

纯引力轨道验证质量辐射计效应与气体阻尼耦合模型的数值分析*

刘红卫¹, 王兆魁², 张育林^{1,2}

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073;
2. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

摘要: 辐射计效应和气体阻尼是纯引力轨道验证质量的重要干扰力, 是影响纯引力轨道构造水平的重要因素。在纯引力轨道飞行器中, 这两种力分别描述了由腔体中温度梯度和验证质量相对运动引起的气体分子作用, 两者从不同角度描述了气体分子作用力, 均是气体分子作用力的一部分, 而两者的耦合模型则可以反映验证质量受到的气体分子作用力总和。针对耦合模型形式复杂的特点, 本文以内编队系统为例, 利用数值方法分析了耦合模型中的影响因素, 这些因素包括内卫星相对运动速度、内卫星半径、外卫星腔体半径、腔体平均温度、腔体温差和腔体平均压力等。对大量计算结果进行了数据拟合, 给出了内卫星气体分子作用力与各物理参数关系的拟合公式, 和原始计算结果相比, 拟合误差在 20% 以内。

关键词: 辐射计效应; 气体阻尼; 耦合模型; 模型参数; 数值分析

中图分类号: V448 文献标志码: A 文章编号: 1011-2486(2012)04-0007-06

Numerical analysis of coupled model of radiometer effect and residual gas damping on the proof mass in purely gravitational orbit

LIU Hongwei¹, WANG Zhaokui², ZHANG Yulin^{1,2}

(1. College of Aerospace and Materials Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Radiometer effect and residual gas damping are important interfering forces on the proof mass in purely gravitational orbit, which can affect the construction of the purely gravitational orbit. For spacecrafts in purely gravitational orbit, radiometer effect and residual gas damping describe two different kinds of gas molecules forces caused by temperature gradient and the relative motion of proof mass in the cavity, respectively. These two forces describe gas molecules forces from different views and are both parts of gas molecules forces. However, the coupled model of radiometer effect and residual gas damping can reflect the total force of gas molecules on proof mass. Considering the complex form of the coupled model, the physical parameters in coupled model were analyzed by numerical methods in the Inner-formation Flying System (IFS). These physical parameters contain the relative velocity of the inner-satellite, the inner-satellite radius, the outer-satellite cavity radius, the average temperature and pressure, the temperature difference in the cavity. By fitting a large number of numerical results, an approximate formula for gas molecules forces on the inner-satellite was obtained. Compared with the original results, the fitting errors were less than 20%.

Key words: radiometer effect; residual gas damping; coupled model; model parameters; numerical analysis

纯引力轨道飞行器通常包括验证质量及其屏蔽航天器, 验证质量位于屏蔽航天器的密闭腔体中, 如图 1 所示。在轨运行时由于腔体的屏蔽作用, 验证质量不会受到太阳光压、大气阻力等外部干扰力, 受到的因腔体中温度变化、气体压力、电磁干扰等因素引起的内部干扰力被有效抑制, 从而可认为验证质量仅受地球引力的作用。这就是纯引力轨道飞行器的原理^[1-2]。纯引力轨道飞行器可用于精密导航、中心天体重力场测量以及短程线效应探测、等效原理验证、引力波探测等基础物理实验, 对发展空间科学、基础物理研究等具有

重大意义^[3-6]。

在纯引力轨道飞行器中, 验证质量干扰力抑制程度决定了纯引力轨道构造水平。验证质量干扰力包括屏蔽航天器产生的万有引力、辐射计效应、热辐射压力、残余气体阻尼、电磁干扰等。其中, 辐射计效应是热噪声中最严重的一种力^[7], 残余气体阻尼是具有宏观运动速度的验证质量与气体分子碰撞产生的动能损失。对于辐射计效应, 已经有大量的研究工作, 文献[8]和[9]给出了估计辐射计效应最大值的公式, 文献[10]以内编队重力场测量系统为例建立了辐射计效应的计算

* 收稿日期: 2011-09-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11002076); 国家部委资助项目; 湖南省研究生科研创新资助项目(CX2011B001)

作者简介: 刘红卫(1986—), 男, 河北邢台人, 博士研究生, E-mail: liuhw05@163.com

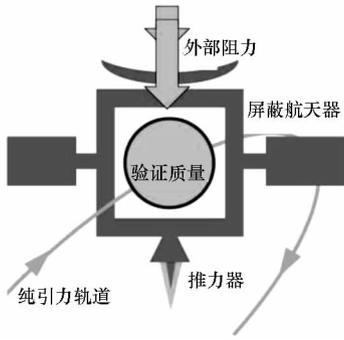


图 1 纯引力轨道飞行器示意图

Fig. 1 The spacecrafts in purely gravitational orbit

模型。内编队系统是我国学者提出的一种利用纯引力轨道实现高精度重力场测量的系统方案,主要由内卫星和外卫星两部分组成,采用内、外卫星编队飞行的方式实现地球重力场测量^[11],如图 2 所示。对于气体阻尼已有计算模型,文献[12]和[13]利用气体分子碰撞理论建立了气体阻尼模型。

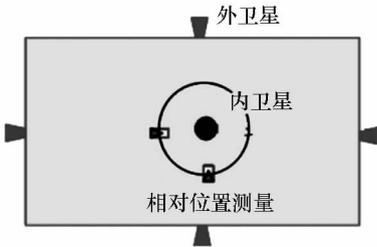


图 2 内编队系统示意图

Fig. 2 Inner-formation flying system (IFS)

在辐射计效应建模中,只考虑了腔体中温度分布不均匀引起的气体分子作用力。在气体阻尼

表 1 内卫星辐射计效应和气体阻尼模型中的物理参数

Tab. 1 Physical parameters in radio meter effect and residual gas damping on the inner-satellite

辐射计效应模型	气体阻尼模型	耦合模型
腔体平均压力 p_0	腔体平均压力 p_0	腔体平均压力 p_0
腔体平均温度 T_0	腔体平均温度 T_0	腔体平均温度 T_0
内卫星半径 r	内卫星半径 r	内卫星半径 r
外卫星腔体半径 R	内卫星相对运动速度 v_0	外卫星腔体半径 R
内卫星表面温度分布 $T_{in}(\theta, \phi)$		内卫星表面温度分布 $T_{in}(\theta, \phi)$
腔体内壁温度分布 $T_{out}(\Theta, \Phi)$		腔体内壁温度分布 $T_{out}(\Theta, \Phi)$
		内卫星相对运动速度 v_0

设腔体中温度分布为对半分布,即

$$T_{in}(\theta, \phi) = \begin{cases} T_0 + \Delta T_{in}/2, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ T_0 - \Delta T_{in}/2, & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$T_{out}(\Theta, \Phi) = \begin{cases} T_0 + \Delta T_{out}/2, & 0 \leq \Theta \leq \pi/2 \\ T_0 - \Delta T_{out}/2, & \pi/2 < \Theta \leq \pi \end{cases} \quad (2)$$

其中, ΔT_{in} 是内卫星表面温差, ΔT_{out} 是外卫星腔体内壁温差,这里的温差指温度最大值和最小

建模中,认为腔体中温度是均匀分布的,只考虑了验证质量在腔体中相对运动引起的气体分子作用力。验证质量受到的实际气体分子作用力既包含了温度分布不均匀的因素,也包含了验证质量在腔体中的相对运动因素,作者在文献[14]中同时考虑了这两种因素,以内编队系统为例建立了辐射计效应和残余气体阻尼的耦合模型。本文以文献[14]中的耦合模型为基础,利用数值方法分析耦合模型中物理参数的作用,为验证质量干扰力抑制和纯引力轨道构造提供理论依据。

1 辐射计效应和气体阻尼的耦合模型

以内编队重力场测量系统为例,内卫星辐射计效应 $F_{Radiometer}$ 模型见文献[10],内卫星辐射计效应和气体阻尼的耦合模型 $F_{coupled}$ 见文献[14]。根据文献[12]可得到作用在内卫星上的气体阻尼为

$$F_{gasdamping} = -\frac{2p_0 r^2}{3} \sqrt{\frac{8\pi m}{k_b T_0}} v_z k \quad (1)$$

其中, p_0 为腔体平均压力, r 为内卫星半径, m 为气体分子平均质量, k_b 是波尔兹曼常数, T_0 为腔体平均温度, v_z 是内卫星沿 z 轴的宏观运动速度, k 是沿 z 轴的单位矢量。

2 耦合模型数值计算

利用数值方法分析内卫星辐射计效应和气体阻尼耦合模型中物理参数的作用,这些物理参数如表 1 所示。

值之差。 (θ, ϕ) 是内卫星表面球坐标, (Θ, Φ) 是外卫星腔体内壁球坐标。本文以对半温度分布为例进行分析,一方面是因为内编队系统采用太阳同步晨昏轨道,在轨运行时卫星始终一面受太阳照射,另一面背对太阳,在卫星外表面上形成了近似的对半温度分布。另一方面,在腔体中温差 ΔT_{in} 和 ΔT_{out} 一定的条件下,当且仅当腔体温度为对半分布时,内卫星辐射计效应最大,从而可以得到气体分子作用力的上限值。

在计算中,设内卫星位于外卫星腔体中心,内卫星沿腔体温差方向运动,这样可以得到耦合结果的极值。

2.1 内卫星相对运动速度和耦合模型计算结果的关系

取腔体平均压力 $p_0 = 9.77 \times 10^{-6} \text{Pa}$,内卫星

半径 $r = 0.025\text{m}$,外卫星半径 $R = 0.25\text{m}$,内外卫星表面温差相等 $\Delta T = \Delta T_{\text{in}} = \Delta T_{\text{out}} = 0.1\text{K}$ 。令腔体平均温度 T_0 从 270K 变化到 330K ,内卫星相对运动速度 v_0 从 -1.8m/s 变化到 1.8m/s 。由耦合模型得到作用在内卫星上的气体分子作用力,如图3所示。

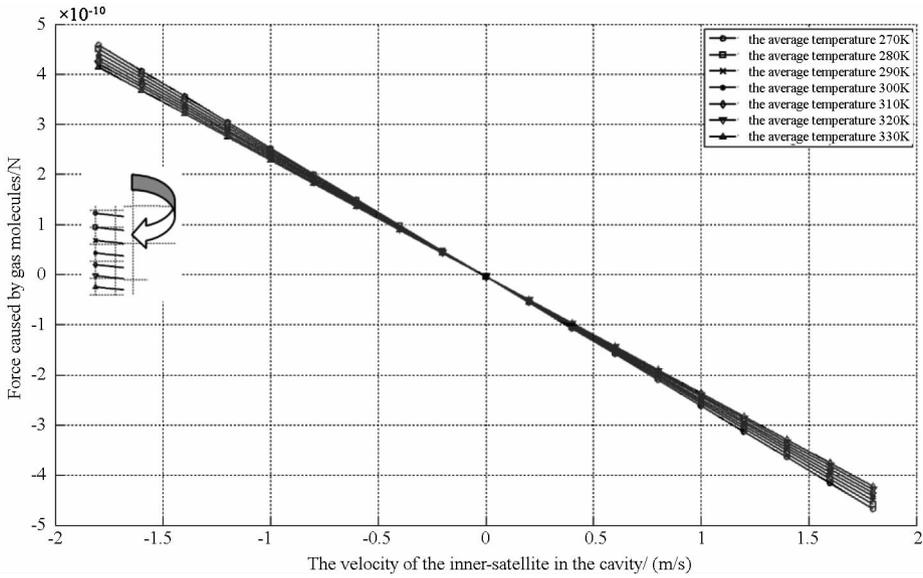


图3 腔体温差 $\Delta T = 0.1\text{K}$ 时的耦合模型计算结果

Fig. 3 Results by the coupled model when temperature difference ΔT equals 0.1K

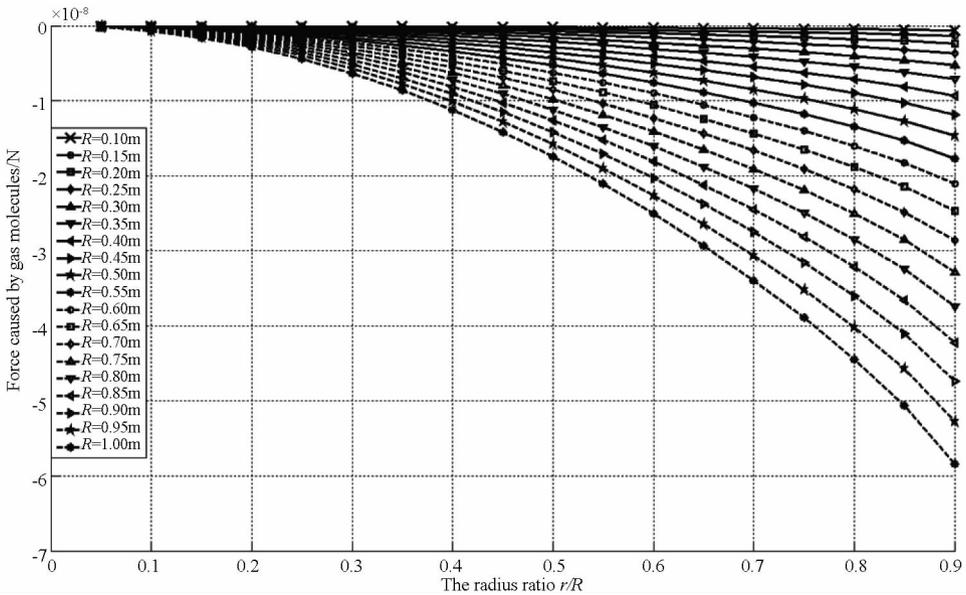


图4 内卫星相对运动速度为 0.1m/s 时的耦合模型计算结果

Fig. 4 Results by the coupled model when the inner-satellite velocity equals 0.1m/s

由图3可以看出,在耦合模型参数中如果只考虑内卫星相对运动速度的变化,则由耦合模型得到的气体分子作用力与内卫星相对运动速度成线性关系,在一定的内卫星速度下气体分子作用力为0。在不同腔体平均温度($270\text{K} \sim 330\text{K}$)和不同温差($0.1\text{K} \sim 1.0\text{K}$)下,通过计算当气体分子作用力为0时对应的内卫星运动速度,可知气体

分子作用力为0时对应的内卫星运动速度与腔体平均温度的平方根成反比,与腔体温差成正比。在不同腔体平均温度($270\text{K} \sim 330\text{K}$)和不同温差($0.1\text{K} \sim 1.0\text{K}$)下,通过计算气体分子作用力相对于内卫星相对运动速度的直线斜率,可知该斜率与腔体温差无关,与腔体平均温度的平方根成反比。于是,耦合模型计算结果正比于 $v_0/T_0^{1/2} +$

$C\Delta T/T_0$, 其中 C 为待定常数, 即

$$F_{coupled} \propto v_0 / \sqrt{T_0} + C\Delta T/T_0 \quad (3)$$

2.2 内卫星半径和耦合模型计算结果的关系

取腔体平均压力 $p_0 = 9.77 \times 10^{-6}$ Pa, 腔体平均温度 $T_0 = 300$ K, 内外卫星表面温差相等, $\Delta T = \Delta T_{in} = \Delta T_{out} = 0.5$ K, 内卫星相对运动速度 $v_0 = 0.1$ m/s. 在外卫星半径 R 从 0.10 m 变化到 0.95 m 的过程中, 内卫星半径分别取 $0.05R \sim 0.90R$, 由耦合模型得到作用内卫星上的气体分子作用力, 如图 4 所示。

由图 4 可知, 在其他参数一定的条件下, 由耦合模型得到的气体分子作用力随内卫星半径的增加而增加。设气体分子作用力与内卫星半径的关系为 $F_{coupled} = K(r/R)^\alpha$, 其中 K, α 为拟合常数。取内卫星相对运动速度 v_0 为 $0 \sim 0.5$ m/s, 外卫星半径 R 为 $0.10 \sim 1.00$ m, 内卫星半径 r 为 $0.05R \sim 0.90R$, 按照关系式 $F_{coupled} = K(r/R)^\alpha$ 对计算结果进行拟合。分析可知, α 与外卫星半径 R 无关, 与内卫星相对运动速度 v_0 有关。 K 与 R, v_0 均有关。进行数据拟合, 得到

$$\alpha = 6.3011 \times 10^{-2} v_0^{0.2522} + 1.9613 \quad (4)$$

$$K = -(4.0566 \times 10^{-7} v_0 + 2.9265 \times 10^{-8}) R^2 \quad (5)$$

从而, 气体分子作用力与内卫星半径的关

系为

$$F_{coupled} = -(4.0566 \times 10^{-7} v_0 + 2.9265 \times 10^{-8}) \cdot R^2 (r/R)_0^{6.3011 \times 10^{-2} v_0^{0.2522} + 1.9613} \quad (6)$$

根据(6)式可知, 耦合模型计算结果与内卫星半径的方幂成正比, 并且幂数和内卫星相对运动速度有关, 这反映了辐射计效应和气体阻尼的耦合性。

2.3 外卫星腔体半径和耦合模型计算结果的关系

取腔体平均压力 $p_0 = 9.77 \times 10^{-6}$ Pa, 腔体平均温度 $T_0 = 300$ K, 内外卫星表面温差相等, $\Delta T = \Delta T_{in} = \Delta T_{out} = 0.5$ K, 内卫星相对运动速度 $v_0 = 0.1$ m/s. 在内卫星半径 r 从 0.005 m 变化到 0.025 m 的过程中, 外卫星半径 R 分别取 $1.1r \sim 20r$, 由耦合模型得到的内卫星气体分子作用力如图 5 所示。可知, 随着外卫星半径的增加, 耦合模型计算结果先减小后增加, 最终趋于稳定值, 可以选取拟合函数为如下形式:

$$F_{coupled} = \left[K_1 \left(\frac{R}{r} \right)^3 + K_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + K_3 \left(\frac{R}{r} \right) + K_4 \right] \cdot e^{-K_5 \frac{R}{r}} + K_6 \quad (7)$$

其中, K_1, K_2, K_3, K_4 和 K_5 为拟合常数。

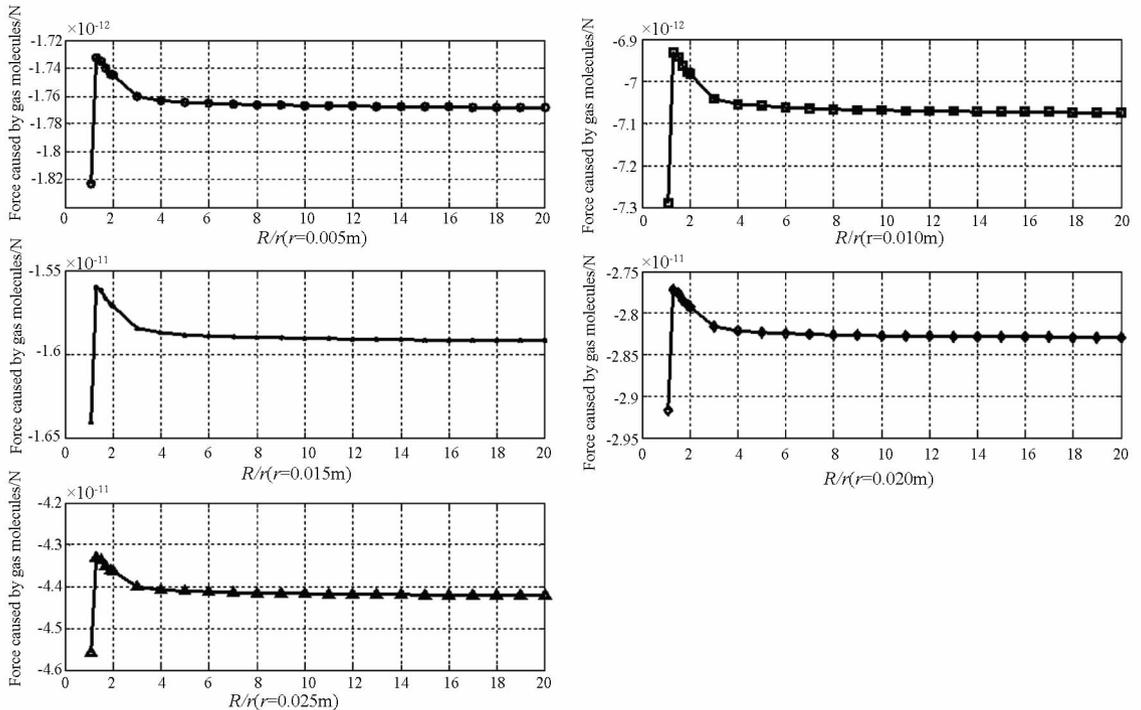


图 5 外卫星腔体半径与耦合模型计算结果的关系

Fig. 5 The relation between the outer-satellite cavity radius and results by the coupled model

2.4 耦合模型计算结果的数据拟合

由文献[14]模型易知, 辐射计效应与气体阻

尼耦合模型计算结果和腔体平均压力 p_0 成正比。综合考虑(3)、(6)和(7)式, 内卫星辐射计效应

和气体阻尼的耦合模型计算结果可用下式拟合

$$F_{coupled} = p_0 \left\{ \left[C_1 \left(\frac{R}{r} \right)^3 + C_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + C_3 \left(\frac{R}{r} \right) + C_4 \right] e^{-C_5 \frac{R}{r}} + 1 \right\} \cdot r^{C_6 v_0^{C_7 + C_8} \left(\frac{v_0}{\sqrt{T_0}} + \frac{C_9 \Delta T}{T_0} \right) C_{10}} \quad (8)$$

其中, $C_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 为拟合常数。对大量数值计算结果进行拟合,得到

$$C_1 = -2.4199 \times 10^{-5}, C_2 = -2.5431 \times 10^{-5}, \\ C_3 = -2.5554 \times 10^{-5}, C_4 = -2.5566 \times 10^{-5},$$

$$C_5 = -1.2424 \times 10^{-6}, C_6 = 1.8908 \times 10^{-7}, \\ C_7 = 0.2522, C_8 = 2.0000, \\ C_9 = 2.8125, C_{10} = -0.71072 \quad (9)$$

图6给出了数据拟合结果和10562组原始计算结果的比较,可知拟合误差在20%以内。

由(9)式可知,耦合模型计算结果与腔体平均压力成正比,与腔体温差成线性关系,随腔体平均温度的增加而减小。

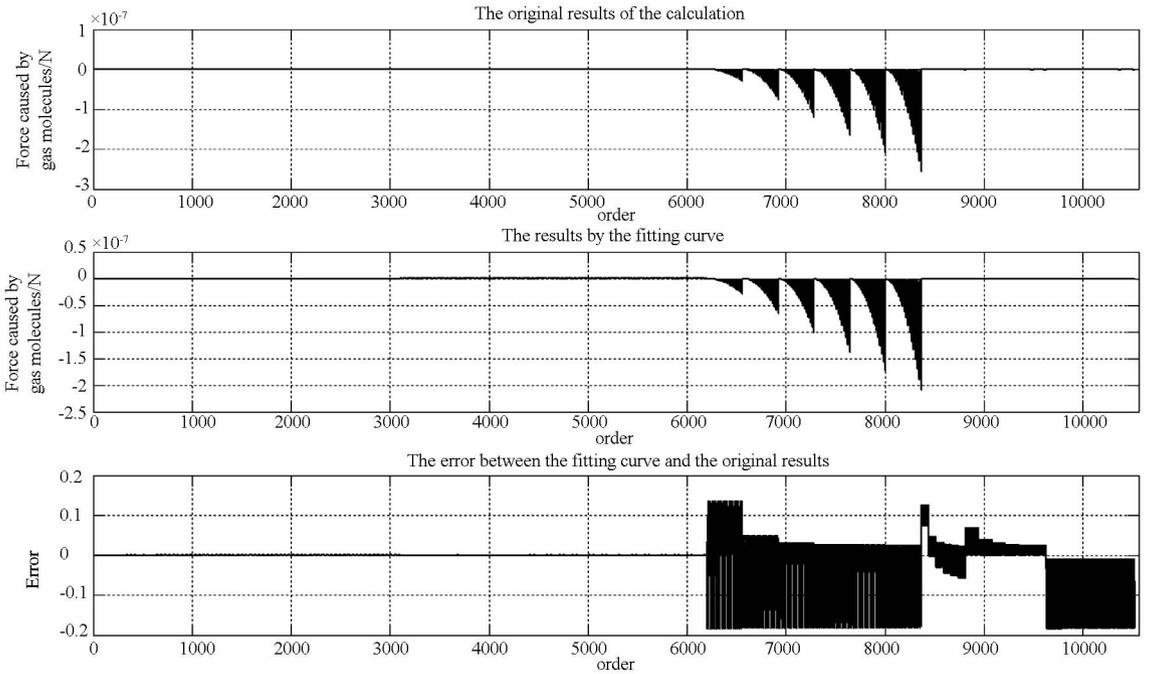


图6 拟合结果和10562组原始计算结果的比较

Fig. 6 The comparison between fitting results and 10562 original numerical results

3 结论

辐射计效应和气体阻尼耦合模型可以反映验证质量受到的总气体分子作用力,但是它的形式复杂,难以解析分析。本文以内编队系统为例,利用数值方法分析了耦合模型计算结果与内卫星相对运动速度、内卫星半径、外卫星腔体半径、腔体平均压力、腔体平均温度和腔体温差等物理参数的关系。分析可知,耦合模型计算结果与内卫星相对运动速度成线性关系,与内卫星半径的方幂成正比,并且幂数和内卫星相对运动速度有关,这反映了辐射计效应和气体阻尼的耦合性。耦合模型计算结果随外卫星半径的增加先减小后增加,最终趋于稳定值。耦合模型计算结果与腔体平均压力成正比,与腔体温差成线性关系,随腔体平均温度的增加而减小。对大量数值结果进行了拟合,给出了辐射计效应和气体阻尼耦合计算结果与各物理参数之间的拟合关系,拟合误差小于20%。

本文给出的拟合结果大大简化了辐射计效应与气体阻尼耦合模型表达式,可以显式表示反映系统参数与耦合模型之间的定性关系,同时使耦合模型计算量大大减小,有助于深入理解辐射计效应和气体阻尼的耦合模型,对验证质量干扰力抑制和纯引力轨道构造具有重要指导意义。

参考文献 (References)

[1] Wiegand M, Scheithauer S, Theil S. Step proof mass dynamics [J]. Acta Astronautica, 2003, 54(9): 631-638.
 [2] 谷振丰, 王兆魁, 张育林. 空间纯引力轨道构造与应用[C]//中国宇航学会学术年会论文集, 2010, 274-281. GU Zhenfeng, WANG Zhaokui, ZHANG Yulin. The construction and application of purely gravitational orbit in space[C]// Chinese Society of Astronautics Annual Meeting Proceedings, 2010:274-281. (in Chinese)
 [3] Buchman S, Everitt C W F, Parkinson B, et al. The gravity probe B relativity mission [J]. Advance in Space Research, 2000, 25(6): 1177-1180.
 [4] 秦丹, 闫鹏, 李光仲, 等. 等效原理的实验检验[J]. 大学物理, 2007, 26(12): 29-31. QIN Dan, YAN Peng, LI Guangzhong, et al. The experimental

- test of equivalence principle[J]. *College Physics*, 2007, 26(12): 29–31. (in Chinese)
- [5] 张元仲. 旋转物体的等效原理及其空间实验[J]. *物理*, 2008, 37(9): 643–647.
ZHANG Yuanzhong. Equivalence principle for a rotating body and its test in space[J]. *Physics*, 2008, 37(9): 643–647. (in Chinese)
- [6] 黄玉梅, 王运永, 汤克云, 等. 引力波理论和实验的新进展[J]. *天文学进展*, 2007, 25(1): 58–73.
HUANG Yumei, WANG Yunyong, TANG Keyun, et al. The new development of gravitational waves theory and detection[J]. *Progress in Astronomy*, 2007, 25(1): 58–73. (in Chinese)
- [7] 王佐磊, 薛大同, 唐富荣. 静电悬浮加速度计敏感结构的热噪声分析[J]. *真空与低温*, 2005, 11(2): 83–89.
WANG Zuolei, XUE Datong, TANG Furong. Analysis of the thermal noise of the electrostatic suspended accelerometer's sensor[J]. *Vacuum & Cryogenics*, 2005, 11(2): 83–89. (in Chinese)
- [8] Pollack S E, Schlamminger S, Gundlach J H. Outgassing, temperature gradients and the radiometer effect in LISA: a torsion pendulum investigation [C] // *Laser Interferometer Space Antenna: 6th International LISA Symposium AIP Conference Proceedings*, 2006, 873:158–164.
- [9] Bonny L S. Disturbance reduction requirements for LISA [J]. *Clas. Quan. Grav.*, 2003, 20: 239–253.
- [10] 刘红卫, 王兆魁, 张育林. 内卫星辐射计效应建模与分析[J]. *空间科学学报*, 2010, 30(3): 243–249.
LIU Hongwei, WANG Zhaokui, ZHANG Yulin. Modeling and analysis of radiometer effect on the inner-satellite[J]. *Chinese Journal of Space Science*, 2010, 30(3): 243–249. (in Chinese)
- [11] 张育林, 曾国强, 王兆魁, 等. 分布式卫星系统理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008:262–264.
ZHANG Yulin, ZENG Guoqiang, WANG Zhaokui, et al. *Theory and application of distributed satellite systems*[M]. Beijing: Science Press, 2008:262–264. (in Chinese)
- [12] 陈光锋, 唐富荣, 薛大同. 静电悬浮加速度计气体阻尼及其对控制系统特性影响分析[J]. *真空与低温*, 2005, 11(4): 216–221.
CHEN Guangfeng, TANG Furong, XUE Datong. Analysis of the electrostatic accelerometer gas damping coefficient and its influence to the control system characteristic[J]. *Vacuum & Cryogenics*, 2005, 11(4): 216–221. (in Chinese)
- [13] 宋仁旺, 陈琳英. 静电悬浮加速度计关键技术剖析[J]. *计算机工程与应用*, 2009, 45(34): 67–73.
SONG Renwang, CHEN Linying. Dissection of key technologies of electrostatically suspended accelerometer[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(34): 67–73. (in Chinese)
- [14] Liu H W, Wang Z K, Zhang Y L. Coupled modeling and analysis of radiometer effect and residual gas damping on proof mass in purely gravitational orbit [J]. *Sci China Tech Sci*, 2011, 54: 894–902.