

文章编号: 1001-2486(2007)04-0087-04

高精度单频信号初相测量方法*

李垣陵, 孙广富, 欧 钢, 庄钊文

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要:提出了一种基于误差知识的二重插值 DFT 方法用于高精度时钟初相测量。理论分析与数值仿真结果表明,该方法性能接近 Cramer-Rao 界。

关键词:高精度;时钟初相;二重插值 DFT;Cramer-Rao 界

中图分类号:TN914.42 **文献标识码:**A

A High Performance Measurement of Single Frequency's Initial Phase

LI Yuan-ling, SUN Guang-fu, OU Gang, ZHUANG Zhao-wen

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A high performance measurement of initial phase via a Dual Interpolated DFT method based on error information is presented. Theory analysis and numerical simulation results all indicate that the performance of the method is close to the Cramer-Rao Bound.

Key words: high performance; initial phase; dual interpolated DFT; Cramer-Rao bound

雷达、声纳、通信、电子侦察与对抗、ADC 参数测试等领域经常需要根据采样序列对正弦信号参数进行估计。卫星双向时间比对的地面站设备时延校准过程中需要对系统时钟初相进行高精度测量^[1], 商用测量仪器(SR620^[2])的测量分辨率已不能满足系统需求。本文研究更高精度的初相测量实现方法。

Rife^[3]给出了高斯白噪声背景下复单频信号的最大似然估计(MLE)算法,其估计方差可达 Cramer-Rao 界(CRB)。但 MLE 算法计算量大,难以实时进行处理。Jain^[4]及 Quinn^[5]提出了基于插值 DFT 的正弦参数估计方法,其借助 FFT 算法提升了计算效率,在相关领域得到较为广泛的应用。但插值 DFT 方法估计精度受被估计信号频率相对 DFT 最大谱线对应频率偏差 δ 的影响,相对 CRB 性能损耗(定义为达到与 CRB 相同估计精度需要额外增加的信噪比)较大,可达 4.34dB。

针对插值 DFT 方法估计性能受 δ 影响的问题,本文提出了一种基于误差知识的二重插值 DFT 方法,该方法能消除 δ 值对估计性能的影响。理论分析与数值仿真结果表明,基于误差知识的二重插值 DFT 方法的初相估计相对 CRB 的处理损耗仅为 0.93dB,且估计性能不受 δ 值的影响。达到相同估计性能条件下,本文方法的计算量相对原方法大幅下降。

1 基于误差知识的二重插值 DFT 方法进行时钟初相测量

1.1 算法原理

插值 DFT 方法本质上是利用正弦信号 DFT 加窗后存在的频谱泄漏效应,通过频谱幅度最大值及幅度次大值谱线的幅度之比来估计被测信号频率与频率采样位置之间的偏差 δ ,并据此进行信号参数的估计,如图 1 所示。对频率估计而言, $\delta=0$ 相对 $\delta=0.5$ 更易受噪声污染^[6],导致 $\delta=0$ 时的估计误差较大。相位估计特性与之有相似之处,可以利用移频方式在初始估计的基础上尽量消除 δ 对估计精度的

* 收稿日期:2007-03-20

基金项目:教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-04-0995)

作者简介:李垣陵(1978—),男,博士生。

影响。

为消除 δ 对估计性能的影响,本文提出基于误差知识的二重插值 DFT 实正弦信号参数估计方法。这种方法首先获得 δ 的初始估计 $\delta_0^{[4]}$, 根据 δ_0 值对被测序列进行移频操作,使移频后序列的 δ_1 处于方差较小点,即最优 δ 工作点。对移频后序列应用插值 DFT 方法进行参数估计,对估计获得的参数进行修正即可获得原序列的相关参数。 δ 工作点的选取需要根据 δ 方差与被估计参数的方差之间的量化关系来选择。

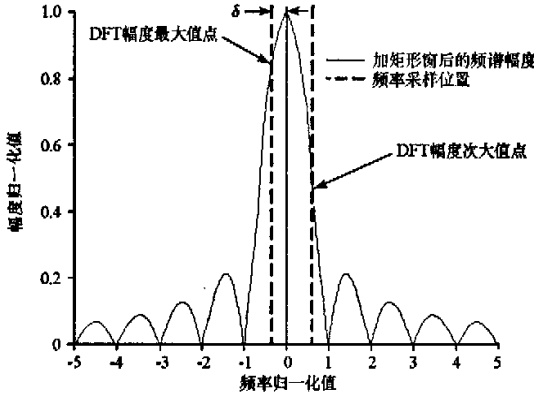


图1 插值 DFT 方法示意图

Fig.1 Model of interpolated DFT method

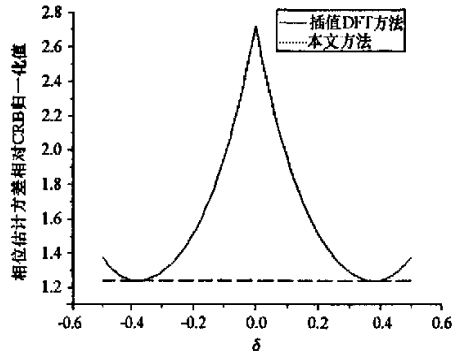


图2 本文方法/插值 DFT 方法初相估计方差相对关系
Fig.2 Comparison of initial phase mean square error with δ , presents method vs interpolated DFT method

1.2 理论模型

信号模型

$$y(t) = A \sin(2\pi ft + \theta) + r(t) \quad (1)$$

其中, A 为信号幅度, f 为信号频率, θ 为信号初相, $r(t)$ 为零均值方差为 σ^2 的高斯白噪声。对该信号进行采样间隔为 T 的时域采样, 采样频率满足采样定理。采样后,

$$y_n = A \sin(\omega n T + \theta) + r_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

式中, $\omega = 2\pi f$, r_n 为对 $r(t)$ 采样得到的序列, 对式(2)进行 DFT 得

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (3)$$

利用 $Y(k)$ 序列中幅度最大值点及其相邻的幅度次大值点对被估计信号频率相对 DFT 最大谱线对应频率偏差 $\delta = fNT - i$ 估计, 不失一般性, 令幅度最大值点为 $Y(i)$, 幅度次大值点为 $Y(i+1)$, 有 $\delta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, 其中 $\alpha = \frac{|Y(i+1)|}{|Y(i)|}$ 。幅度次大值点为 $Y(i-1)$ 时的推导与之类似, 文中不再赘述。

通过移频使被估计参数受噪声影响变小, 记移频后的新序列为 y_{1n} , 得

$$y_{1n} = y_n \cdot e^{j(2\pi/N)nl} = [A \sin(\omega n T + \theta) + r_n] \cdot e^{j(2\pi/N)nl} \quad (4)$$

式中, $(2\pi/N)l$ 对应式(2)中 ω 的偏移量, 对 y_{1n} 进行 DFT 可得式(5)。值得注意的是, 此处 l 的取值为小数, $Y(k-l)$ 不能由 $Y(k)$ 简单坐标搬移获得。

$$Y_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_{1n} e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j(2\pi/N)n(k-l)n} = Y(k-l) \quad (5)$$

利用 $Y_1(k)$ 序列中幅度最大值点及其相邻的幅度次大值点 $Y_1(i)$ 与 $Y_1(i+1)$, 可得 δ_1 的估计。参考 Jain^[4] 的插值 DFT 方法可得新序列的三参数估计式(6)~(8), 其中 $\omega_1 = \omega + (2\pi/N)l$, $a = \pi(N-1)/N$ 。

$$\hat{f}_1 = (\delta_1 + i)/(NT) \quad (6)$$

$$\hat{\theta}_1 = \text{Phase } Y_1(i) - \omega_1 \delta_1 + \pi/2 \quad (7)$$

$$\hat{A}_1 = \frac{2\pi\delta_1}{N} \frac{|Y_1(i)|}{|\sin(\pi\delta_1)|} \quad (8)$$

由式(4)可知,新序列估计出的初相和幅度与移位前序列的估计值是一致的。由式(5)可知,利用新序列估计出来的频率需要移位 $(2\pi/N)l$ 才能得到原序列的频率估计值。

由于序列 y_{1n} 为 y_n 移频所得, $Y_1(k)$ 的幅度最大值及次大值点与 $Y(k)$ 的幅度最大值及次大值点的关系是确定的,只需通过卷积运算直接计算 $Y_1(k)$ 的幅度最大值点、次大值点值就可以实现第二次插值。

1.3 误差分析

首先给出 Cramer-Rao 界(CRB)。参考 Rife^[3]的推导,针对式(2)所示模型,得式(1)模型下实正弦信号初相估计 CRB 如式(9)所示,其中, $\rho = A^2/2\sigma^2$, 为信噪比, N 为估计点数。

$$\text{var}(\theta) \geq \frac{4}{\rho \cdot N} \quad (9)$$

δ 的估计方差如式(10)所示^[6], 其中 $\text{sinc}(\delta) = \sin(\pi\delta)/(\pi\delta)$ 。

$$\text{var}(\hat{\delta}) = \frac{(1-|\delta|)^2[(1-|\delta|)^2 + \delta^2]}{N \cdot \rho \cdot \text{sinc}^2(\delta)} \quad (10)$$

结合式(7)、(10)可得

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \text{var}[\text{Phase} Y(i) - \alpha\hat{\delta} + \pi/2] = \text{var}[\text{Phase} Y(i)] + \alpha^2 \text{var}(\hat{\delta}) \quad (11)$$

在 DFT 幅度最大值处的相位测量方差^[7]

$$\text{var}[\text{Phase} Y(i)] = \frac{1}{N \cdot \text{sinc}^2(\delta) \cdot \rho} \quad (12)$$

代入式(11),可得插值 DFT 方法的初相估计方差式(13),其中 $\alpha = \pi(N-1)/N$ 。

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N \cdot \text{sinc}^2(\delta) \cdot \rho} + \alpha^2 \frac{(1-|\delta|)^2[(1-|\delta|)^2 + \delta^2]}{N \cdot \rho \cdot \text{sinc}^2(\delta)} \quad (13)$$

插值 DFT 方法初相估计方差相对 CRB 归一化值如图 2 所示。

由式(6)、(8)可得, δ 的估计精度同样会影响插值 DFT 方法进行频率、幅度参数的估计精度,应用本文方法对这些参数进行估计时也会提升插值 DFT 方法的估计性能。受篇幅所限,这里对应用基于误差知识的二重插值方法进行频率、幅度参数估计的误差性能不做进一步分析。

由基于误差知识的二重插值 DFT 方法的原理可知, δ 工作点的选择以提高估计性能为目的。式(13)的函数极值分析表明,针对初相精度优化,应选择 $|\delta| = 0.38$ 为工作点。此时基于误差知识的二重插值 DFT 方法的初相估计方差如图 2 中虚线所示。

把 $|\delta| = 0.38$ 代入式(13),得到初始相位估计方差为 CRB 的 1.239 倍(0.93dB),且基于误差知识的二重插值 DFT 方法精度不受影响。

假设 δ 在 $[-0.5, 0.5]$ 服从均匀分布,由式(13)可得,插值 DFT 方法初相估计的方差期望值为 CRB 的 1.587 倍(2.00dB);当 $\delta = 0$ 时,插值 DFT 方法初相估计精度相对 CRB 的处理损耗高达 4.34dB。

可见,基于误差知识的二重插值 DFT 方法比插值 DFT 方法的初相估计精度在统计意义上提高了 1.07dB,约 28%。在 $\delta = 0$ 时,基于误差知识的二重插值 DFT 方法相对插值 DFT 方法的初相估计精度提高了 3.41dB。

1.4 计算量分析

插值 DFT 方法的计算量主要为 FFT 计算,FFT 的计算量为 $0.5N\log_2 N$ 次复数乘法及 $N\log_2 N$ 次复数加法^[8]。基于误差知识的二重插值 DFT 方法计算量在插值 DFT 方法之上增加了 N 次复数乘法用于移频, $2N$ 次复数乘法及 $2N$ 次复数加法用于计算 $Y_1(k)$ 的幅度最大值点及次大值点。基于误差知识的二重插值 DFT 方法计算量大致为 $N(0.5\log_2 N + 3)$ 次复数乘法及 $N(\log_2 N + 2)$ 次复数加法。

以采样率 100MHz、估计点数 10^5 为例,DFT 频率采样间隔为 1000Hz,卫星双向时间比对系统中的系统时钟一般不取几百 Hz 的尾数,通常条件下 $\delta \approx 0$ 。 $\delta = 0$ 条件下本文方法与插值 DFT 方法在获得相同精度时的计算量对比如表 1 所示,为获得与本文方法 10^5 点估计相当的精度,本文方法仅需要插值 DFT

方法 58% 复乘法和 48% 复加法计算量即可。

表 1 相同估计精度时本文方法与插值 DFT 方法计算量对比 ($\delta = 0$)

Tab.1 Computational complexity of presents method VS Interpolated DFT method ($\delta = 0$)

本文方法 DFT 点数	相同精度时 插值 DFT 方法 需要的点数	插值 DFT 方法		本文方法		本文方法与插值 DFT 方法计算量比值	
		复乘法 次数	复加法 次数	复乘法 次数	复加法 次数	复乘法 次数	复加法 次数
1000	2194	12 176	24 352	7983	11 966	0.66	0.49
10 000	21 940	158 201	316 403	96 439	15 2877	0.61	0.48
100 000	219 400	1 946 429	3 892 859	1 130 482	1 860 964	0.58	0.48
1 000 000	2 194 000	23 108 450	46 216 900	12 965 784	21 931 569	0.56	0.47

2 数值仿真

为验证基于误差知识的二重插值 DFT 方法初相估计性能,进行数值仿真实验。

设置被估计频率为 40MHz,采样率为 100M 采样点/s,不同 δ 值条件下,基于误差知识的二重插值 DFT 方法与插值 DFT 方法的误差性能比如图 3 所示。仿真结果表明,本文方法在 $|\delta|$ 较小时对原有估计算法的性能有较大提高,与理论分析结论吻合。

$\delta = 0$ 时基于误差知识的二重插值 DFT 方法估计性能随信噪比及 DFT 点数的对比关系如图 4 所示,其中均方差理论值通过 CRB 的 1.239 倍(0.93dB)开根号计算得到。仿真结果表明,本文方法实现的初相估计性能接近 CRB,未发生门限效应时,相同信噪比下的估计均方差仅为 CRB 的 1.113 倍。

估计算法的非线性操作会遭遇门限效应^[3],信噪比低于特定阈值时估计性能急剧恶化。图 4 中可以明显看出这种效应,其中 N 为 10^4 时门限效应发生在信噪比 $-30\text{dB} \sim -15\text{dB}$, 10^5 时门限效应发生在信噪比 $-35\text{dB} \sim -20\text{dB}$, 10^6 时门限效应发生在信噪比 $-40\text{dB} \sim -30\text{dB}$ 。信噪比低于门限效应对应的信噪比区间后,信号能量在参数估计中基本不起作用,参数估计性能主要受噪声特性影响。从初相估计的角度来看,噪声服从范围为 $[-\pi, \pi]$ 的均匀分布,则由噪声引起的初相估计均方差满足 $\text{std}(\hat{\theta}) = 2\pi/\sqrt{12} = 1.814\text{rad}$,这与图 4 中的仿真结果是吻合的。

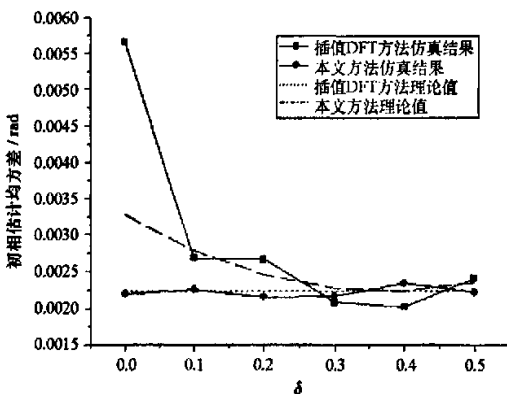


图 3 本文方法与插值 DFT 方法初相估计方差对比,仿真条件: SNR = 0dB, $N = 10^6$

Fig.3 Comparison of mean square error with δ , presents method vs Interpolated DFT method, simulation condition: SNR = 0dB, $N = 10^6$

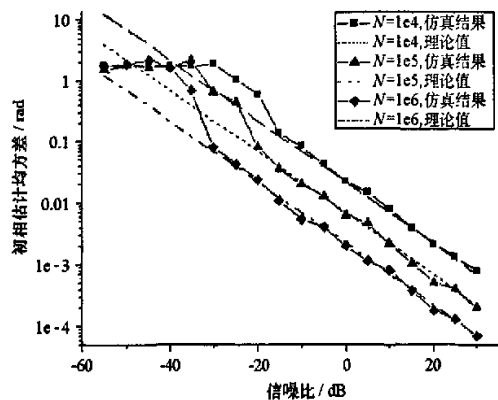


图 4 本文方法初相估计方差与 SNR 及点数的关系的仿真结果对比理论计算值, $\delta = 0$

Fig.4 Comparison of mean square error with SNR, simulation result vs theory result, $\delta = 0$

5 结论

提出的多脉冲调频信号多普勒信息提取方法,从频率及频率变化率估计出发最终从脉冲重复周期中获得目标运动多普勒信息,解决了脉冲重复周期与采样周期之间不匹配造成的调频信号脉冲采样中心频率偏差问题。该方法结构简单,易于工程实现;计算量小,可以满足无源定位系统的实时需求。

参考文献:

- [1] 周亚强,曹延伟,冯道旺,等.基于视在加速度与角速度信息的单站无源定位原理与目标跟踪算法研究[J].电子学报,2005,33:2120-2124.
- [2] 冯道旺.利用径向加速度信息的单站无源定位技术研究[D].长沙:国防科技大学,2003.
- [3] 李宗华,冯道旺,周一宇,等.一种固定单站对运动辐射源的无源定位跟踪算法[J].国防科技大学学报,2003(5).
- [4] Djuric P M, Kay S M. Parameter Estimation of Chirp Signals[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990,38.
- [5] Peleg S, Porat B. Linear FM Signal Parameter Estimation from Discrete-time Observations[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991,27:607-615.
- [6] Saha S, et al. Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Chirps Using Monte-Carlo Importance Sampling[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002,50:224-230.
- [7] 龚享敏.利用频率变化率和波达角变化率单站无源定位与跟踪的关键技术研究[D].长沙:国防科技大学,2004.
- [8] Abatzoglou T J. Fast Maximum Likelihood Joint Estimation of Frequency and Frequency Rate[J]. IEEE Transactions on Aerospace Electronic, 1986,22.

(上接第90页)

3 结论

提出了一种基于误差知识的二重插值 DFT 实正弦信号参数估计方法,克服了其他基于 FFT 的估计方法精度受被估计信号频率相对 DFT 最大谱线对应频率偏差 δ 影响的问题。理论计算与数值仿真结果表明,在初相估计中应用基于误差知识的二重插值 DFT 方法性能接近 CRB,其初相估计均方差仅为 CRB 的 1.113 倍,相对插值 DFT 方法性能提升了近 28%。在卫星双向时间比对系统的应用背景下 ($\delta \approx 0$),为实现与本文方法 10^5 点估计相当的精度,本文方法仅需要插值 DFT 方法 58% 复乘法及 48% 复加法计算量即可。

基于误差知识的二重插值 DFT 方法应用于频率、幅度估计时,克服了被估计信号频率相对 DFT 最大谱线对应频率偏差 δ 对估计性能的影响,估计性能相对插值 DFT 方法有一定程度的提升。

本文成果已应用于卫星双向时间比对系统中时钟初相的高精度测量。

参考文献:

- [1] Shemar S L, Davis J A. Improving the Delay Stability of a Two-way Satellite and Frequency Transfer Earth Station[J]. Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 1998,30: 329-340.
- [2] Stanford Research Systems. SR620-Universal Time Interval and Frequency Counter[Z].2004.
- [3] Rife D, Boorstyn R. Single Tone Parameter Estimation from Discrete-time Observations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974,20(5): 591-598.
- [4] Jain V K, Collins W L, Davis D C. High-accuracy Analog Measurements Via Interpolated FFT[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1979,28(2): 113-122.
- [5] Quinn B G. Estimation of Frequency, Amplitude, and Phase from the DFT of a Time Series[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997,45(3): 814-817.
- [6] 齐国清,贾欣乐.插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J].电子学报,2004,(4): 625-629.
- [7] 齐国清.利用 FFT 相位差校正信号频率和初相估计的误差分析[J].数据采集与处理,2003,(1): 7-11.
- [8] 李素芝,万建伟.时域离散信号处理[M].长沙:国防科技大学出版社,1994.

