满条件分布迭代抽样，当迭代次数足够大时，就可以得到来自联合后验分布的样本，进而也得到了来自边缘分布的样本。对于联合后验分布(14)，若给定 $R_j,j\neq i$，则 $p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 仅为 R_i 的函数，此时称 $p(R_i\mid\boldsymbol{\alpha},\beta,R_j,j\neq i)$ 为 R_i 的满条件分布。Gibbs 抽样过程如下：

设 $\boldsymbol{R}^0=(R_1^0,\cdots,R_m^0)$ 为任一初值,然后逐一从下述满条件分布抽样:

从满条件分布 $p(R_1\mid R_2^0,R_3^0,\cdots,R_m^0,\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 中抽取 R_1^1

从满条件分布 $p(R_2\mid R_1^1,R_3^0,\cdots,R_m^0,\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 中抽取 R_2^1

……

从满条件分布 $p(R_m\mid R_1^1,R_2^1,\cdots,R_{m-1}^1,\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 中抽取 R_m^1

依次进行 n 次迭代后,得到 $\boldsymbol{R}^n=(R_1^n,\cdots,R_m^n)$,则 $\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^2,\cdots,\boldsymbol{R}^n,\cdots$ 是 Markov 链的实现值。此时,$\boldsymbol{R}^n$ 依分布收敛于平稳分布 $p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$。所求后验估计可写成某函数 $\phi(R_i)$ 关于后验分布 $p(R_i\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 的期望

$$\mathrm{E}[\phi(R_i)]=\int\phi(R_i)p(R_i\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)\mathrm{d}R_i \tag{15}$$

从不同的 $\boldsymbol{R}^0$ 出发,链经过一段时间的迭代后,可认为各个时刻的 $\boldsymbol{R}^n$ 的边际分布都是平稳分布 $p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$,此时,称它收敛了。而在收敛出现以前的一段时间,例如 m 次迭代中,各状态的边际分布还不能认为是 $p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$,因此,应把前面的 m 个迭代值舍掉,用后面的 $n-m$ 个迭代结果来估计,即

$$\hat{\phi}(R_i)=\frac{1}{n-m}\sum_{t=m+1}^{n}\phi(R_i^t) \tag{16}$$

上式称为遍历平均。由遍历性定理,有 $\hat{\phi}(R_i)\to E[\phi(R_i)]$,$(n\to\infty)$,即 $\hat{\phi}(R_i)$ 是期望 $\mathrm{E}[\phi(R_i)]$ 的一致估计。这也表明,当 n 足够大时,$\boldsymbol{R}^n$ 可认为是来自联合后验分布 $p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 的一个样本,R_i^n 可视为来自边缘分布的 $p(R_i\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 的一个样本。

由以上 Gibbs 抽样算法过程可以看出,判断 Gibbs 抽样何时收敛到平稳分布 $p(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{\alpha},\beta)$ 是一个重要问题。现在没有简单而有效的判断方法,本文主要采用以下方法:看遍历均值是否已经收敛。在由 Gibbs 抽样得到的 Markov 链中每隔一段距离计算一次参数的遍历均值,为了使用以计算平均值的变量近似独立,通常可每隔一段取一个样本,当这样计算的遍历均值稳定后,可认为 Gibbs 抽样收敛了。

5　实例分析

某指数寿命产品研制分为 4 个阶段,产品的任务时间为 10h。每一阶段试验采用定时截尾方案,各阶段的试验数据为:第 1 阶段失效 4 个,总试验时间为 81.29h;第 2 阶段失效 2 个,总试验时间为 88.74h;第 3 阶段失效 1 个,总试验时间为 120.5h;第 4 阶段试验全部成功,总试验时间为 110h。假设由历史数据和专家信息得到的各阶段产品任务可靠性先验估计为 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(0.6,0.75,0.85,0.9,0.95)$,取 $\beta=50$。试对产品进行可靠性增长分析。

首先,利用阶段间可靠性增长检验方法验证了阶段间可靠性是否存在增长。取 $\alpha=0.2$,则阶段 1 与阶段 2 之间的检验量 $F_1^*=1.9650$,临界值为 1.8455;阶段 2 与阶段 3 之间的检验量 $F_2^*=2.2632$,临界值为 2.2530;阶段 3 与阶段 4 之间的检验量 $F_3^*=2.7386$,临界值为 2.6822。可见检验量均大于相应的临界值,认为研制阶段可靠性存在显著增长,满足顺序约束条件。

然后,利用先验分布参数确定的方法得 $\boldsymbol{\alpha}=(0.9502,0.0214,0.0123,0.0056,0.0054,0.0051)$。

将试验数据和先验参数代入联合后验分布,采用 Gibbs 抽样算法计算各研制阶段产品可靠性估计。在 Gibbs 抽样算法中取 5000 次抽样迭代,通过对抽样均值的监测,发现在 1000 次迭代内,Gibbs 抽样算法就收敛了。图 1 给出了 R_3 的抽样值,其它可靠性抽样值形态类似。

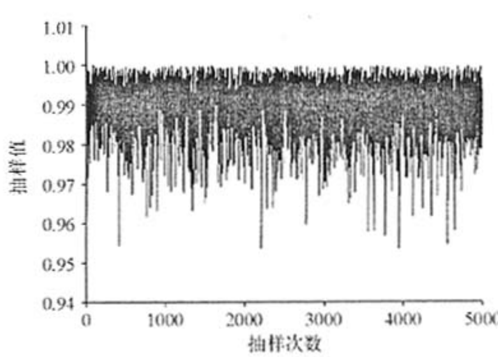

图 1　R_3 的抽样值

Fig.1　Sampling values for R_3

为了消除过渡过程的影响,需选用'成熟'数据,以 1001 ~5000 次 $\boldsymbol{R}$ 抽样数据作为进行 Bayes 估计的 Gibbs 抽样

值。利用这些抽样值分别对各阶段任务可靠性进行后验估计,结果如表1所示。其中,后验均值和中位数分别是参数在平方损失和绝对差损失下的 Bayes 点估计,5%和95%两个分位数构成了参数的90%置信区间,一般,计算 $\alpha/2$ 和 $1-\alpha/2$ 两个分位数,就可以求出参数的 $1-\alpha$ 置信区间,其中 α 为置信水平。

表1 各阶段任务可靠性的后验估计

Tab.1 Posterior estimators for each stage reliability

	均值	标准差	5%分位点	中位点	95%分位点
R_1^{10}	0.63914	0.10186	0.45731	0.64850	0.79337
R_2^{10}	0.77974	0.08443	0.63206	0.78372	0.90488
R_3^{10}	0.91277	0.05732	0.80306	0.92288	0.98578
R_4^{10}	0.97686	0.02853	0.91878	0.98709	0.99995
R_5^{10}	0.99523	0.01062	0.97083	0.99966	0.99999

由表1可以看出,利用本文方法可以得到每阶段产品可靠性的 Bayes 点估计和区间估计。此外,这种模型的一个优点在于可以预测未来研制阶段的可靠性,给出未来研制阶段产品可靠性预测值。

为了考察各研制阶段试验数据对产品最终可靠性预测的影响,将各研制阶段试验数据逐一输入进行计算,得到了每增加一个研制阶段试验数据下 R_5^{10} 的预测值,如表2所示。其中 $R_5^{10}\mid D^{(i)}$ 表示在前 i 阶段试验数据下 R_5^{10} 的预测值。

表2 各阶段试验数据下 R_5^{10} 预测值

Tab.2 Prediction estimation of R_5^{10} under each stage test data

	$R_5^{10}\mid D^{(1)}$	$R_5^{10}\mid D^{(2)}$	$R_5^{10}\mid D^{(3)}$	$R_5^{10}\mid D^{(4)}$
均值	0.98906	0.99125	0.99299	0.99523
标准差	0.03151	0.02110	0.01751	0.01062

由表2可以看出,随着研制阶段试验数据的增加,R_5^{10} 预测值的标准差逐渐降低,这表明研制阶段的试验数据不断修正了人们对产品最终可靠性的认识,加深了对 R_5^{10} 预测值的确信程度。

由 Gibbs 抽样样本统计分析得,置信水平90%下产品最终任务可靠性的置信下限为 $\bar{R}_L=0.9852$;

若仅使用第4阶段试验数据,采用 Bayes 评估方法得置信水平90%下产品最终任务可靠性的置信下限为 $\tilde{R}_L=0.9139$。

可见,若忽略研制过程可靠性增长的特点,将造成评估信息的丢失,浪费宝贵的试验信息,降低评估结果的可信度。利用 Bayes 可靠性增长模型能充分利用历史信息、专家信息以及各阶段试验信息,适用于产品小子样的可靠性增长评估。

6 结 论

针对指数寿命产品的定时、定数截尾试验方案,本文深化、推广了 Mazzuchi-Soyer 模型。这种模型以狄氏分布作为先验分布,综合利用产品研制的历史信息和专家信息,结合产品研制各阶段试验数据,给出了产品研制各阶段可靠性的联合后验分布。然后利用 Gibbs 抽样算法解决后验推断计算问题,最终得到了各阶段产品可靠性的 Bayes 点估计和区间估计。值得注意的是,如果没有先验信息,需采用无信息先验分布,此时此模型仍然适用,相应地令狄氏先验参数 $\beta\alpha_i=1, i=1,\cdots,m+2$。

参考文献:

[1] Mazzuchi T A, Soyer R A. Bayesian Attribute Reliability Growth Model [A]. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium[C], 1991, 322-324.
[2] Mazzuchi T A, Soyer R. Reliability Assessment and Prediction during Product Development [A]. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium[C], 1992:468-474.
[3] Erkanli A, Mazzuchi T A, Soyer R. Bayesian Computations for a Class of Reliability Growth Models [J]. Technometrics, 1998, 40(1):14-23.
[4] 茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,1998.
[5] 周源泉,翁朝羲. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社,1992.
[6] 张金槐. Bayes 可靠性增长分析中验前分布的不同确定方法及其剖析[J]. 质量与可靠性,2004,(4):10-13.
[7] 张金槐. Bayes 可靠性增长分析中验前分布的不同确定方法及其剖析(续)[J]. 质量与可靠性,2004,(5):18-22.