文章编号: 1001- 2486(2008) 05- 0114- 06

基于循环子空间理论的线性系统测试矩阵优化*

杨拥民, 黎　湘, 庄钊文
(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙　410073)

摘　要: 研究了线性定常系统在循环指数大于 1(即其约当标准形不同的约当块有重根) 的情况下测试矩阵的优化方法。以循环子空间相关定理的证明为基础, 根据根向量链的相关特性, 得到了测试向量的线性和与系统观测性的直接关系, 给出了在保证系统可观测性的同时, 使得测试代价最小的测试矩阵优化方法。算例表明, 提出的方法简单直观, 对配置测试向量具有良好的工程价值。

关键词: 线性系统; 可观测性; 测试代价; 循环指数
中图分类号: TP13　　文献标识码: A

Measurement Matrix Optimization for Linear Systems Based on Cyclic Subspace Theory

YANG Yong-min, LI Xiang, ZHUANG Zhao-wen
(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A measurement matrix optimization approach for the linear time-invariant system of which the cyclic index is bigger than 1 (some different Jordan blocks of its Jordan canonical form have the same eigenvalue) was studied. Based on the proving of some cyclic subspace theories and relative properties of root vector chain, the relationship of measurement vectors' linear combination and the system observability was obtained. An approach which can achieve the minimum test cost and assure the system observability at the same time is presented. As the computation example shows, this approach is promising in engineering application as it is simple and straightforward.

Key words: linear system; observability; measurement cost; cyclic index

对于复杂系统来说, 了解其运行状态并对其进行可靠的控制与维护较为困难。在工程上, 对于可以采用数学模型描述的动态系统, 可以精心选择一些测试量, 根据测试结果, 采用状态估计的方法对不能直接检测的状态进行估计。近年来, 基于模型的传感器优化配置研究已成为一个热点研究领域。文献[1- 2]最早提出了"最经济结构综合"问题, 指出其主要目的是使控制矩阵和观测矩阵中的非零元的个数达到最小。文献[3]采用循环不变子空间分解的方法, 给出了最经济控制求解的一个方法。文献[4]则给出了一类采用有向图求取最经济控制的方法。对于最经济观测的问题, 不能简单地以观测阵中非零元个数最少来表示, 因为在实际工程中, 测量值往往是各状态的线性组合。近年来, 研究人员开始考虑"可观测程度"的大小。一类方法应用卡尔曼滤波器的方差阵作为传感器位置优化的准则[5- 8], 采用卡尔曼滤波器的方差阵的迹和行列式的值作为代价函数, 以保证估计的精度。另一类方法采用观测性矩阵与观测阵(observability gramian) 作为传感器位置优化的依据。文献[9]采用观测阵的最小奇值、行列式值以及逆矩阵的迹作为优化准则, 文献[10- 11]则采用观测性矩阵的条件数作为决策依据。国内[12- 14]也应用了观测性矩阵的奇值来分析惯导系统的可观测性。该类方法主要是通过使系统具有一定的可观测"裕度"以保证系统的可观测效果。

在工程实践当中, 需要一种直观的方法研究系统本身的固有特性, 建立系统的可观测性与测试向量之间的直接联系, 为测试矩阵的配置提供一种简单实用的手段。作者在文献[15]中针对系统循环指数为 1 的情况, 讨论了保证系统具备可观测性的条件下, 求取测试矩阵使测试代价最小化的问题, 给出了一种工程上简易而有效的算法。本文则研究系统循环指数大于 1 的情况下测试矩阵优化的问题。

* 收稿日期: 2008- 06- 25
基金项目: 国家部委基金重点资助项目
作者简介: 杨拥民(1966—), 男, 教授, 在职博士生。

1 问题的描述

对于 n 维线性定常系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h}_1 \quad \boldsymbol{h}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{h}_m]^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{h}_i \in \boldsymbol{R}^n$; 不失一般性, 设 $y_1 = \boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 是可以直接得到的系统输出值, $\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 是为了监测系统的状态而取的测试点。将传感器及其检测通道的成本、可靠性等合并为"测试代价"[16], 对应以上各测点, 分别为 $c_2, c_3, \cdots, c_m$。工程中存在这样的问题, 即选取哪些测点可以保证系统的可观测性, 同时测试代价最小, 即选取一个子集 $\boldsymbol{T} \subset \{\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \cdots, \boldsymbol{h}_m\}$, 它是所有保证系统可观测的测试向量集中, 测试代价 $\sum_j c_j, j \in \underline{m}$ 达到最小的。

2 基本定理

引理 1 设有 n 维约当阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{m_1}(\lambda_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}_{m_2}(\lambda_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_{m_k}(\lambda_0) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{J}_{m_i}(\lambda_0)$ 是阶数为 m_i 的约当块, 且 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots m_k$, 对于向量 $\boldsymbol{b} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{J}$ 经由 $\boldsymbol{b}$ 生成的循环空间 $< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}) > = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{J}^{m_1 - 1}\boldsymbol{b}]$ 维数为 m_1 当且仅当 $\beta_{m_1} \neq 0$。(证明略)

定理 1 对于 n 维约当阵 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{J}_{\beta_1}(\lambda_1), \boldsymbol{J}_{\beta_2}(\lambda_2), \cdots, \boldsymbol{J}_{\beta_k}(\lambda_k)]$ 有 $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$。其中

$$\boldsymbol{J}_{\beta_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\alpha_{i1}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}_{\alpha_{i2}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_{\alpha_{is_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^{\beta_i \times \beta_i}, \quad \alpha_{i1} \geqslant \alpha_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{is_i} \tag{3}$$

向量 $\boldsymbol{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^{\mathrm{T}}$ 经由 $\boldsymbol{J}$ 生成的循环子空间 $< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}) > = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{J}^{m-1}\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{C}^m$ (m 为 $\boldsymbol{J}$ 的最小多项式次数) 当且仅当 $\boldsymbol{b}_i \neq 0$, $i = \alpha_{11}, \beta_1 + \alpha_{21}, \beta_1 + \beta_2 + \alpha_{31}, \cdots, \left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\right) + \alpha_{k1}$。

证明

将 b 按照约当块的维数进行分块, 即 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{b}_{\beta_1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{b}_{\beta_2}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_{\beta_k}^{\mathrm{T}}]$, 并令

$$\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{b}_{\beta_1}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{T}} = [0 \quad \boldsymbol{b}_{\beta_2}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad 0], \ \cdots, \boldsymbol{f}_k^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_{\beta_k}^{\mathrm{T}}] \tag{4}$$

有

$$< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_i) > = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & & & \\ \boldsymbol{b}_{\beta_i} & \boldsymbol{J}_{\beta_i}\boldsymbol{b}_{\beta_i} & \cdots & \boldsymbol{J}_{\beta_i}^{\alpha_{i1}-1}\boldsymbol{b}_{\beta_i} \\ \boldsymbol{0} & & & \end{bmatrix} \tag{5}$$

据引理 1, $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{b}_{\beta_i} \quad \boldsymbol{J}_{\beta_i}\boldsymbol{b}_{\beta_i} \quad \cdots \quad \boldsymbol{J}_{\beta_i}^{\alpha_{i1}-1}\boldsymbol{b}_{\beta_i}] = \boldsymbol{C}^{\alpha_{i1}}$ 当且仅当 $\boldsymbol{b}_{\beta_i}$ 第 α_{i1} 个元素不为零。因 $\boldsymbol{J}$ 的最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{11}} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_{k1}}$, $< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_i) >$ 的最小多项式为 $(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_{i1}}$, 由空间第一分解定理, 互质最小多项式对应子空间可直接求和: $< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}) > = < \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_1) > \oplus < \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_2) > \oplus \cdots \oplus < \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_k) >$。从而定理条件满足时, 有

$$\dim\{< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}) >\} = \dim\{< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_1) >\} \oplus \dim\{< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_2) >\} \oplus \cdots \oplus \dim\{< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}_k) >\}$$

$$= \alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots\cdots + \alpha_{k1} = m \tag{6}$$

定理 2　n 维单输出系统 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{cases}$, $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{m}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的最小多项式次数。设有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{J}_{\beta_1}(\lambda_1), \boldsymbol{J}_{\beta_2}(\lambda_2), \cdots, \boldsymbol{J}_{\beta_k}(\lambda_k)] \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{P}^{-1} = [\boldsymbol{z}_1 \quad \boldsymbol{z}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{z}_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}_i \in \boldsymbol{R}^n$。$\boldsymbol{J}_{\beta_i}(\lambda_i)$、$\beta_i$、$\alpha_{i1}$ 定义如定理 1。其可观测子空间维数取最大, 即 $< \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{h}) > = \boldsymbol{C}^m$, 当且仅当

$$\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \neq 0,\ i = \alpha_{11},\ \beta_1 + \alpha_{21},\ \beta_1 + \beta_2 + \alpha_{31},\ \cdots,\ \left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\right) + \alpha_{k1} \tag{8}$$

证明　令 $\tilde{\boldsymbol{h}} = [\tilde{h}_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad \tilde{h}_n]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\dim\{< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{h}}) > \} &= \dim\{\boldsymbol{R}[\tilde{\boldsymbol{h}},\ \boldsymbol{J}\tilde{\boldsymbol{h}},\ \cdots,\ \boldsymbol{J}^{m-1}\tilde{\boldsymbol{h}}]\} \\ &= \dim\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{JP}^{-1}\boldsymbol{h},\ \cdots, \boldsymbol{J}^{m-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{h}]\} \\ &= \dim\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h},\ \cdots, \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m-1}\boldsymbol{h}]\} \\ &= \dim\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h},\ \cdots, (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m-1}\boldsymbol{h}]\} \\ &= \dim\{< \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{h}) > \}\end{aligned} \tag{9}$$

$< \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{h}) >$ 为 m 维, 当且仅当 $< \boldsymbol{J} | \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{h}}) > = \boldsymbol{C}^m$。由定理 1 知, 当且仅当 $\tilde{\boldsymbol{h}} = [\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \cdots \tilde{h}_n]^{\mathrm{T}}$ 的 $\tilde{h}_i = \boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \neq 0$, $i = \alpha_{11}, \beta_1 + \alpha_{21}, \beta_1 + \beta_2 + \alpha_{31}, \cdots, \left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\right) + \alpha_{k1}$, 从而定理成立。

推论 1　对于多输出线性系统 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Hx}\end{cases}$, 其他定义与定理 2 相同。有 $< \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}) > = \boldsymbol{C}^{m_1}$, m_1 为 A^{T} 的最小多项式次数, 当且仅当

$$\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \neq 0,\ i = \alpha_{11}, \beta_1 + \alpha_{21}, \beta_1 + \beta_2 + \alpha_{31}, \cdots, \left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\right) + \alpha_{k1} \tag{10}$$

证明　设 $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h}_1 \boldsymbol{h}_2 \cdots \boldsymbol{h}_m]^{\mathrm{T}} \in R^{n \times m}$, 有

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{h}}_1^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\boldsymbol{h}}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{h}}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_1 & \boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_2 & \cdots & \boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_m \\ \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_1 & \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_2 & \cdots & \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_1 & \boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_2 & \cdots & \boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_m\end{bmatrix} \tag{11}$$

同样可证明, $\tilde{\boldsymbol{h}}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_1 \boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_2 \cdots \boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_m] \neq \boldsymbol{0}$, $i = \alpha_{11}, \beta_1 + \alpha_{21}, \beta_1 + \beta_2 + \alpha_{31}, \cdots, \left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\right) + \alpha_{k1}$, $< \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}) >$ 就能够满秩, 即达到 m_1 维。可以看到, 若第 i 个测试向量对应的列 $[\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1 \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_2 \cdots \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_m]^{\mathrm{T}}$ 对应的相应各行上的元素不为零, 则取该向量就能满足要求。若没有满足要求的测试向量, 则可取它们的线性和。

3　算法

3.1　第一步

不失一般性, 设得到 $\boldsymbol{q}_1 \in \{\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \cdots, \boldsymbol{h}_m\}$ 为满足要求的向量。令 $G_1 = < \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}_1) >$。有以下结论:

在推论 1 的情况下, 与各约当块 $\boldsymbol{J}_{\alpha_{11}}(\lambda_1)$、$\boldsymbol{J}_{\alpha_{12}}(\lambda_1)$、…、$\boldsymbol{J}_{\alpha_{1s_1}}(\lambda_1) \cdots \boldsymbol{J}_{\alpha_{k1}}(\lambda_k)$、$\boldsymbol{J}_{\alpha_{k2}}(\lambda_k)$、…、$\boldsymbol{J}_{\alpha_{ks_k}}(\lambda_k)$ 相应的 $\boldsymbol{P}$ 阵各列向量组成的矩阵 $\boldsymbol{X}_{\alpha_{11}}$、$\boldsymbol{X}_{\alpha_{12}}$、…、$\boldsymbol{X}_{\alpha_{1s_1}}$、…、$\boldsymbol{X}_{\alpha_{k1}}$、$\boldsymbol{X}_{\alpha_{k2}}$、…、$\boldsymbol{X}_{\alpha_{ks_k}}$ 称为各相应特征值的根向量链, 其第一个向量称为向量链的链头。按照排列的顺序, $\boldsymbol{X}_{\alpha_{i1}}$ 是链长最长的根向量链(链长为 α_{i1})。有以下两个结论[3]:

(1) 各最长根向量链的链头向量与 G_1 相关, 而其他根向量链与 G_1 无关;

(2) G_1 是 A^{T} 不变的, 即有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{A}_1$。

3.2 第二步

剔除与 $\boldsymbol{G}_1$ 相关的最长根向量链, 剩下的向量链组成矩阵 $\boldsymbol{X}'$, 由上面给出的结论, 知其与 $\boldsymbol{G}_1$ 不相关。令可逆矩阵 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{G}_1\quad \boldsymbol{X}']$, 有

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}'\end{bmatrix} \tag{12}$$

设约当阵 $\boldsymbol{J}'$ 的最小多项式次数为 m_2。同样, 若类似定义的向量 $\tilde{\boldsymbol{h}}_2\in\boldsymbol{R}^{n-m_1}$ 对应 $\boldsymbol{J}'$ 的不同特征值最大约当块的特定位置元素非零, 则有 $\dim<\boldsymbol{J}'\,|R(\tilde{\boldsymbol{h}}_2)>=\boldsymbol{m}_2$。令 $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\tilde{h}_1\\ \tilde{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}$, $\tilde{\boldsymbol{h}}_1\in\boldsymbol{R}^{m_1}$ 可以任意选取, 有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\tilde{h}_1\\ \tilde{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}\\
&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\tilde{h}_1\\ \tilde{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}A_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{h}_1\\ \tilde{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\tilde{\boldsymbol{h}}_1\\ \boldsymbol{J}'\tilde{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}\\
&\vdots\\
&(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m_2-1}\boldsymbol{q}_2=\cdots=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}A_1^{m_2-1}\tilde{\boldsymbol{h}}_1\\ \boldsymbol{J}'^{m_2-1}\tilde{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}$$

从而对于 $\boldsymbol{G}_2=\langle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,|\,[\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2]\rangle$ 有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_2&=[\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_1\cdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m_1-1}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2\cdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m_2-1}\boldsymbol{q}_2]\\
&=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{m_1} & \tilde{\boldsymbol{h}}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_1^{m_2-1}\tilde{\boldsymbol{h}}_1\\ 0 & \tilde{\boldsymbol{h}}_2 & \cdots & \boldsymbol{J}^{m_2-1}\hat{\boldsymbol{h}}_2\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

它是列满秩的, 秩为 m_1+m_2。

需要注意的是, 选取的测量向量 $\boldsymbol{q}_2$ 只需要满足 n 维向量 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{q}_2$ 的第 m_1 个元素到第 n 个元素对应 $\boldsymbol{J}'$ 的不同特征值最大约当块特定位置元素非零, $\boldsymbol{G}_2$ 就能够达到 m_1+m_2 维。

3.3 依次类推

同样, 在 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{G}_2)$ 中包含有 A^{T} 的各特征值的前两个链长最长的链头向量, 剔除它们后剩下的根向量链组成 $\boldsymbol{X}''$, 同样 $[\boldsymbol{G}_2\quad \boldsymbol{X}'']$ 可逆, …。若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的循环指数为 ω, 则可以依次确定 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_\omega$, 得到一个测试阵 $\boldsymbol{H}_o^{\mathrm{T}}(i)=[\boldsymbol{q}_1\quad \boldsymbol{q}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{q}_\omega]\in\boldsymbol{C}^{n\times\omega}$, 使得 $<\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,|\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{H}_o^{\mathrm{T}}(i))>=\boldsymbol{C}^n$, 即系统可观测。其测试代价为

$$\boldsymbol{c}(i)=c_{q_1}+c_{q_2}+\cdots+c_{q_\omega},\quad \text{其中 } c_{q_i}\in\{c_2, c_3, \cdots, c_m\}$$

针对以上过程, 采取穷举的方法, 可以得到一个测试阵的集合 $\Sigma=\{\boldsymbol{H}_o(i)\}$, 它们对应的代价为 $\{c(i)\}$, 可以很容易地根据最小的 $\{c(i)\}$ 确定相应最优的测试阵 $\boldsymbol{H}_o(i)$。

4 算例

对于系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.5 & 22.0 & -17.0 & -45.0 & 7.0\\ -2.0 & 8.5 & -9.0 & -22.0 & -1.0\\ 1.0 & -5.0 & 3.5 & 11.0 & 0.0\\ -1.0 & 4.0 & -4.0 & -10.5 & -1.0\\ 1.0 & -5.0 & 5.0 & 12.0 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} \tag{15}$$

已知第一项输出 y_1 为固定输出, y_2 至 y_5 为可以附加的测试点。它们的测试代价相应为 30、22、18、23。求保证系统可观测的条件下, 测试代价最低的测点配置。有矩阵 $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 5.0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 2.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 0 \\ -6.0 & 1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ -5.0 & -1.0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{17}$$

可以看到, 系统的循环指数为 2。考核满足要求, 能够生成最大可观测子空间的测试向量, 即满足 $[2.0 \quad -1.0 \quad 1.0 \quad -1.0 \quad 0.0]\ \boldsymbol{h}_i \neq 0$ 的向量, 可以看到仅 $\boldsymbol{h}_4$ 不满足要求。先看 $\boldsymbol{h}_2$ 的情况。

$$\boldsymbol{G}_1=[\boldsymbol{h}_2 \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_2 \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2\boldsymbol{h}_2]=\begin{bmatrix} 0.0 & -2.0 & 2.00 \\ 1.0 & 7.5 & -8.75 \\ 1.0 & -9.5 & 9.25 \\ 1.0 & -21.5 & 22.25 \\ 0.0 & -2.0 & 1.00 \end{bmatrix} \tag{18}$$

取 $\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的最后一个根向量链组成矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0.0 & -2.0 & 2.00 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 7.5 & -8.75 & -5.0 & 0.0 \\ 1.0 & -9.5 & 9.25 & 5.0 & 0.0 \\ 1.0 & -21.5 & 22.25 & 12.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 1.00 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$, 它是可逆的, 且有

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0 & -0.0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & -0.750 & 0 & 0 \\ 0.0 & 1.0 & -1.500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{19}$$

可见, 第二个测试向量 $\boldsymbol{q}_2$ 只需要满足 n 维向量 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{q}_2$ 的最后一个元素不为零即可。即

$$\begin{bmatrix} -3.75 & 1.0 & -1.25 & 1.25 & 0.0 \\ -4.00 & 1.0 & -3.00 & 2.00 & 0.0 \\ -1.00 & 2.0 & -5.00 & 3.00 & 0.0 \\ -5.00 & -2.0 & 4.00 & -2.00 & 0.0 \\ -7.00 & -0.0 & -1.00 & 1.00 & 1.0 \end{bmatrix}\boldsymbol{q}_2 \tag{20}$$

的最后一个元素 $[-7.0 \quad 0.0 \quad -1.0 \quad 1.0 \quad 1.0]\ \boldsymbol{q}_2$ 不为零。$\boldsymbol{h}_3$、$\boldsymbol{h}_5$ 都可以满足要求, 得到 2 个测试向量组满足可观测性要求, 即 $\boldsymbol{H}_o(1)=[\boldsymbol{h}_2,\ \boldsymbol{h}_3]$, $\boldsymbol{H}_o(2)=[\boldsymbol{h}_2,\ \boldsymbol{h}_5]$。

同样的方法, 第一个向量选 $\boldsymbol{h}_3$ 时, 得到条件 $[-5.0 \quad -1.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 1.0]\ \boldsymbol{q}_2$ 必须不为零。第二个向量选 $\boldsymbol{h}_5$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 满足要求, 取 $\boldsymbol{H}_o(3)=[\boldsymbol{h}_3,\ \boldsymbol{h}_5]$;

当第一个向量取 $\boldsymbol{h}_5$ 时, 得到条件 $[-6.0 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 0.5 \quad 1.0]\ \boldsymbol{q}_2$ 必须不为零。第二个向量选 $\boldsymbol{h}_2$、$\boldsymbol{h}_3$ 能满足要求, 实际上等同于 $\boldsymbol{H}_o(2)$、$\boldsymbol{H}_o(3)$。简单计算可以得到, $\{\boldsymbol{H}_o(1), \boldsymbol{H}_o(2), \boldsymbol{H}_o(3)\}$ 对应

的测试代价为{48, 52, 45}。满足使得系统可观测的代价最小测试向量组为 $\boldsymbol{H}_o(3)$, 即测试向量取 $\boldsymbol{h}_3$, $\boldsymbol{h}_5$。

5 结论

虽然从理论上讲, 采用观测性矩阵秩判别的方法可以确定测试矩阵能否使系统可观测, 但不能直观地得到测试向量配置的约束条件, 也就是说, 计算结果对如何调整测试向量以使系统可观测没有指导意义。从算例的计算过程可以看出, 本文得到了测试向量集的线性和与系统观测性的直接关系, 可以直观地指导测试向量的配置以使得系统可观测, 并保持测试代价最小。提出的算法简单直观, 运算量小, 在工程上有广阔的应用前景。

参考文献:

[1] 涂序彦. 可控性、可观性的实用价值与最经济结构综合[J]. 全国控制理论及其应用学术交流会论文集. 北京: 科学出版社, 1981, 56- 61.

[2] 涂序彦. 最经济控制系统结构综合[J]. 自动化学报, 1982, 8(2): 103- 111.

[3] 黄琳, 生成元. 经济控制与线性多变量控制系统[J]. 北京大学学报, 1981 (1): 25- 36.

[4] 汪定伟. 线性系统最经济结构综合的有向图法[J]. 自动化学报, 1988, 14(6): 454- 457.

[5] Omatu S, Koide S, Soeda T. Optimal Sensor Location for a Linear Distributed Parameter System [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1978, 23: 665 - 673.

[6] Kumar S, Seinfeld S H. Optimal Location of Measurements in Tubular Reactors [J]. Chem. Eng. Sci., 1978, 33: 1507.

[7] Colantuoni G, Padmanabhan L. Optimal Sensor Location or Tubular-flow Reactor Systems [J]. Chem. Eng. Sci., 1977, 32: 1032.

[8] Harris T J, Macgregor J F, Wright J D. Optimal Sensor Location with an Application to a Packed Bed Tubular Reactor [J]. AIChE J., 1980, 26: 910.

[9] Muller P C, Weber H I. Analysis and Optimization of Certain Quantities of Controllability and Observability for Linear Dynamic System [J]. Automatica, 1972, 8: 237- 246.

[10] Damak T, Babary J P, Nihtila M T. Observer Design and Sensor Location in Distributed Parameter Bioreactors [C]// Proceedings of DYCORD, 1992: 87.

[11] Dochain D, Tali-mammar N, Babary J P. On Modeling, Monitoring and Control of Fixed Bed Bioreactors [J]. Comput. Chem. Eng. 1997, 21: 1255- 1266.

[12] 吴俊伟, 孙国伟, 张如, 张媛. 基于SVD方法的INS传递对准的可观测性能分析[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13: 26- 30.

[13] 黄翔宇, 崔平远, 崔祜涛. 深空自主导航系统的可观性分析[J]. 宇航学报, 2006, 27: 332- 358.

[14] 王新龙. 惯导系统可观测性及最佳可观测子空间的定量研究[J]. 宇航学报, 2006, 27: 345- 348.

[15] 杨拥民, 黎湘, 庄钊文. 线性系统测试矩阵优化[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(4).

[16] Sharon L P, Rex K K. Optimization Strategies for Sensor and Actuator Placement [R]. Technical Memorandum, 1999, 4: 1- 17. NASA Langley Research Center.