文章编号:1001-2486(2008)04-0129-04

一类具 M-P 型非线性二元神经网络模型的周期解*

刘开宇[1,2], 侯振挺[2]
(1. 湖南大学 数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082; 2. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410083)

摘 要: 针对一类具 M-P 型非线性信号传输函数的二元神经网络模型, 提出其初值振动时系统周期解的存在性问题。利用结式技巧, 结合分析方法, 建立了用结式表示的保证具振动初值系统周期解存在的充分条件, 并通过例子说明零阈值情形周期解的稳定性。

关键词: 神经网络; 周期解; 结式
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

The Periodic Solution of a Neural Networks of Two Neurons with McCulloch-Pitts Nonlinearity

LIU Kai-yu[1,2], HOU Zhen-ting[2]
(1. College of Mathematics and Econometrics, Hunan Univ., Changsha 410082, China;
2. School of Mathematical Sciences and Computing Technology, Central South Univ., Changsha 410083, China)

Abstract: The existence of the periodic solution for neural networks of two neurons with McCulloch-Pitts type signal functions and oscillatory initial value was proposed. By using the resultant techniques and method of analysis, resultant conditions which ensure the existence of periodic solution of the system with sign change of initial value were established. Furthermore, the stability of the periodic solution of the system with zero threshold was shown by example.

Key words: neural network; periodic solution; resultant

考虑下列非线性二元神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)) \\ \dot{y} = -y - f(x(t-\tau)) \end{cases} \tag{1}$$

其中时滞 $\tau > 0, f: R \to R$ 为 M-P 型不连续信号函数

$$f(\xi) = \begin{cases} -1, & 若\ \xi > \sigma \\ 1, & 若\ \xi \leqslant \sigma \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\sigma \in R$ 为阈值。关于这一模型的动力学行为, 诸如渐近性、稳定性、周期性等已有大量文献作了深入而广泛研究[1-6], 这些工作都是将初值设定在不变号的函数空间展开的。本文考察当初值 $\Phi = (\varphi, \psi)$ 定义在一振动初始函数空间, 即 $\varphi - \sigma$ 与 $\psi - \sigma$ 若出现有限次振动时, 周期解的存在性。当 $0 \leqslant \sigma < 1$ 时, 我们获得了系统(1)有一孤立周期解的充分条件, 其周期 $T \in (\tau, 2\tau)$。

考虑这些初值: $\Phi \in \tilde{X}_\sigma = \tilde{X}_\sigma^{+,+} \cup \tilde{X}_\sigma^{+,-} \cup \tilde{X}_\sigma^{-,+} \cup \tilde{X}_\sigma^{-,-}$, 其中

$$\tilde{X}_\sigma^{\pm,\pm} = \{ \Phi \in X: \Phi = (\varphi, \psi), \ \varphi \in \tilde{C}_\sigma^{\pm} \text{ 且 } \psi \in \tilde{C}_\sigma^{\pm} \}$$

上式中

$$\tilde{C}_\sigma^{+} = \{ \varphi: [-\tau, 0] \to R; \ \varphi(0) - \sigma > 0 \text{ 且 } \varphi(t) - \sigma \leqslant 0 \quad 对某个\ t \in [-\tau, 0) \}$$

$$\tilde{C}_\sigma^{-} = \{ \varphi: [-\tau, 0] \to R; \ \varphi(0) - \sigma \leqslant 0 \text{ 且 } \varphi(t) - \sigma > 0 \quad 对某个\ t \in [-\tau, 0) \}$$

---

* 收稿日期: 2008-01-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10601016)
作者简介: 刘开宇(1964—), 女, 副教授, 博士后。

1 几个引理

设 $\tau>0$ 为给定常数, 让 S 表示定义在 $(-\infty,0]$ 上的点序列 $\{t_j\}_{j=0}^{n}$ 的集合, 满足 $1\leqslant n<\infty$, $t_0=0$, $t_n=-\tau$ 及 $t_j>t_{j+1}(j=0,1,2,\cdots,n)$。

引理 1 设 $0<\sigma<1$, $0<\tau<\infty$, 则方程组

$$\begin{cases} u=\dfrac{(1+\sigma)}{(1-\sigma)e^{\tau}}\cdot\dfrac{2e^{\tau}v+(1-\sigma)u-2}{2e^{\tau}u-(1-\sigma)v} \\ v=\dfrac{4e^{\tau}-4e^{\tau}u+(1-\sigma^2)v}{(1-\sigma)e^{\tau}[2e^{\tau}u-(1-\sigma)v]} \end{cases}$$

有唯一实解 $(u^*,v^*)\in R^2$, 且

$$\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}}<u^*<1,\quad v^*=\frac{2(1-\sigma)e^{2\tau}(u^*)^2-(1-\sigma^2)u^*+2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2e^{\tau}u^*+2(1+\sigma)e^{\tau}}$$

证明 略。

引理 2 若引理 1 中条件成立, u^* 如引理 1 所述, 又设

$$F(u)=(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau}u^3+2\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau}u^2$$
$$+(1+\sigma)[(1-\sigma^2)(1-\sigma)+(2+12\sigma-6\sigma^2)e^{2\tau}]u-2(1+\sigma)^2[2e^{2\tau}+(1-\sigma)]$$
$$g_1(u)=2(1-\sigma)e^{3\tau}u^2-[(1-\sigma)^2+(1-\sigma^2)e^{\tau}+4e^{2\tau}]u+2[(1-\sigma)+(1+\sigma)e^{\tau}]$$

如果 $F(u)$ 与 $g_1(u)$ 的结式

$$R(F,g_1)=\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} & b_{10} & & \\ & b_{12} & b_{11} & b_{10} & \\ & & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}>0$$

其中

$$\begin{cases} a_3=(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau} \\ a_2=2\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau} \\ a_1=(1+\sigma)[(1-\sigma)^2(1+\sigma)+(2+12\sigma-6\sigma^2)e^{2\tau}] \\ a_0=-2(1+\sigma)^2(1-\sigma+2e^{2\tau}) \end{cases}\qquad \begin{cases} b_{12}=2(1-\sigma)e^{3\tau} \\ b_{11}=-[(1-\sigma)^2+(1-\sigma^2)e^{\tau}+4e^{2\tau}] \\ b_{10}=2[1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}] \end{cases}$$

则

$$v^*>\frac{2e^{\tau}}{(1-\sigma)+(1+\sigma)e^{\tau}}u^*$$

证明 由引理 1 可证, 略。

引理 3 若引理 1 中条件成立, $F(u)$ 如引理 2 所述, 设

$$g_2(u)=[4(1+\sigma)e^{2\tau}+(1-\sigma)^3e^{\tau}+(1-\sigma^2)(1-\sigma)]u^2$$
$$+[4\sigma(1-\sigma)e^{\tau}-2(1-\sigma^2)]u-4(1+\sigma)e^{\tau}$$

如果 $F(u)$ 与 $g_2(u)$ 的结式

$$R(F,g_2)=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{21} & b_{20} & & \\ & b_{22} & b_{21} & b_{20} & \\ & & b_{22} & b_{21} & b_{20} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}<0$$

其中 $a_k(k=0,1,2,3)$ 的定义见引理 2, 且

$$\begin{cases} b_{22}=4(1+\sigma)e^{2\tau}+(1-\sigma)^3e^{\tau}+(1-\sigma)^2(1+\sigma) \\ b_{21}=2(1-\sigma)+(1+\sigma+2\sigma e^{\tau}) \\ b_{20}=4(1+\sigma)e^{\tau} \end{cases}$$

则

$$v^* < \frac{(1-\sigma)e^{\tau}+(1+\sigma)}{2(1+\sigma)e^{\tau}}[2-(1-\sigma)u^*] < 1$$

证明　略。

2　定理及证明

定理　若 $0<\sigma<1$, $0<\tau<\infty$, 且 $R(F,g_1)>0$, $R(F,g_2)<0$, F,g_1,g_2 的含义如引理 2 及引理 3 所述, 则模型(1) 存在一孤立周期解。

证明　设 u^*, v^* 如引理 1 所述, 则易知 $e^{-\tau}<u^*<v^*<1$, $-\tau<\ln u^*<\ln v^*<0$。取

$\Phi=(\varphi,\Psi)\in\tilde{X}_\sigma$, 使 $n(\varphi)=n(\Psi)=2$, $S_\varphi=\{-\tau,t_\varphi,0\}$, $t_\varphi\approx\ln v^*$; $S_\Psi=\{-\tau,t_\phi,0\}$, $t_\Psi\approx\ln u^*$, 以及 $\varphi(0)\approx1-(1-\sigma)v^*$, $\Psi(0)\approx1-(1-\sigma)u^*$。显然 $\Phi\in\tilde{X}_\sigma^{+,+}$。当 $0\leqslant t\leqslant t_\Psi+\tau$ 时, 可证存在 $t_1\in(0,t_\Psi+\tau)$, 使 $y(t_1)=\sigma$,

$$t_1=\ln\frac{\Psi(0)+1}{\sigma+1}\approx\ln\frac{2-(1-\sigma)u^*}{1+\sigma}$$

类似可证: 当 $t_\Psi+\tau\leqslant t\leqslant t_\varphi+\tau$ 时, 存在 $t_2\in(t_\Psi+\tau,t_\varphi+\tau)$, 使 $x(t_2)=\sigma$,

$$t_2=\ln\frac{\varphi(0)-1+2e^{t_\Psi+\tau}}{1+\sigma}\approx\ln\frac{2e^{\tau}u^*-(1-\sigma)v^*}{(1+\sigma)}$$

当 $t_\varphi+\tau\leqslant t\leqslant t_1+\tau$ 时, 存在 $t_3\in(t_\varphi+\tau,t_1+\tau)$, 使 $y(t_3)=\sigma$,

$$t_3=\ln\frac{\Psi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}}{1-\sigma}\approx\ln\frac{2e^{\tau}v^*-(1-\sigma)u^*-2}{(1-\sigma)}$$

当 $t_1+\tau\leqslant t\leqslant t_2+\tau$ 时, 存在 $t_4\in(t_1+\tau,t_2+\tau)$, 使 $x(t_4)=\sigma$,

$$t_4=\ln\frac{2\times\frac{1+\Psi(0)}{1+\sigma}e^{\tau}-2e^{t_\Psi+\tau}-\varphi(0)+1}{1-\sigma}\approx\ln\frac{4e^{\tau}-4e^{\tau}u^*+(1-\sigma^2)v^*}{(1-\sigma^2)}$$

于是可得:

$$e^{t_3-t_2-\tau}=\frac{2e^{t_\varphi+\tau}-\Psi(0)-1}{(1-\sigma)e^{\tau}}\bullet\frac{1+\sigma}{\varphi(0)-1+2e^{t_\Psi+\tau}}\approx\frac{2e^{\tau}v^*-2+(1-\sigma)u^*}{(1-\sigma)e^{\tau}}\bullet\frac{1+\sigma}{-(1-\sigma)v^*+2e^{\tau}u^*}=u^*,$$

$$e^{t_4-t_3-\tau}=\frac{2\times\frac{1+\Psi(0)}{1+\sigma}e^{\tau}-2e^{t_\Psi+\tau}-\varphi(0)+1}{(1-\sigma)e^{\tau}}\bullet\frac{1+\sigma}{\varphi(0)-1+2e^{t_\Psi+\tau}}$$

$$\approx\frac{4e^{\tau}-4e^{\tau}u^*+(1-\sigma^2)v^*}{(1-\sigma^2)e^{\tau}}\bullet\frac{1+\sigma}{-(1-\sigma)v^*+2e^{\tau}u^*}=v^*$$

现令

$$u=e^{t_3-t_2-\tau},\quad v=e^{t_4-t_2-\tau}$$

重复前面过程, 可证:

当 $t_2+\tau\leqslant t\leqslant t_3+\tau$ 时, 存在 $t_5\in(t_2+\tau,t_3+\tau)$, 使 $y(t_5)=\sigma$,

$$t_5=t_2+\tau+\ln\frac{1+y(t_2+\tau)}{1+\sigma}\approx t_2+\tau+\ln\frac{2-(1-\sigma)u}{1+\sigma}$$

当 $t_3+\tau\leqslant t\leqslant t_4+\tau$ 时, 存在 $t_6\in(t_3+\tau,t_4+\tau)$, 使 $x(t_6)=\sigma$,

$$t_6=t_2+\tau+\ln\frac{2e^{\tau}u-(1-\sigma)v}{1+\sigma}$$

当 $t_4+\tau\leqslant t\leqslant t_5+\tau$ 时, 存在 $t_7\in(t_4+\tau,t_5+\tau)$, 使 $y(t_7)=\sigma$,

$$t_7 = t_2 + \tau + \ln \frac{-2 + (1-\sigma)u + 2e^{\tau}v}{1-\sigma}$$

当 $t_5+\tau \leqslant t \leqslant t_6+\tau$ 时, 存在 $t_8 \in (t_5+\tau, t_6+\tau)$, 使 $x(t_8)=\sigma$,

$$t_8 = t_2 + \tau + \ln \frac{4e^{\tau} - 4e^{\tau}u + (1-\sigma^2)v}{1-\sigma^2}$$

令

$$\begin{cases} U = e^{t_7 - t_6 - \tau} \\ V = e^{t_8 - t_6 - \tau} \end{cases}$$

得 $R^2 \to R^2$ 的映射 $\Phi: (u, v) \to (U, V)$,

$$\begin{cases} U = \dfrac{(1+\sigma)e^{-\tau}}{1-\sigma} \cdot \dfrac{2e^{\tau}v + (1-\sigma)u - 2}{2e^{\tau}u - (1-\sigma)v} \\ V = \dfrac{e^{-\tau}}{1-\sigma} \cdot \dfrac{4e^{\tau} - 4e^{\tau}u + (1-\sigma^2)v}{2e^{\tau}u - (1-\sigma)v} \end{cases}$$

由引理1, Φ 存在唯一不动点 $(u, v) = (u^*, v^*) \in R^2$, 即 $\Phi(u^*, v^*) = (u^*, v^*)$, 由此可证初值为 $\Phi = (\varphi, \Psi)$ 的解为系统的周期解。证毕。

例: $\sigma = 0$ 时, 计算得

$$\begin{cases} F(u) = (1+2e^{2\tau})(e^{2\tau}u^3 + u - 2) \\ g_1(u) = 2e^{3\tau}u^2 - (1 + e^{\tau} + 4e^{2\tau})u + 2(1+e^{\tau}) \\ g_2(u) = (4e^{2\tau} + e^{\tau} + 1)u^2 + 2u - 4e^{\tau} \end{cases}$$

则有 $R(F, g_1) = 16e^{4\tau}(1+2e^{2\tau})^3(e^{\tau}-1)^2 > 0$, $R(F, g_2) = -32e^{3\tau}(1+2e^{2\tau})^3(e^{\tau}-1)^2 < 0$。由定理可知非线性系统(1)存在孤立周期解, 且周期为 $T = \tau + \ln(2e^{\tau}u^* - v^*) \in (\tau, 2\tau)$, 其中 u^* 是方程 $e^{2\tau}u^3 + u - 2 = 0$ 的唯一实根, 且有 $v^* = e^{\tau}(u^*)^2$。进一步计算知映射 $\Phi: R^2 \to R^2$ 的 Jacobi 阵 $D\Phi(u^*, v^*)$ 的特征方程的根满足 $|\lambda_j|^2 > 1 (j = 1, 2)$, 故系统(1)的孤立周期解是不稳定的。

3 结论

鉴于人工神经网络系统中信号传输过程的复杂性, 因而研究振动型初值系统周期解的存在性具有重要的实际意义。本文对这类问题进行了初步研究。利用结式通过构造回复映射给出了具振动初值及M-P型非线性信号传输函数的二元神经网络模型周期解存在的充分条件。对零阈值情形分析得出其不稳定的结论。

参考文献:

[1] Gopalsamy K, Leung I. Delay Induced Periodicity in a Neural Netlet of Excitation and Inhibition[J]. Phys. D., 1995, 89: 395-426.

[2] Wei J, Ruan S. Stability and Bifurcation in a Neural Network Model with Two Delay[J]. Phys. D, 1999, 130: 255-272.

[3] Huang L, Wu J. The Role of Threshold in Preventing Delay-induced Oscillations of Frustrated Neural Networks with McCulloch-pitts Nonlinearity[J]. Int. J. Math. Game Theory and Algebra, 2001, 11(6): 71-100.

[4] Wu J. Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay[M]. New York: Walter de Gruyter, 2001.

[5] Lu S, Ge W. Some New Results on the Existence of Periodic Solutions to a Kind of Rayleigh Equation with a Deviating Argument[J]. Nonlinear Analysis, 2004, 56: 501-514.

[6] Guo S, Huang L. Periodic Solutions in an Inhibitory Two-neuron network[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 161: 217-229.