

一种新的小波收缩统一阈值函数*

李财莲¹,李志先²,孙即祥¹,康耀红³

(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073;

2. 洛阳理工学院 计算机与信息工程系,河南 洛阳 471023;

3. 海南大学 信息科学技术学院,海南 海口 570228)

摘要:提出一种新的小波收缩统一阈值函数,并证明了新阈值函数具有收敛性,通过调节可变参数的取值可以改变新阈值函数的趋向,为图像阈值去噪的自适应处理提供了可能。此外,给出了新阈值函数的期望、方差与风险的关系式。仿真结果表明新阈值函数不仅能有效去除噪声,而且比两种经典的阈值函数有更高的灵活性,可以获得更高的信噪比和更好的视觉效果。

关键词:小波变换;硬阈值函数;软阈值函数;统一阈值函数;图像去噪;

中图分类号:TP391 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2012)01-0155-05

A New uniform threshold function of wave-shrink

LI Cailian¹, LI Zhixian², SUN Jixiang¹, KANG Yaohong³

(1. College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Department of Computer and Information Engineering, Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang, 471023, China;

3. Information Science Technology College, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: A new uniform threshold function of wave-shrink for image denoising is proposed. The new function has the advantage of satisfying the shrinkage condition. By changing the parameter u , we can change the trend of this new function, which makes it possible to find an adaptive method whenever using the wavelet shrinkage method for image denoising. Finally, efficient formulas for computing mean, variance and risk of the new uniform threshold function are derived. Numerical experiments and comparative studies are performed, demonstrating the effectiveness of our threshold function. Additionally, the proposed new function can also give better performance in terms of both PSNR and in visual quality.

Key words: wavelet transform; hard-threshold function; soft-threshold function; uniform threshold function; image denoising

小波阈值去噪算法是一种实现简单且效果较好的非线性去噪方法,它的优点是噪声可以得到很好的抑制,且反映原始特征的尖峰点得到很好的保留^[1-2]。最早的阈值去噪方法是 Donoho 提出的 VisuShrink 方法^[3],这种阈值方法又称为通用阈值去噪法,由于此方法在 Besov 空间上可得到最佳估计值,因此引起了国内外很多学者的注意^[4-6],阈值去噪方法有针对性地提出了一些改进阈值函数,进一步拓宽了小波阈值函数的应用前景。

去噪原理的优点在于减少噪声的同时能保持信号的局部奇异性^[7]。目前使用最广泛的是软、硬阈值函数,这两个函数各有优缺点。本文在 Donoho 的软硬阈值函数基础上提出一个新阈值

函数,兼顾了软、硬阈值函数的功能,并通过恰当的选择参数还可获得更优异的性能。最后将新阈值函数应用到图像去噪中,表明了新阈值函数的可行性和优越性。

1 基本原理

1.1 小波去噪模型

假设噪声图像 $Y = (y_n)_{n \in [1, N]}$ 为真实图像 $X = (x_n)_{n \in [1, N]}$ 的观测值,即 $Y = X + \sigma b$,其中 $\sigma > 0$ 为已知的噪声方差, $b = (b_n)_{n \in [1, N]}$ 为独立同分布的高斯白噪声, $b \sim N(0, 1)$ 且满足 $|b_n| \leq 1, \forall n \in [1, N]$ 。图像降噪的目的是根据观测值 Y 找到图像 X 的估计值 \hat{X} ,使得均方误差 MSE 最小,用均

* 收稿日期:2011-05-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(40901216)

作者简介:李财莲(1973-),女,湖南涟源人,工程师,博士,E-mail:gsstsh@sohu.com;

孙即祥(通信作者),男,教授,博士生导师,E-mail:prmvndt@sohu.com

值取代数学期望可得

$$\varepsilon = \text{MSE}(\hat{X}, X) = E\|\hat{X} - X\|^2 \quad (1)$$

观察模型在小波域中可表示为

$$d_i = \theta_i + \sigma b_i, i \in [1, N]$$

式中 d_i 与 θ_i 分别为噪声图像与真实图像的小波系数,白噪声 b_i 变换后在小波域中仍为白噪声 b_i 。

图像去噪主要分为以下步骤:(1)对噪声图像进行正交小波变换;(2)在小波域根据阈值函数对小波系数进行阈值操作;(3)小波系数重构后得到消噪图像。

1.2 新阈值函数及其分析

目前获得广泛应用的硬阈值函数表达式为

$$\eta_t(d) = \begin{cases} 0, & |d| < t \\ d, & \text{others} \end{cases} \quad (2)$$

式中, t 为选定的阈值。硬阈值函数去噪可以很好保留图像边缘等局部特征,但因硬阈值函数不连续,去噪后图像会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真。

Dohono 提出的软阈值函数表达式如下:

$$\eta_t(d) = \text{sgn}(d) (|d| - t)_+ \quad (3)$$

式中, $(x)_+ = \max(x, 0)$ 。软阈值函数虽连续但其导数不连续,去噪后系数与原系数存在一个恒定偏差,相对硬阈值处理要平滑,但会造成边缘模糊等失真现象,不能很好保持图像边缘等局部信息。

本文提出一个新的阈值函数,表达式如下:

$$\eta_t(d) = \begin{cases} d - t \times [e^{-(d/t)^2}]^u \text{sgn}(d), & |d| \geq t \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $0 \leq u \leq 1$ 。图 1 为 $t = 50$ 时上述三种阈值函数的图形表达,曲线 a 为硬阈值函数曲线,曲线 b 为 $u = 0.1$ 时新阈值函数曲线,曲线 c 为软阈值函数曲线。图 2 为 $t = 50$ 时不同 u 值对应的新阈值函数曲线。由式(3)、式(4)和图 2 易知,当 $u = 0$ 时,式(4)对应的图形即为软阈值函数的图形表达,因此软阈值函数为新阈值函数的一个特例。

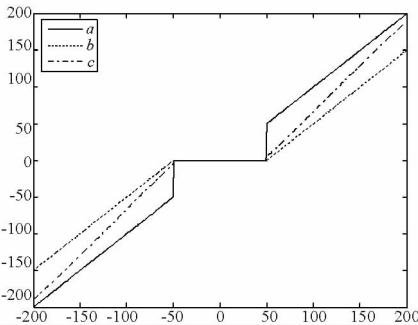


图 1 三种阈值函数曲线

Fig. 1 Three kinds of threshold function curves

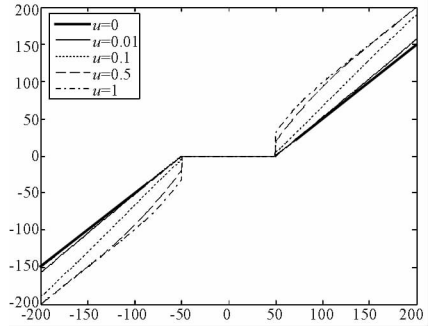


图 2 不同 u 时新阈值函数曲线

Fig. 2 New threshold function curve on different u

考察函数表达式(4),当 $u \neq 0$ 时有

由上式可知,当 $|d|$ 增大时, $\eta_t(d)$ 不断逼近 d ,即 $\eta_t(d)$ 以直线 $y = x$ 为渐近线。

考察参数 u 的取值对阈值函数的影响:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \eta_t(d) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (d - t \times [e^{-(d/t)^2}]^u \text{sgn}(d)) = d - t \times \text{sgn}(d) \quad (5)$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^+} \eta_t(d) = \lim_{u \rightarrow 1^+} (d - t \times [e^{-(d/t)^2}]^u \text{sgn}(d)) = d - t \times e^{-(d/t)^2} \times \text{sgn}(d) \quad (6)$$

式(5)说明当 $u \rightarrow 0$ 时,新阈值函数接近于软阈值函数,且 u 越小,越接近于软阈值函数,当 $u = 0$ 时,即为软阈值函数;因为 $\lim_{|d| \rightarrow \infty} e^{-(d/t)^2} = 0$,因此式(6)说明当 $u \rightarrow 1$ 且 $|d|$ 增大时, $\eta_t(d)$ 不断逼近 d ,新阈值函数接近于硬阈值函数,且 u 越大,越接近于硬阈值函数。这个结论从图 2 中也可以看出。因此通过调节 u 取值可以改变新阈值函数的趋向,这也体现了新阈值函数的灵活性。

置阈值 $t = \sigma$,令 $p = e^{-(d/\sigma)^2}$,定义:

$$\hat{\theta}^{(\sigma)}(d) = \eta_{\sigma}(d_i), \forall i \in [1, N] \quad (7)$$

定理 1 新的阈值函数满足收敛条件,即

$$|\hat{\theta}^{(\sigma)}| \leq |\theta| + \sigma \quad (8)$$

证 易证 $0 < p \leq 1$,又 $0 \leq u \leq 1$,则 $0 < p^u \leq 1$ 。下面分两种情况来证明。

①当 $|d| < \sigma$ 时, $|\hat{\theta}^{(\sigma)}| = 0$,则: $|\hat{\theta}^{(\sigma)}| \leq |\theta| + \sigma$ 。

②当 $|d| \geq \sigma$ 时,由式(7)可得

$$|\hat{\theta}^{(\sigma)}| = |\eta_{\sigma}| = |d - \sigma \times p^u \times \text{sgn}(d)|$$

当 $d \geq \sigma$ 时, $0 < \sigma \times p^u \times \text{sgn}(d) \leq \sigma$,则

$$|d - \sigma \times p^u \times \text{sgn}(d)| \leq |d| = |\theta + \sigma b| \leq |\theta| + \sigma$$

当 $d \leq -\sigma$ 时, $-\sigma \leq \sigma \times p^u \times \text{sgn}(d) < 0$,则

$$|d - \sigma \times p^u \times \text{sgn}(d)| \leq |d| = |\theta + \sigma b| \leq |\theta| + \sigma$$

因此,当 $|d| \geq \sigma$ 时, $|\hat{\theta}^{(\sigma)}| \leq |\theta| + \sigma$ 。

由 ① 和 ② 可知,式(8)成立,证毕。

正交小波变换保持 l_2 范数不变,因此式(1)可表示为 $\varepsilon = \text{MSE}(\hat{\theta}, \theta) = E\|\hat{\theta} - \theta\|^2$,我们期望 ε 最大误差最小,即令 $E(\hat{\theta}, \theta) = \sup_{|b_i| \leq 1} \|(d) - \theta\|^2$

最小。又 $E(\hat{\theta}^{(\sigma)}, \theta) = \sum_{i=1}^N |d_i - \sigma p_i^u \text{sgn}(d_i) - \theta_i|^2$
 $= \sum_{i=1}^N \sigma^2 |b_i - p_i^u \text{sgn}(d_i)|^2$, 因此可通过选择合适的 u 值, 使得 $E(\hat{\theta}^{(\sigma)}, \theta)$ 最小。

1.3 新阈值函数偏差、方差及风险分析

Donoho 和 Johnstone^[8-9] 利用极小化极大估计建立了软硬阈值理论基础, 并对这些阈值估计方法的偏差、方差等进行了详细讨论。对于小波模型(3), 因为 $d_i = \theta_i + \sigma b_i$, θ_i 是常数, 所以 d_i 是均值为 θ_i 、方差为 σ^2 的高斯随机变量, 其 Oracle 投影风险为 $r_p(\theta) = E\{\|\theta - \hat{\theta}\|^2\} = \sum_{i=1}^N \min(|\theta_i|^2, \sigma^2)$ 。

当采用硬阈值估计方法时, 其风险是

$$r_h(\theta) = E\{\|\theta - \hat{\theta}\|^2\} = \begin{cases} N\sigma^2, & |d_i| \geq t \\ \sum_{i=1}^N |\theta_i|^2, & \text{others} \end{cases}$$

由此可知, $r_h(\theta) \geq r_p(\theta)$, 硬阈值估计是一个其风险大于 Oracle 投影子风险的方法。

对于软阈值估计, 通过适当地选取阈值 t , 其风险接近于 Oracle 投影子的风险。

文献[10]中已证明: 当 $t = \sigma \sqrt{2 \ln N}$ 时, 对所有 $N \geq 4$, 硬或软阈值估计子风险 $r_t(\theta)$ 满足:

$$r_t(\theta) \leq (2 \ln N + 1)(\sigma^2 + r_p(\theta))$$

同样可得新小波收缩统一阈值估计子风险满足:

$$r_\eta(\theta) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N |\sigma b_i - t p_i^u \text{sign}(\theta_i)|^2, & |d_i| \geq t \\ \sum_{i=1}^N |\theta_i|^2, & \text{others} \end{cases} \quad (9)$$

式中 $p_i = e^{-(d_i/t)^2}$

由此可知, $r_\eta(\theta) \leq r_h(\theta)$, 采用新小波收缩统一阈值函数是一个风险小于硬阈值风险的方法, 同时可以通过适当地选取阈值 t , 使其风险接近于 Oracle 投影子的风险。

Candes^[11] 给出了软硬阈值的 Oracle 估计, 同样定义新小波收缩统一阈值风险 $r_\eta(t, \mu)$ 为

$$r_\eta(t, \mu) = E(\eta_t(d) - \mu)^2$$

式中, $\eta_t(d)$ 为新阈值函数(4), 设 d 为均值为 μ 、方差为 1 的高斯随机变量, 即 $d \sim N(\mu, 1)$, 则有

定理 2 新小波收缩统一阈值函数(4), 其风险 $r_\eta(t, \mu)$ 满足: $r_\eta(t, \mu) \leq \min(r_\eta(t, 0) + \mu^2, 1 + t^2 p^{2u})$, 其中, p 与式(9)相同。

证 令 $\varphi(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2}$ 为高斯标准概率密度函数, 则新阈值函数(4)的风险为

$$r_\eta(t, \mu) = E(\eta_t(y) - \mu)^2 = \mu^2 \int_{|y| \leq t} \varphi(y - \mu) dy + \int_{y > t} (y - t \times p^u - \mu)^2 \varphi(y - \mu) dy + \int_{y < -t} (y + t \times p^u - \mu)^2 \varphi(y - \mu) dy$$

变量代换得

$$r_\eta(t, \mu) = \mu^2 \int_{-t-\mu}^{t-\mu} \varphi(z) dz + \int_{t-\mu}^{+\infty} (z - t \times p^u)^2 \varphi(z) dz + \int_{-\infty}^{-t-\mu} (z + t \times p^u)^2 \varphi(z) dz$$

对其求偏导数得

$$\frac{\partial r_\eta(t, \mu)}{\partial \mu} = 2\mu \int_{-t-\mu}^{t-\mu} \varphi(z) dz \leq 2\mu \quad (10)$$

因此, $r_\eta(t, \mu)$ 随着 μ 增加而递增, 故

$$r_\eta(t, \mu) \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} r_\eta(t, \mu) = 1 + t^2 p^{2u}$$

由式(10)可知 $r_\eta(t, \mu) - r_\eta(t, 0) \leq \int_0^\mu 2x dx = \mu^2$, 因此, $r_\eta(t, \mu) \leq \min(r_\eta(t, 0) + \mu^2, 1 + t^2 p^{2u})$, 证毕。

定义 $d \sim N(\mu, 1)$, 其参数 μ 的阈值函数估计的期望 M 、方差 V 与 L_2 风险公式 r 为

$$M(t, \mu) = E\{\eta_t(d)\} \quad (11)$$

$$V(t, \mu) = \text{var}\{\eta_t(d)\} \quad (12)$$

$$r(t, \mu) = E\{\eta_t(d) - \mu\}^2 \quad (13)$$

用上标 H 代表硬阈值, S 代表软阈值, Bruce 与 Gao 等推导了软硬阈值函数估计的期望、方差与 L_2 风险公式^[12-13]。下面以 U 代表新小波收缩统一阈值函数, 通过式(11)、(12)、(13)来分别计算其期望、方差与风险。定义:

$$A^U(t, \mu) = \int_{|x| \geq t} p^u \varphi(x) dx$$

$$B^U(t, \mu) = \int_{-\infty}^{-t-\mu} p^{2u} \varphi(x) dx + \int_{t-\mu}^{+\infty} p^{2u} \varphi(x) dx$$

$$C^U(t, \mu) = \int_{-\infty}^{-t-\mu} p^u \varphi(x) dx - \int_{t-\mu}^{+\infty} p^u \varphi(x) dx$$

其中 p 与式(9)相同, 则

$$M^U(t, \mu) = M^H(t, \mu) - t A^U(t, \mu)$$

$$V^U(t, \mu) = V^H(t, \mu) + 2t\mu C^U(t, \mu) + t^2 B^U(t, \mu)$$

$$r^U(t, \mu) = (M^U(t, \mu) - \mu)^2 + V^U(t, \mu)$$

把 $u = 0$ 代入 $M^U(t, \mu)$ 、 $V^U(t, \mu)$ 和 $r^U(t, \mu)$ 的表达式中, 即可得到 Bruce 等推导出的软阈值函数的估计式; 当 $u \rightarrow 1$ 且 $|x|$ 增大时, $p \rightarrow 0$, 则 $A^U(t, \mu) \rightarrow 0$, $B^U(t, \mu) \rightarrow 0$, $C^U(t, \mu) \rightarrow 0$, 新小波收缩统一阈值估计其期望、方差与风险都接近于硬阈值估计。

2 仿真实验

为了验证本文阈值函数去噪性能的有效性和

优越性,选择标准图像 Lena、Peppers 及下载图像 Football, Character, 叠加均值为零的高斯白噪声进行实验。用 Matlab7.0 语言对新的去噪阈值函数进行了验证,并与经典的硬阈值和软阈值函数去噪性能进行了对比。为了更好地比较三种去噪阈值函数的性能,对图像进行相同的小波变换,所选小波为“db2”,小波变换层数为 5。

2.1 主观视觉效果

图 3 与图 4 给出了部分图像去噪时的结果。为了比较方便,只给出了局部图像。由图 3、图 4 可以看出, u 越小,新阈值函数去噪性能越接近于

软阈值函数, u 越大,则越接近于硬阈值函数。当阈值 $t = 3\sigma$ 时,本文阈值函数在有效去除噪声的同时,提高了视觉效果,去噪后图像相对硬阈值去噪图像较光滑,相对软阈值去噪图像则更多地保留了图像边缘等局部特征;当阈值 $t = \sqrt{2\sigma \ln N}$ 时,则软阈值函数能取得比较好的去噪结果,一般情况下优于硬阈值函数,而本文新阈值函数当 u 值非常小时,达到了比软阈值函数更好的去噪性能,当 $u = 0$ 时,即为软阈值函数。因此本文新阈值函数在选取不同的去噪阈值 t 时,可以灵活选择 u 值,以达到最佳去噪结果。

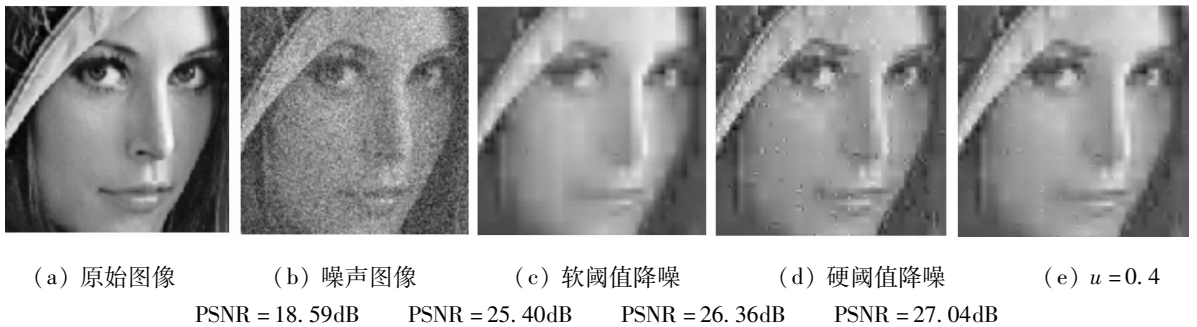


图 3 ‘Lena’ 图像降噪 $\sigma = 30, t = 3\sigma$
Fig. 3 Lena image denoising when $\sigma = 30, t = 3\sigma$

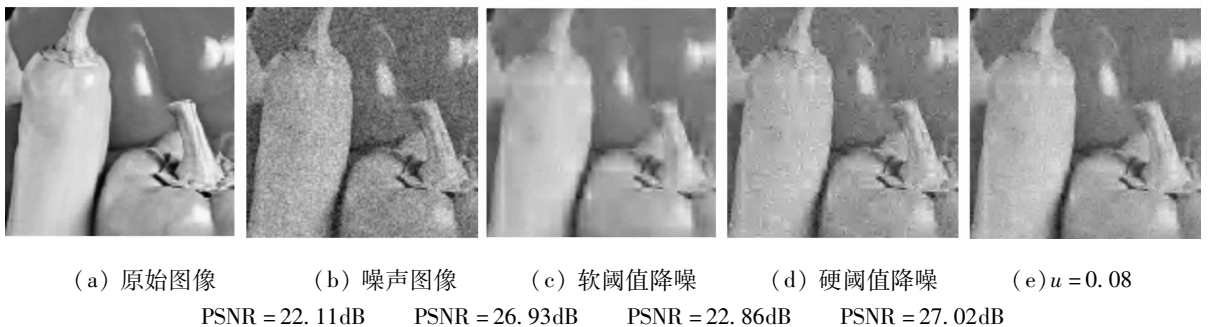


图 4 ‘Peppers’ 图像降噪 $\sigma = 20, t = \sqrt{2\sigma \ln N}$
Fig. 4 Peppers image denoising when $\sigma = 20, t = \sqrt{2\sigma \ln N}$

2.2 PSNR 值

表 1 列出了当阈值 $t = 3\sigma$ 时几种阈值函数去噪后图像 PSNR 值比较结果。由表 1 可以看出,本文阈值函数在 u 取不同值时优于经典硬阈值和软阈值去噪,获得了比较高的 PSNR 值。表 2 列出了当阈值 $t = \sqrt{2\sigma \ln N}$ 为 Donoho 小波收缩阈值时几种阈值函数去噪后图像 PSNR 值比较结果。由表 2 可以看出,软阈值函数能取得比硬阈值函数更高的 PSNR 值,而本文新阈值函数在 u 取非常小的值时,都优于硬阈值函数,同时也可以取得比软阈值函数更好的结果,当 $u = 0$ 时,即为软阈值函数。由表 1、表 2 可知, t 值的选取对噪声的去除有很大的影响,如何自适应地选取 t 值和 u 值将是进一步研究的课题。

3 结 论

本文提出了一种新的小波收缩统一阈值函数,它不但可以起到阈值去噪的作用,而且函数表达式简单且具有灵活性,当参数 u 选取不同值时,可改变函数的趋向,获得比硬阈值函数和软阈值函数都优异的去噪性能。实验结果表明新的阈值函数在获得了比较高的 PSNR 值的同时,去噪图像更多地保持了硬阈值函数去噪时的边缘等局部特征,也保持了软阈值函数的平滑性,进一步提高了去噪图像的主客观质量。由于新阈值函数随着 u 值的改变而改变函数的趋向,为自适应图像去噪提供了可能。由于参数 u 和阈值 t 的选取对噪声的去除有较大影响,因此如何自适应地选取 t 值和 u 值将是进一步研究的课题。

表 1 $t = 3\sigma$ 时各种方法去噪后 PSNR 值比较 (dB)

Tab. 1 Comparing of PSNR value after denoising among several methods when $t = 3\sigma$

图像	Lena 512 × 512			Peppers 256 × 256			Football 256 × 256			Character 128 × 128		
	σ	10	20	30	10	20	30	10	20	30	10	20
输入	28.13	22.11	18.59	28.13	22.11	18.59	28.13	22.11	18.59	28.13	22.11	18.59
硬阈值	31.70	28.37	26.36	30.57	26.55	24.23	29.52	26.94	25.59	33.63	27.45	24.19
软阈值	29.82	26.97	25.40	27.67	24.23	22.38	28.41	26.53	25.56	28.17	23.42	20.89
$u = 1.0$	31.95	28.75	26.86	30.75	26.80	24.54	29.77	27.31	26.05	33.79	27.70	24.47
$u = 0.8$	31.98	28.81	26.95	30.75	26.92	24.57	29.80	27.38	26.16	33.76	27.70	24.48
$u = 0.6$	31.98	28.84	27.03	30.80	26.79	24.58	29.81	27.43	26.26	33.66	27.64	24.42
$u = 0.4$	31.88	28.79	27.04	30.53	26.66	24.46	29.73	27.45	26.34	33.37	27.40	24.21
$u = 0.2$	31.55	28.52	26.84	30.05	26.22	24.07	29.47	27.33	26.30	32.59	26.73	23.59
$u = 0.1$	31.14	28.16	26.52	29.49	25.69	23.61	29.17	27.14	26.16	31.70	25.94	22.88

表 2 $t = \sqrt{2\sigma \ln N}$ 时各种方法去噪后 PSNR 值比较 (dB)

Tab. 2 Comparing of PSNR value after denoising among several methods when $t = \sqrt{2\sigma \ln N}$

图像	Lena 512 × 512			Peppers 256 × 256			Football 256 × 256			Character 128 × 128		
	σ	10	20	30	10	20	30	10	20	30	10	20
输入	28.13	22.11	18.59	28.13	22.11	18.59	28.13	22.11	18.59	28.13	22.11	18.59
硬阈值	29.81	23.10	19.22	29.37	22.86	19.08	28.90	22.82	19.09	29.95	22.88	19.06
软阈值	32.20	28.30	24.62	30.81	26.93	23.58	30.17	27.42	24.07	32.77	26.93	23.19
$u = 1.0$	30.64	23.75	19.68	30.04	23.38	19.46	29.49	23.54	19.47	30.72	23.38	19.39
$u = 0.008$	32.49	28.30	24.47	30.04	27.02	23.48	30.81	27.35	23.88	33.30	27.16	23.15
$u = 0.006$	32.46	28.32	24.51	31.26	27.02	23.52	30.79	27.37	23.93	33.23	27.16	23.18
$u = 0.004$	32.41	28.33	24.56	31.20	27.01	23.55	30.76	27.39	23.98	33.06	27.14	23.21
$u = 0.002$	32.35	28.34	24.60	31.13	27.00	23.58	30.73	27.41	24.09	32.84	27.10	23.23
$u = 0.001$	32.30	28.33	24.62	31.03	26.98	23.59	30.71	27.42	24.05	32.68	27.06	23.23

参考文献 (References)

[1] 曲天书, 戴逸松, 王树勋. 基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪[J]. 电子学报, 2002, 30(2): 266 - 268.
 QU Tianshu, DAI Yisong, WANG Shuxun. Adaptive wavelet thresholding denoising method based on SURE estimation [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(2): 266 - 268. (in Chinese)

[2] 曲巍巍, 高峰. 基于噪声方差估计的小波阈值降噪研究[J]. 机械工程学报, 2010(2): 28 - 33.
 QU Weiwei, GAO Feng. Study on wavelet threshold denoising algorithm based on estimation of noise variance [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010(2): 28 - 33. (in Chinese)

[3] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding [J]. IEEE Trans. Inform Theory, 1995, 41: 613 - 627.

[4] Cai J F, Candes E J, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. SIAM J. on Optimization, 2008, 20(4): 1956 - 1982.

[5] 梁栋, 沈敏, 高清维, 等. 一种基于 Contourlet 递归 Cycle Spinning 的图像去噪方法[J]. 电子学报, 2005, 33(11): 2044 - 2046.
 LIANG Dong, SHEN Min, GAO Qingwei, et al. A method for image denoising based on the contourlet transform using recursive cycle spinning [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(11): 2044 - 2046. (in Chinese)

[6] 程文波, 陈劲松. 一种新的改进阈值的小波包图像去噪方法[J]. 西安科技大学学报, 2010, 30(4): 479 - 483.
 CHENG Wenbo, CHEN Jinsong. A wavelet packets image de-

noising method based on improved threshold [J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2010, 30(4): 479 - 483. (in Chinese)

[7] 赵治栋, 潘敏, 陈裕泉. 小波收缩中统一阈值函数及其偏差、方差与风险分析[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(4): 536 - 539.
 ZHAO Zhidong, PAN Min, CHEN Yuquan. Bias, variance and risk analysis of uniform threshold function in wavelet shrinkage [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2005, 27(4): 536 - 539. (in Chinese)

[8] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. Biometrika, 1994, 81(2): 425 - 455.

[9] Donoho D L, Johnstone I M. Minimax estimation via wavelet shrinkage [J]. The Annals of Statistics, 1998, 26(3): 879 - 921.

[10] 马拉特. 信号处理的小波导引 [M]. 杨力华, 戴道清, 黄文良, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2002.
 Stephane Mallat. A wavelet tour of signal processing [M]. YANG Lihua, DAI Daoqing, HUANG Wenliang, et al. Beijing: China Machine Press, 2002. (in Chinese)

[11] Candes E J. Modern statistical estimation via oracle inequalities [J]. Acta Numerica, 2006, 15: 257 - 325.

[12] Bruce A G, Gao H Y. Understanding waveshrink: variance and bias estimation [J]. Biometrika, 1996, 83(4): 727 - 745.

[13] Gao H Y. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote [J]. Comput. Graph. Statist., 1998, 7(4): 469 - 488.