

文章编号: 1001-2486(2008)03-0027-05

考虑扩散效应圆形隧洞热弹性耦合动力响应研究*

郑荣跃^{1,2}, 刘干斌¹, 唐国金²

(1. 宁波大学 建筑工程与环境学院, 浙江 宁波 315211; 2. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 利用 S-H 热弹性扩散的基本理论, 研究了无限弹性介质中圆形隧洞表面受随时间变化的热冲击的动力响应问题。采用直接求解方法以避免势函数的引入, 利用 Laplace 变换技术, 求解热、力、化学耦合控制方程, 获得了弹性介质中温度梯度、位移、应力和化学势的积分形式解。最后, 利用 Laplace 逆变换得到数值结果, 分析了热、力、化学耦合条件下弹性介质中温度梯度、应力、位移和化学势响应的分布规律。

关键词: 扩散; 动力响应; 热弹性; Laplace 变换

中图分类号: TU471.2 **文献标识码:** A

Thermodynamic Response of a Cylindrical Tunnel in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion

ZHENG Rong-yue^{1,2}, LIU Gan-bin¹, TANG Guo-jin²

(1. College of Civil Construction and Environmental Engineering, Ningbo Univ., Ningbo 315211, China;

2. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The theory of generalized thermoelastic diffusion of Sherief is used to investigate the dynamic response of infinite elastic medium with a cylindrical tunnel subjected to a time-dependent thermal shock. Without the customary use of potential functions, the direction method of solution, with the help of Laplace technique, is used to solve the coupling thermal, chemical and mechanical governing equation. The analytical solutions of temperature increment, displacement, stress and chemical potential are obtained in the transform domain, and by using the inverse Laplace transform, the numerical results are obtained and used to analyze the distribution of temperature increment, stress, displacement and chemical potential on the condition of thermo-chemo-mechanical coupling.

Key words: diffusion; dynamic response; thermo-elastic; Laplace transform

温度对岩土介质物理力学性质的影响是岩土工程领域中的一个重要课题。迄今为止,越来越多的学者开始关注热弹性理论的研究和应用,如 Campanella^[1]利用各向等压试验,对土体组成成分的热膨胀问题进行了研究。白冰等^[2]分析了温度效应对粘性土介质若干基本力学特性的影响。实际上, Biot 早在 1956 年就建立了耦合热弹性理论,但该理论同非耦合理论一样仅能预测无限大速度的热波传播^[3]。通过引入修正的热传导定律代替传统的 Fourier 定律, Lord 和 Shulman^[4]在 1967 年建立了耦合热弹性理论,并消除了耦合热弹性理论仅能分析无限大速度热波传播的缺陷。基于该理论, Sherief 等人^[5]分析了无限弹体中球形孔洞表面作用有突变温度的热弹性动力响应问题, Kundu 等人^[6]研究了无限介质中球形孔洞表面受热力源条件下的热粘弹性动力响应, Lykotrafitis 等人^[7]研究了内置点源作用下的三维热弹性波动问题。此外, Nowacki^[8]建立了热弹性扩散理论, Sherief^[9]将该理论进行了推广。基于 Sherief 热扩散理论, Singh^[10]分析了弹性体自由表面 P 波和 SV 波的反射问题, Aouadi^[11]分析了弹性体中球形孔洞的热弹性扩散问题。

* 收稿日期: 2007-12-20

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(Y107637); 宁波市自然科学基金资助项目(2007A6100626)

作者简介: 郑荣跃(1964—), 男, 教授, 博士生。

1 热扩散耦合控制方程及求解

1.1 热扩散控制方程

利用 Sherief 等人提出的热扩散理论^[9],在不考虑体力的条件下,均质各向同性弹性介质中热动力响应的控制方程可以表示为:考虑无限弹性介质中半径为 R 的圆形隧洞表面受随时间变化的热冲击的响应问题,在柱坐标体系 (r, ϑ) 中建立问题的分析模型。假定热冲击均匀分布于隧洞表面,将热扩散理论进行简化,视为一维问题,则其控制方程可表示为:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial e}{\partial r} - \beta_1 \frac{\partial T}{\partial r} - \beta_2 \frac{\partial C}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\rho c_e T + \beta_1 T_0 e + c T_0 C) = K \nabla^2 T \quad (2)$$

$$D \beta_2 \nabla^2 e + D c \nabla^2 T + \dot{C} + \tau \ddot{C} = D b \nabla^2 C \quad (3)$$

$$\sigma_r = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_1 (T - T_0) - \beta_2 C \quad (4)$$

$$P = -\beta_2 e + bC - c(T - T_0) \quad (5)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \quad (6)$$

式中, $\beta_1 = (3\lambda + 2G) a_t$, $\beta_2 = (3\lambda + 2G) a_c$, 其中, a_t 和 a_c 分别为线性热膨胀和扩散膨胀系数; λ 和 G 为 Lamé 常数; T 为绝对温度, T_0 为弹性质的参考温度; K 为热传导系数; c_e 为常应变条件下介质的比热; ρ 为介质密度; σ_{ij} 为应力张量; e_{ij} 为应变张量; P 为化学势; C 为扩散流强度; D 为扩散系数; c, b 为热扩散影响系数; τ_0 为热松弛时间, τ 为扩散松弛时间。

1.2 方程求解

为了采用直接求解方法对圆形隧洞热弹性耦合动力问题进行分析,对方程(1)~(5)中的量进行无量纲化处理,并定义:

$$\begin{cases} r^* = V\eta r; & u^* = V\eta u; & t^* = V^2 \eta t; & \tau_0^* = V^2 \eta \tau_0; & \tau^* = V^2 \eta \tau; & \theta^* = \frac{\beta_1 (T - T_0)}{\lambda + 2G} \\ C^* = \frac{\beta_2 C}{\lambda + 2G}; & \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2G}; & P^* = \frac{P}{\beta_2}; & V = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}; & \eta = \frac{\rho c_e}{K} \end{cases} \quad (7)$$

利用式(7)对控制方程(1)~(5)无量纲化(为书写方便,在无量纲化处理后省去星号),可得控制方程如下:

$$\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\theta + \varepsilon e + \varepsilon \alpha_1 C) = \nabla^2 \theta \quad (9)$$

$$\nabla^2 e + \alpha_1 \nabla^2 \theta + \alpha_2 (\dot{C} + \tau \ddot{C}) = \alpha_3 \nabla^2 C \quad (10)$$

$$\sigma_r = e - \beta^2 \frac{u}{r} - \theta - C \quad (11)$$

$$P = -e - \alpha_1 \theta + \alpha_3 C \quad (12)$$

式中, $\alpha_1 = \frac{c \rho V^2}{\beta_1 \beta_2}$; $\alpha_2 = \frac{\rho V^2}{\beta_2 D \eta}$; $\alpha_3 = \frac{b \rho V^2}{\beta_2}$; $\varepsilon = \frac{T_0 \beta_1^2}{\rho^2 c_e V^2}$; $\beta^2 = \frac{2G}{\lambda + 2G}$ 。

为了求解方程(8)~(12),引入 Laplace 变换及逆变换^[12],并对方程(12)进行处理,则由方程(8)~(10)可以得到变换域中控制方程:

$$(\nabla^2 - s^2) \bar{e} = \nabla^2 \bar{\theta} + \nabla^2 \bar{C} \quad (13)$$

$$s(1 + \tau_0 s) (\bar{\theta} + \varepsilon \bar{e} + \varepsilon \alpha_1 \bar{C}) = \nabla^2 \bar{\theta} \quad (14)$$

$$\nabla^2 \bar{e} + \alpha_1 \nabla^2 \bar{\theta} + \alpha_2 s(1 + \tau s) \bar{C} = \alpha_3 \nabla^2 \bar{C} \quad (15)$$

对方程(13)~(15)进行解耦可以得到

$$\begin{pmatrix} \Delta^6 - \xi_1 & \Delta^4 \xi_2 & \Delta^2 - \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e} \\ \bar{\theta} \\ \bar{C} \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

式中, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 3 个对应于某种类型的波的基本参数, ξ_1, ξ_2, ξ_3 的表达式为

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{x_3(\alpha_3 - 1)} \left[\left(x_3 + \alpha_3 x_2 \right) \left(x_3 - x_1 \right) - x_2 x_4 + \left(x_3 + x_2 \right) \left(\alpha_3 x_1 + x_4 + x_3 \alpha_1 \right) + x_3 \alpha_3 s^2 \right] \\ \xi_2 = \frac{1}{x_3(\alpha_3 - 1)} \left[x_2 x_4 \left(x_3 - x_1 \right) + \left(x_3 + x_2 \right) x_1 x_4 + \left(\alpha_3 x_1 + x_4 + x_3 \alpha_1 \right) x_3 s^2 \right] \\ \xi_3 = \frac{1}{x_3(\alpha_3 - 1)} x_1 x_3 x_4 s^2 \\ x_1 = s \left(1 + \tau_{0s} \right); \quad x_2 = s \left(1 + \tau_{0s} \right) \varepsilon; \quad x_3 = s \left(1 + \tau_{0s} \right) \alpha_1; \quad x_4 = s \left(1 + \tau_s \right) \alpha_2 \end{cases}$$

方程(17)可用特征根表示:

$$\begin{pmatrix} \Delta^2 - k_1^2 \\ \Delta^2 - k_2^2 \\ \Delta^2 - k_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e} \\ \bar{\theta} \\ \bar{C} \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

式中, k_1, k_2, k_3 为热弹性介质中压缩波(P波)、扩散波(MD波)以及热波(T波)的波数, k_1, k_2, k_3 可表示为:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{3} \left(2p \sin q + \xi_1 \right); \quad k_2^2 = \frac{1}{3} \left[\xi_1 - p \left(\sqrt{3} \cos q + \sin q \right) \right]; \quad p = \sqrt{\xi_1^2 - 3\xi_2} \\ k_3^2 &= \frac{1}{3} \left[\xi_1 + p \left(\sqrt{3} \cos q - \sin q \right) \right]; \quad q = \frac{1}{3} \arcsin \left[- \frac{3\xi_2 - 9\xi_1\xi_2 + 27\xi_3}{2p^3} \right] \end{aligned}$$

求解方程(17),并考虑到位移响应的有界性,在变换域中可以得到体应变、温度梯度以及扩散流强度的解析表达式:

$$\bar{e} = A_1 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} + A_2 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} + A_3 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\bar{\theta} = B_1 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} + B_2 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} + B_3 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{C} = M_1 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} + M_2 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} + M_3 K_0 \begin{pmatrix} k_1 r \\ k_2 r \\ k_3 r \end{pmatrix} \quad (20)$$

式中, $K_n(x)$ 为 n 阶第二类虚宗量 Bessel 函数, $A_i, B_i, M_i (i = 1, 2, 3)$ 为待定常数,可由问题分析的边界条件确定。

利用 Bessel 函数的基本性质,由式(18)可以得到位移响应解答

$$\bar{u}(r, s) = - \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{k_i} K_1(k_i r), \quad i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

对式(11)和(12)进行 Laplace 变换,可以得到应力和化学势的计算表达式

$$\bar{\sigma}_r = \sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2}{r k_i} A_i K_1(k_i r) + \left(A_i - B_i - M_i \right) K_0(k_i r) \quad (22)$$

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^3 \left(-A_i - \alpha_1 B_i + \alpha_3 M_i \right) K_0(k_i r) \quad (23)$$

由于 A_i, B_i, M_i 为线性独立常数,其关系可由方程(13)和(14)确定,

$$A_i = \frac{k_i^2 \left(\alpha_1 + x_i - 1 \right)}{\alpha_1 \left(k_i^2 - s^2 \right) + \varepsilon k_i^2} B_i; \quad M_i = \frac{\left(x_i - 1 \right) \left(k_i^2 - s^2 \right) - k_i^2 \varepsilon}{\alpha_1 \left(k_i^2 - s^2 \right) + \varepsilon k_i^2} B_i; \quad x_i = \frac{k_i^2}{s \left(1 + \tau_{0s} \right)} \quad (24)$$

2 边界条件及热动力响应解

考虑弹性介质中无限长圆形隧洞模型,不考虑外部荷载的作用,假定隧洞表面仅有热冲击作用,为单级加载模式,同时假设在隧洞表面化学势亦为零,则圆形隧洞热弹性动力响应的边界条件可表示为

$$\sigma_r(R, t) = 0; \quad P(R, t) = 0; \quad \theta(R, t) = \begin{cases} \theta_0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \theta_0, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (25)$$

对式(25)进行 Laplace 变换,并将式(19)、(22)和(23)代入,可求得未知常数 B_i 。

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2}{R k_i} A_i K_1(k_i R) + \left(A_i - B_i - M_i \right) K_0(k_i R) = 0 \quad (26)$$

$$B_1 K_0(k_1 R) + B_2 K_0(k_2 R) + B_3 K_0(k_3 R) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \theta_0 \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(-A_i - \alpha_1 B_i + \alpha_3 M_i \right) K_0 \left(k_i R \right) = 0 \quad (28)$$

由上述方程组可以求得未知参数 B_1, B_2, B_3 , 对式(25) ~ (30) 进行 Laplace 逆变换, 可以得到圆形隧洞热弹性动力响应积分形式解答。

3 数值结果分析

本节利用数值方法对圆形隧洞热弹性动力响应位移、温度梯度、化学势及应力场分布影响进行分析。采用 Durbin^[13] Laplace 数值逆变换计算时域中的解(Laplace 变换表达式略), 其中各参数的取值分别为: $T_0 = 20, s = 0.25, N = 1000$ 。考虑扩散效应的弹性介质热动力响应参数如表 1 所示, 数值计算结果如图 1~ 6。

表 1 计算参数

Tab. 1 The computational parameters

变量	值	变量	值
Lame 常数 G	$3.86 \times 10^7 \text{ Pa}$	热膨胀系数 α_t	$1.78 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
Lame 常数 λ	$7.76 \times 10^7 \text{ Pa}$	扩散膨胀系数 α_c	$1.2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
土体密度 ρ	1800 kg/m^3	土体比热 c_e	$2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
热松弛时间 τ_0	0.02 s	热传导系数 K	3.8 W
扩散松弛时间 τ	0.2 s	初始温度 T_0	293 K
扩散系数 D	0.85×10^{-8}	扩散影响系数 $c; b$	$12; 9 \times 10^5$

图 1 和图 2 反映了温度增量在隧洞周围的分布情况, 图 1 为不同时刻温度增量沿径向的变化曲线, 图 2 为不同径向位置的温度增量随时间变化的曲线。由于本文采用耦合热弹性理论, 热波以有限速度传播, 因此从图中可以看出: 在隧洞表面热源作用下, 隧洞周围介质中的温度增量沿径向减小, 随着时间的增加, 温度增量增大, 并趋于稳定。

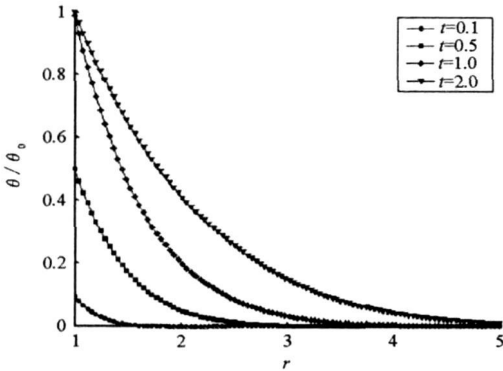


图 1 温度增量沿径向变化曲线

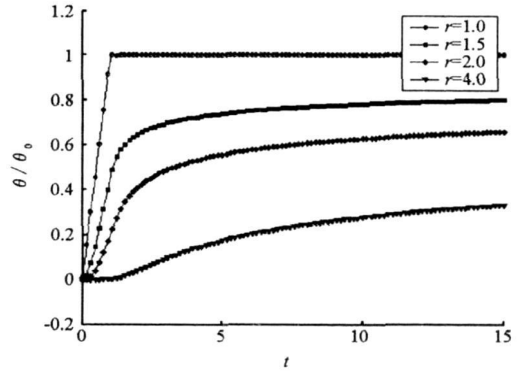


图 2 温度增量随时间变化曲线

Fig. 1 Distribution of temperature increment at different time Fig. 2 Distribution of temperature increment at different radius

图 3、4 反映了径向位移在隧洞周围的分布。由图中可以看出: 在热冲击作用下, 隧洞周围一定范围内的介质产生膨胀变形, 而在远离洞周围则产生压缩变形。随着时间的增加, 膨胀变形更加显著且影响区域也逐渐扩大。随着溶质扩散和热传导的作用, 洞表面的膨胀变形最终趋于零, 而内部压缩变形则随时间增加而趋于稳定值(图 4)。由于假设洞表面径向应力为零, 故在不同时刻径向应力沿径向的变化曲线如图 5 所示, 图中表明在 r 为较小范围内, 膨胀应力增大, 远离洞表面, 径向应力减小并趋于零。扩散系数对化学势的影响曲线如图 6 所示, 随着扩散系数增大, 化学势衰减加快, 化学势减小。

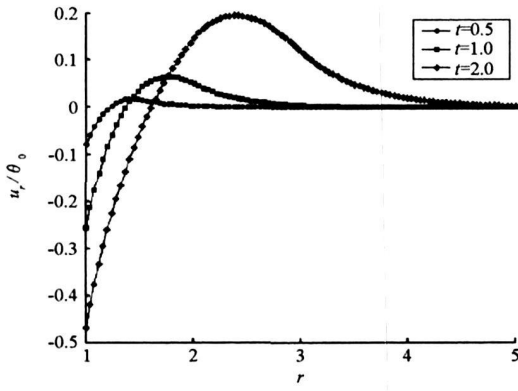


图3 径向位移沿径向变化曲线

Fig. 3 Curve of radial displacement at different time

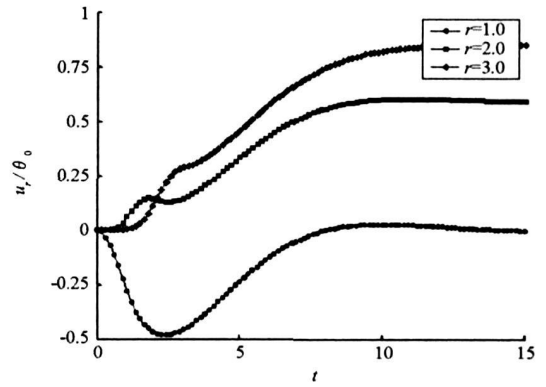


图4 径向位移随时间变化曲线

Fig. 4 Curve of radial displacement at different radius

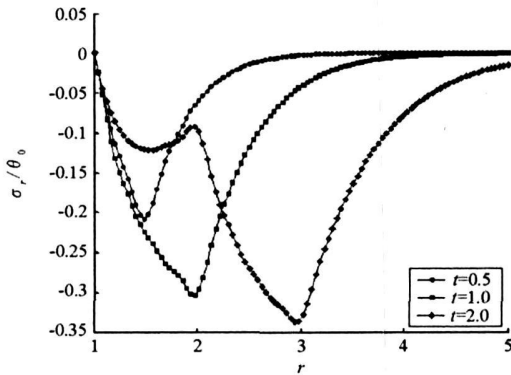


图5 径向应力沿径向变化曲线

Fig. 5 Curve of radial stress at different time

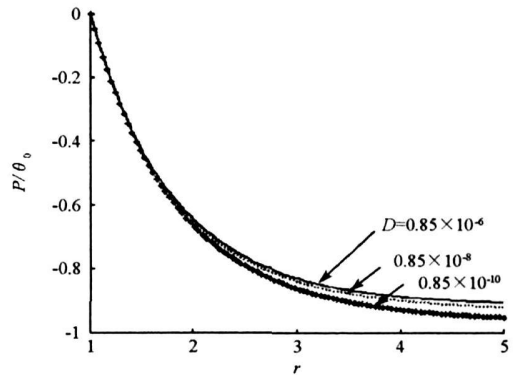


图6 扩散系数对化学势的影响曲线

Fig. 6 Effect of diffusion coefficient on chemical potential

4 结论

基于 S-H 热弹性扩散理论, 采用直接方法并利用 Laplace 变换技术, 研究了无限弹性介质中圆形隧洞表面受随时间变化热冲击的动力响应问题。利用 Laplace 逆变换得到数值结果, 分析了热、力、化学耦合条件下弹性介质中温度梯度、应力、位移和化学势响应的分布规律。分析结果表明: 在热源作用下, 隧洞周围介质中的温度增量沿径向减小; 在隧洞周围一定范围内的介质产生膨胀变形和膨胀应力, 而在远离洞周围则产生压缩变形。

参考文献:

- [1] Campanella R G, Mitchell J K. Influence of Temperature Variation on Soil Behavior[J]. J. Soil Mech. and Found Engrg. D. V., ASCE, 1968, 94(3): 709- 734.
- [2] 白冰, 赵成刚. 温度对粘性土介质力学特性的影响[J]. 岩土力学, 2003, 23(4): 533- 537.
- [3] Biot M. Thermoelasticity and Irreversible Thermo-dynamics[J]. J. Appl. Phys., 1956, 27: 240- 253.
- [4] Lord H, Shulman Y. A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity[J]. J. Mech. Phys. Solid, 1967, 15: 299- 309.
- [5] Sherief H H, Saleh H A. A Problem for an Infinite Thermoelastic Body with a Spherical Cavity[J]. Int. J. Engng. Sci., 1998, 36(4): 473- 487.
- [6] Kundu M R, Mukhopadhyay B. A Thermo-viscoelastic Problem of an Infinite Medium with a Spherical Cavity Using Generalized Theory of Thermoelasticity[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2005, 41: 25- 32.
- [7] Lykourafitis G, Georgiadis H G, Brock L M. Three-dimensional Thermoelastic Wave Motions in a Half-space under the Action of a Buried Source [J]. Int. J. Solids Structures, 2001, 38: 4857- 4878.
- [8] Nowacki W. Dynamical Problem of Thermo-diffusion in Elastic Solids[C]//Proc. Vib. Prob, 1974, 15: 105- 128.
- [9] Sherief H H, Hanzha F A, Saleh H A. The Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion[J]. International Journal of Engineering Science, 2004, 42: 591- 608.
- [10] Singh B. Reflection of P and SV Waves from Free Surface of an Elastic Solid with Generalized Thermo-diffusion[J]. J. Earth. Syst. Sci. 2005, 114: 159- 168.
- [11] Aoudi M. A Problem for an Infinite Elastic Body with a Spherical Cavity in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion[J]. Int. J. Solids and Structures, 2007, 44: 5711- 5722.
- [12] Durbin F. Numerical Inversion of Laplace Transformation: An Efficient Improvement to Durbin and Abate's Method[J]. The Computer Journal. 1974, 17(4): 371- 376.