一元二次四元数单边多项式的求根公式*

许　伟，冯良贵
（国防科技大学 理学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：随着四元数代数广泛应用于量子力学、惯性导航及控制论等学科，四元数多项式的求根问题被许多学者关注。最近 Janovska 和 Opfer 从理论上给出了一种 n 次四元数单边多项式零点的求解方法，Feng 和 Zhao 进一步给出了一般 n 次四元数单边多项式的零点显性表达式。本文根据 Feng 和 Zhao 的结果对一元二次四元数单边方程的根进行了讨论，并利用复数域上四次多项式的 Ferrari 求根公式建立了一元二次四元数单边方程的求解公式。与文献中现有的结果相比，本文建立的求根公式在许多方面展现了优越性。

关键词：四元数；二次方程；根式求解
中图分类号：O153.4，O151.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1001－2486(2013)05－0074－05

Formulae for finding all roots of quadratic one-sided polynomials over quaternions

XU Wei, FENG Lianggui
(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Quaternion algebra has been widely applied to many subjects such as quantum mechanics, control theory and inertial navigation, and it has won attention from many scholars in the field of effectively obtaining the roots of a quaternionic polynomial. Recently, Janovska and Opfer have theoretically provided a method of finding all zeros of a simple quaternionic polynomial of degree n. Furthermore, Feng and Zhao have given a formula of finding all zeros of a general simple quaternionic polynomial of degree n in terms of solving polynomials over the field of complex numbers. Based on the results given by Feng and Zhao in this paper, the roots of a quaternionic one-sided polynomial with degree 2 were discussed and classified, and a quadratic formula for quaternions with the help of the Ferrari's quadratic formula over the field of complex numbers was produced. Compared with the results in literature, the formula built in this paper displays its advantages in many aspects.

Key words: quaternion; quadratic equation; root

随着四元数代数的广泛应用[1-3]，四元数单边多项式的求根问题被众多学者所关注[4-7]。但由于四元数乘法的不可交换性，直到最近该问题的研究才获得突破性进展。对于一般的 n 次四元数单边多项式 $p(x)=q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\cdots+q_1x+1, q_i\in H$，2010 年 Janovska 和 Opfer 在文献[8]中首次从理论上给出了一种求 $p(x)$ 所有四元数零点的方法。

最近，Feng 和 Zhao 给出了一般 n 次四元数单边多项式的零点显性表达式[11]。本文应用该结果对一元二次单边四元数系数方程的零点进行研究，给出了一元二次四元数单边方程的根式求解公式。

文中，用 $\mathbf{R}$ 表示实数域，用 $\mathbf{C}$ 表示复数域，用 $\mathbf{H}$ 表示实四元数体，即 $\mathbf{H}$ 中的任何元素具有下面的形式 $q=a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是通常的四元数虚单位，满足 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1, \boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j}, a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbf{R}$。实数 $\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ 称为 q 的模，记为 $|q|$；a_0 称为 q 的实部，记为 $\mathrm{Re}q$，而 $q-\mathrm{Re}q$ 称为四元数 q 虚部，并记为 $\mathrm{Im}q$。两个四元数 b,c 称为虚部线性相关是指存在不全为零的实数 r,s，使得 $r\mathrm{Im}b+s\mathrm{Im}c=0$。若 $b\in\mathbf{R}$，如往常，定义符号函数

$$\mathrm{Sign}(b)=\begin{cases}1, & 若\ b>0\\ -1, & 若\ b<0\\ 0, & 若\ b=0.\end{cases}$$

1　一元二次四元数单边方程的一般解

本文主要研究一元二次单边四元数多项式 $f(x)=x^2+bx+c\ (b,c\in\mathbf{H})$。为方便，约定一些记号如下。

* **收稿日期：**2013－01－20
基金项目：国防科技大学基础研究项目；湖南省自然科学基金资助项目(11JJ7002)
作者简介：许伟(1984—)，男，广西北海人，博士研究生，E-mail：xuw2010@gmail.com；
冯良贵(通信作者)，男，教授，博士，博士生导师，E-mail：fenglg2002@sina.com

约定:对于多项式 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{H})$,我们总是记

$$b=b_1+b_2\boldsymbol{j}(b_1,b_2\in\mathbf{C}),c=c_1+c_2\boldsymbol{j}(c_1,c_2\in\mathbf{C}),$$
$$f_1(x)=x^2+b_1x+c_1,\overline{f_1}(x)=x^2+\overline{b_1}x+\overline{c_1},$$
$$f_2(x)=b_2x+c_2,\overline{f_2}(x)=\overline{b_2}x+\overline{c_2},$$
$$p(x)=f_1(x)\overline{f_1}(x)+f_2(x)\overline{f_2}(x)。$$

那么 $p(x)$ 是实系数多项式。可设 $\eta_1,\overline{\eta_1},\eta_2,\overline{\eta_2}$ 为 $p(x)$ 的四个复根,并且 η_1,η_2 的虚部大于等于零,这里允许 $\eta_1=\eta_2$。

首先,给出如下的引理 1。

引理 1　设四元数系数一元二次多项式为 $f(x)=x^2+bx+c$。则 $f(x)$ 在四元数体 $\mathbf{H}$ 上的每个零点都与某个 η_i 共轭,而且每个 $\eta_i(i=1,2)$ 也都有 $f(x)$ 的零点与之共轭,并且与 η_i 共轭的零点集合按如下方式给出:

(1)当 $f_1(\eta_i)=\overline{f_1}(\eta_i)=f_2(\eta_i)=\overline{f_2}(\eta_i)=0$ 时,任何与 η_i 共轭的四元数都是零点;

(2)否则,或者 $(f_1(\eta_i),f_2(\eta_i))\neq(0,0)$,则与 η_i 共轭的零点为 $(f_2(\eta_i)+\overline{f_1(\eta_i)}\boldsymbol{j})\eta_i(f_2(\eta_i)+\overline{f_1(\eta_i)}\boldsymbol{j})^{-1}$;或者 $(\overline{f_1}(\eta_i),\overline{f_2}(\eta_i))\neq(0,0)$,则与 η_i 共轭的零点取 $(\overline{f_1}(\eta_i)-f_2(\overline{\eta_i})\boldsymbol{j})\eta_i(\overline{f_1}(\eta_i)-f_2(\overline{\eta_i})\boldsymbol{j})^{-1}$。注意,当 $(f_1(\eta_i),f_2(\eta_i))\neq(0,0)$ 和 $(\overline{f_1}(\eta_i),\overline{f_2}(\eta_i))\neq(0,0)$ 同时发生时,上述两种取值是一样的。

证明　见文献[11]中的定理 1 的证明。

引理 2　设 a 和 b 是两个四元数,那么 a,b 共轭当且仅当 $\mathrm{Re}a=\mathrm{Re}b$,并且 $|a|=|b|$ 相等。

证明. 见文献[9]中的定理 2.2。

根据引理 1,我们知道多项式 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{H})$ 的零点个数只有三种可能:有无穷多个零点、有两个不同零点、只有一个零点。我们下面按零点可能出现的个数对一元二次单边四元数多项式的系数进行刻画,并找出相应的具体的零点表达式。

推论 1　四元数系数多项式 $f(x)=x^2+bx+c$ 在四元数体 $\mathbf{H}$ 上有无穷多个零点当且仅当它的系数 b,c 满足条件:$b,c\in\mathbf{R}$ 且 $b^2-4c<0$。在这种情形下,多项式 x^2+bx+c 的零点集合为

$$\left\{q\eta q^{-1}\mid\eta=\frac{-b+\sqrt{4c-b^2}\boldsymbol{i}}{2},q\neq0,q\in\mathbf{H}\right\}$$

换言之,多项式的零点集合可以表示为

$$\left\{\frac{1}{2}(-b+\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k})\mid\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbf{R},\ a^2+b^2+g^2=4c-b^2\right\}.$$

证明　$\Rightarrow$)由引理 1 知道,$f(x)$ 有无穷多个零点当且仅当复系数多项式 $f_1(x),f_2(x),\overline{f_1}(x),\overline{f_2}(x)$ 在复数域上有公共的非实数解 η。注意到 $b=b_1+b_2\boldsymbol{j}(b_1,b_2\in\mathbf{C})$, $c=c_1+c_2\boldsymbol{j}(c_1,c_2\in\mathbf{C})$,于是由 η 是 $f_1(x)-\overline{f_1}(x)$ 的零点知 $b_1,c_1\in\mathbf{R}$。再由 η 是 $f_2(x)$ 与 $\overline{f_2}(x)$ 的公共零点知 $b_2=c_2=0$。由此得到 $b_1,c\in\mathbf{R}$ 且 $b^2-4c<0$。

$\Leftarrow$)利用引理 1,结论显然。

推论 2　若四元数系数多项式 $f(x)=x^2+bx+c$ 的系数 b,c 都是复数,并且 b,c 不满足推论 1 的条件,那么 $f(x)$ 在四元数体 $\mathbf{H}$ 上的所有零点为 $\xi_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$,其中,若复数 b^2-4c 写成 $r_1+r_2\boldsymbol{i}$ $(r_1,r_2\in\mathbf{R})$,则 $\sqrt{b^2-4c}$ 的值取为 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}+r_1}{2}}+\mathrm{sign}(r_2)\sqrt{\dfrac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}-r_1}{2}}\boldsymbol{i}$。因此,此时 $f(x)=x^2+bx+c$ 有且仅有一个零点当且仅当 $b^2-4c=0$。

证明　首先,由 b,c 不满足推论 1 的条件知,多项式 $f(x)$ 至多有两个零点。如果 $\xi_1\neq\xi_2$,则已经有两个不同的零点,所以它们是全部零点。下面假设 $\xi_1=\xi_2$。此时 $b^2=4c$。多项式 $p(x)=f_1(x)\bar{f}_1(x)+f_2(x)\bar{f}_2(x)$ 的四个复根为 $-\dfrac{b}{2}$, $-\dfrac{b}{2}$, $-\dfrac{\bar{b}}{2}$, $-\dfrac{\bar{b}}{2}$。若 b 为实数,由引理 1 立知 $f(x)$ 的所有零点即为 $-\dfrac{b}{2}$。若 b 不为实数,则 $f_1(-\dfrac{\bar{b}}{2})\neq0$,即 $\overline{f_1}(-\dfrac{b}{2})\neq0$,进而根据引理 1 中的第二项得 $f(x)$ 的所有零点为 $-\dfrac{b}{2}$。

我们知道,任何一个四元数 q 都可以表示为 $q=a+r\theta$,其中 $a,r\in\mathbf{R},r\geqslant0$,而 $\theta=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$,使得 $\theta^2=-1$。特别地,当 q 为非实的四元数时,该表示法是唯一的。

推论 3　设 $b=a_1+r_1\theta_1,c=a_2+r_2\theta,\theta_1,\theta_2\in\mathbf{R}\boldsymbol{i}+\mathbf{R}\boldsymbol{j}+\mathbf{R}\boldsymbol{k},\theta_1^2=\theta_2^2=-1$。若 $\theta_1=\theta_2$(记为 θ),并且 b,c 不满足推论 1 的假设条件,则 $f(x)=x^2+bx+c$ 在 $\mathbf{H}$ 上的零点可以由通常的二次求根公式求出,准确地说,$f(x)$ 的零点是

$$\frac{-b\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}}+\mathrm{sign}(B)\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}}\theta\right)}{2}\tag{1}$$

其中 $A = a_1^2 - r_1^2 - 4a_2$，$B = 2a_1r_1 - 4r_2$。特别地，如果 b，c 之中有一个是实数，但另外一个不是实数，总是属于这种情形的。

证明　若 A，B 不全为零，则式(1)已经给出了两个不共轭的零点，所以他们是全部零点。若 A，B 全为零，即 $b^2 - 4c = 0$。我们知道 θ 是共轭于 $\boldsymbol{i}$ 的，于是存在非零的四元数 q，使得 $q\theta q^{-1} = \boldsymbol{i}$，从而 qbq^{-1}，qcq^{-1} 都是复数。考虑 $(qxq^{-1})^2 + (qbq^{-1})(qxq^{-1}) + qcq^{-1} = 0$，由于此时 $(qbq^{-1})^2 - 4(qcq^{-1}) = 0$，根据推论 2，知道 qxq^{-1} 只有一个取值，为 $-\dfrac{qbq^{-1}}{2}$，所以原来方程的零点也只有一个取值，为 $-\dfrac{b}{2}$。

对于一般的二次方程，可以直接引用引理 1 的结果以及复数域上的四次求根公式来得到一元二次单边四元数多项式零点的表达式。

首先简要介绍复系数四次方程在复数上求解的 Ferrari 求根公式。对复系数方程 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\,(a \neq 0)$，方程的复数解可由下面的计算(即，Ferrari 公式)给出。下文中如果无特殊说明，遇到取根式总表示随便取定一个即可。

Ferrari **求根公式**　令 $\alpha = \dfrac{-3b^2}{8a^2} + \dfrac{c}{a}$，$\beta = \dfrac{b^3}{8a^3} - \dfrac{bc}{2a^2} + \dfrac{d}{a}$，$\gamma = \dfrac{-3b^4}{256a^4} + \dfrac{cb^2}{16a^3} - \dfrac{bd}{4a^2} + \dfrac{e}{a}$。如果 $\beta = 0$，那么方程的解为 $x_{1,2} = \dfrac{-b}{4a} + \sqrt{\dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}}$，$x_{3,4} = \dfrac{-b}{4a} - \sqrt{\dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}}$。否则，让 $P = -\dfrac{\alpha^2}{12} - \gamma$，$Q = -\dfrac{\alpha^3}{108} + \dfrac{\alpha\gamma}{3} - \dfrac{\beta^2}{8}$，$R = -\dfrac{Q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}}$，

$$U = \sqrt[3]{R}，令\ y = \begin{cases} -\dfrac{5}{6}\alpha + U - \dfrac{P}{3U}, & 如果\ U \neq 0 \\ -\dfrac{5}{6}\alpha + U - \sqrt[3]{Q}, & 如果\ U = 0 \end{cases},$$

$W = \sqrt{\alpha + 2y}$，方程的解为

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} + \frac{W \pm \sqrt{-\left(3\alpha + 2y + \dfrac{2\beta}{W}\right)}}{2},$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + \frac{-W \pm \sqrt{-\left(3\alpha + 2y - \dfrac{2\beta}{W}\right)}}{2}。$$

综合上面的陈述，并结合前面已经得到的结果，我们得到下面的定理。

定理 1　一元二次四元数系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 在四元数体 $\mathbf{H}$ 上的全部零点可以通过下面的计算得到：

情形 1　若系数 b，c 都是实数，并且满足 $b^2 - 4c < 0$，则

$$\left\{ q\eta q^{-1} \mid \eta = \frac{-b + \sqrt{4c - b^2}\,\boldsymbol{i}}{2}, q \neq 0, q \in \mathbf{H} \right\}$$

是该方程根的集合，或者也可表示为

$$\left\{ \frac{1}{2}(-b + \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4c - b^2 \right\}.$$

情形 2　若存在 $a_1, a_2, r_1, r_2 \in \mathbf{R}$，$\theta \in \mathbf{R}\boldsymbol{i} + \mathbf{R}\boldsymbol{j} + \mathbf{R}\boldsymbol{k}$，$\theta^2 = -1$，使得 $b = a_1 + r_1\theta$，$c = a_2 + r_2\theta$，并且 b，c 不满足情形 1 的条件，则

$$x = \frac{-b \pm \left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}} + \mathrm{sign}(B)\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}\,\theta \right)}{2}$$

其中 $A = a_1^2 - r_1^2 - 4a_2$，$B = 2a_1r_1 - 4r_2$。特别地，如果 b，c 之中有一个是实数，另外一个不是实数，该方程根可以通过上式计算得到。

情形 3　若 b，c 不满足情形 1 的条件，也不满足情形 2 的条件，方程的根取下面的值：

如果 $|f_1(\eta_i)|^2 + |f_2(\eta_i)|^2 \neq 0$，取

$$\frac{1}{|f_1(\eta_i)|^2 + |f_2(\eta_i)|^2 \neq 0}\left(|f_2(\eta_i)|^2\eta_i + |f_1(\eta_i)|^2\,\overline{\eta_i} - 2f_2(\eta_i)\overline{f_1(\eta_i)}(\mathrm{Im}\eta_i)\boldsymbol{k}\right)$$

如果 $|f_1(\eta_i)|^2 + |f_2(\eta_i)|^2 = 0$，则取

$$\frac{1}{|f_1(\overline{\eta_i})|^2 + |f_2(\overline{\eta_i})|^2 \neq 0}\left(|f_2(\overline{\eta_i})|^2\,\overline{\eta_i} + |f_1(\overline{\eta_i})|^2\eta_i + 2f_2(\overline{\eta_i})\overline{f_1(\overline{\eta_i})}(\mathrm{Im}\eta_i)\boldsymbol{k}\right).$$

其中，η_i 是实系数多项式 $p(x)$ 的虚部大于等于 0 的复根，他们可以由复数域上的 Ferrari 四次求根公式求得。

证明　只需证明第三种情形。首先，系数 b，c 不满足情形 2 的条件说明 $p(x)$ 无实根，亦即 η_1，η_2 均是非实的复数。其次 b，c 不满足情形 1 的条件说明此时 $f(x)$ 至多有两个零点。因此，若 b，c 不满足情形 1 的条件，也不满足情形 2 的条件，则由引理 1 得，多项式 $f(x)$ 的零点由引理 1 的第二种情形给出。所以，当 $|f_1(\eta_i)|^2 + |f_2(\eta_i)|^2 \neq 0$ 时，取 $(f_2(\eta_i) + \overline{f_1(\eta_i)}\boldsymbol{j})\eta_i(f_2(\eta_i) + \overline{f_1(\eta_i)}\boldsymbol{j})^{-1}$。易知，$(f_2(\eta_i) + \overline{f_1(\eta_i)}\boldsymbol{j})\eta_i(f_2(\eta_i) + \overline{f_1(\eta_i)}j)^{-1} = \dfrac{1}{|f_1(\eta_i)|^2 + |f_2(\eta_i)|^2 \neq 0}\left(|f_2(\eta_i)|^2\eta_i + |f_1(\eta_i)|^2\,\overline{\eta_i} - 2f_2(\eta_i)\overline{f_1(\eta_i)}(\mathrm{Im}\eta_i)\boldsymbol{k}\right)$。

注意到,当 $|f_1(\eta_i)|^2+|f_2(\eta_i)|^2=0$ 时,此时必有 $(\overline{f_1}(\eta_i),\overline{f_2}(\eta_i))\neq(0,0)$,再由引理 1,与 η_i 共轭的零点取为 $(\overline{f_1}(\eta_i)-f_2(\overline{\eta_i})\boldsymbol{j})\eta_i(\overline{f_1}(\eta_i)-f_2(\overline{\eta_i})\boldsymbol{j})^{-1}$,它等于 $\frac{1}{|f_1(\overline{\eta_i})|^2+|f_2(\overline{\eta_i})|^2\neq 0}(|f_2(\overline{\eta_i})|^2\overline{\eta_i}+|f_1(\eta_i)|^2\eta_i+2f_2(\overline{\eta_i})\overline{f_1(\overline{\eta_i})}(\mathrm{Im}\eta_i)\boldsymbol{k})$.

2　结束语

四元数代数中的许多问题涉及或可归结为一元二次单边四元数方程的求解。例如,可将二阶四元数方阵的左特征值求解问题转化为对一元二次单边四元数方程进行求解[10]。鉴此 Huang 和 Wasin 先于本文给出了一种一元二次四元数单边方程的求根公式[7]。其具体内容见表 1。本文使用的方法不同于文献[7]的方法。为方便对比,把本文的主要结果概括为表 2。

对比两个表格可以看出,表 1 以及表 2 的最后一款都是计算比较复杂的。当所给方程系数能满足前面几款之一的条件时,用对应情形给出的计算公式进行计算是比较快捷的。另外,我们还可以看出,表 1 和表 2 的第一款是一样的。而根据定理 1 可以知道,表 2 的第二款包括了表 1 的第二和第三款,并且表 1 的第四款中也有部分情形是落在表 2 的第二款。因此在实际计算中,我们可以通过表 2 的第二款的计算公式更加快捷地给出属于该情形的零点表达式。以上分析表明,本文所建立的一元二次四元数单边方程求根公式在某些方面展现了其优越性。

表 1　文献[7]中的求根公式

<table>
<tr><th>情形</th><th>零点表达式</th><th>零点个数</th></tr>
<tr><td>情形 1.
$b,c\in\mathbf{R}$ 且
$b^2<4c$</td><td>$x=\frac{1}{2}(-b+\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k})$ 其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ 且 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4c-b^2$</td><td>无穷多个零点</td></tr>
<tr><td>情形 2.
$b,c\in\mathbf{R}$
且 $b^2\geqslant 4c$</td><td>$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$</td><td rowspan="3">至多两个</td></tr>
<tr><td>情形 3.
$b\in\mathbf{R}$ 而 $c\notin\mathbf{R}$</td><td>$x=\frac{-b}{2}\pm\frac{\rho}{2}\boldsymbol{i}\mp\frac{c_2}{\rho}\boldsymbol{j}\mp\frac{c_3}{\rho}\boldsymbol{k}$,其中 $c=c_0+c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$,
$\rho=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2-4c_0+\sqrt{(b^2-4c_0)^2+16(c_1^2+c_2^2+c_3^2)})}$</td></tr>
<tr><td>情形 4.
$b\notin\mathbf{R}$</td><td>$x=\frac{-\mathrm{Re}b}{2}-(b'+T)^{-1}(c'-N)$,其中 $b'=b-\mathrm{Re}b=\mathrm{Im}b$,$c'=c-((\mathrm{Re}b)/2)(b-(\mathrm{Re}b)/2)$,$(T,N)$ 按如下方式选择:
1. 如果 $D=0,B^2\geqslant 4Eh$,则 $T=0,N=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4E}}{2}$;
2. 如果 $D=0,B^2<4E$,则 $T=\pm\sqrt{2\sqrt{E}-B},N=\sqrt{E}$;
3. 如果 $D\neq 0$,则 $T=\pm\sqrt{z},N=(T^3+BT+D)/2T$,其中 z 是 $z^3+2Bz^2+(B^2-4E)z-D^2$ 的正根。
这里 $B=|b'|^2+2\mathrm{Re}c',E=|c'|^2,D=2\mathrm{Re}\,\overline{b'}c'$。</td></tr>
</table>

表2 本文中的求根公式

条件	零点表达式	零点个数
条件1. $b,c\in\mathbf{R}$ 且 $b^2<4c$。	$x=\frac{1}{2}(-b+\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k})$ 其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ 且 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4c-b^2$	无穷多个零点
条件2. b,c 的虚部线性相关但不满足条件1。	$x=\dfrac{-b\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}}+\mathrm{sign}(B)\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}}\theta\right.}{2}$ 这里把 b,c 表示成 $b=a_1+r_1\theta,c=a_2+r_2\theta,a_1,a_2,r_1,r_2\in\mathbf{R},\theta\in\mathbf{R}\boldsymbol{i}+\mathbf{R}\boldsymbol{j}+\mathbf{R}\boldsymbol{k}$, $\theta^2=-1$。$A=a_1^2-r_1^2-4a_2,B=2a_1r_1-4r_2$。	
条件3. b,c 不满足条件1,也不满足条件2	$x=\begin{cases}\dfrac{1}{\lvert f_1(\eta_i)\rvert^2+\lvert f_2(\eta_i)\rvert^2}(\lvert f_2(\eta_i)\rvert^2\eta_i+\lvert f_1(\eta_i)\rvert^2\overline{\eta_i}-2f_2(\eta_i)\overline{f_1(\eta_i)}(\mathrm{Im}\eta_i)\boldsymbol{k}) & \lvert f_1(\eta_i)\rvert^2+\lvert f_2(\eta_i)\rvert^2\neq0\\ \dfrac{1}{\lvert f_1(\overline{\eta_i})\rvert^2+\lvert f_2(\overline{\eta_i})\rvert^2}(\lvert f_2(\overline{\eta_i})\rvert^2\overline{\eta_i}+\lvert f_1(\eta_i)\rvert^2\eta_i+2f_2(\overline{\eta_i})\overline{f_1(\overline{\eta_i})}(\mathrm{Im}\eta_i)\boldsymbol{k}) & \lvert f_1(\eta_i)\rvert^2+\lvert f_2(\eta_i)\rvert^2=0\end{cases}$ 其中 η_i,f_i 如本文引理1前的约定,$i=1,2$。这里 η_i 可由 Ferrari 公式获得。	至多两个

参考文献(References)

[1] Adler S L. Quaternionic quantum field theory[J]. Commum. Math. Phys., 104(1986), 611-656.

[2] Titterton D H, Weston J L. Strapdown intertial navigation technology[J]. Progress in Astronautic and Aeronautics Series, 207, Second Edition, AIAA, 2004.

[3] Turner J D. Quaternion analysis tools for engineering and scientific applications[J]. J. Guid. Control Dyn., 2009, 32(2):686-693.

[4] Gentili G, Stroppato C. Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable[J]. Michigan Math. J., 2008, 56:655-667.

[5] Gentili G, Struppa D C, Vlacci F. The fundamental theorem of algebra for Hamilton and Cayley numbers[J]. Math. Z., 2008, 259:895-902.

[6] Pumplun S, Walcher S. On the zeros of polynomials over quaternions[J]. Comm. Alg., 2002, 30:4007-4018.

[7] Huang L P, Wasin S. Quadratic formulas for quaternions[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15:533-540.

[8] Janovska D, Opfer G. A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2010, 48(1):244-256.

[9] Zhang F Z. Quaternions and matrices of quaternions[J]. Linear Algebra Appl., 1997, 125:21-57.

[10] Huang L P, Wasin S. On left eigenvalues of a quaternionic matrix[J]. Linear Algebra Appl., 2001, 323: 105-116.

[11] Feng L G, Zhao K M. A method of finding all roots of simple quaternionic polynomials[J]. arXiv:1109.2503, 2011.