

机动目标状态估计的最小均方误差界*

吴楠¹, 陈磊¹, 薄涛², 雷勇军¹

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;

2. 复杂航空系统仿真重点实验室, 北京 100076)

摘要:基于多项式模型的各种自适应滤波算法被广泛应用于机动目标跟踪领域,但尚没有统一的评估标准来衡量这些跟踪算法的优劣。由于存在确定的时变未知输入,机动目标的状态估计实际为有偏估计。基于状态估计均方误差最小的准则,推导了多项式模型滤波的最小均方误差界计算方法,获得了使状态估计均方误差最小的过程噪声方差变化规律。该方法给出了各种基于多项式模型的机动目标跟踪算法的估计均方误差下限,也为机动目标跟踪中最优过程噪声方差的设定提供了依据。仿真结果验证了算法的有效性。

关键词:机动目标跟踪;最小均方误差界;自适应卡尔曼滤波;有偏估计;多项式模型

中图分类号:TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2013)06-0001-08

Minimum mean square error bound for state estimation of maneuvering targets

WU Nan¹, CHEN Lei¹, BO Tao², LEI Yongjun¹

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Science and Technology on Complex Aviation Systems Simulation Laboratory, Beijing 100076, China)

Abstract: The adaptive filtering algorithms based on the polynomial model are widely used in the field of maneuvering target tracking, but there is no uniform evaluation criterion to measure the quality of these tracking algorithms. Due to the existence of time-varying unknown inputs, the maneuvering target state estimation is actually biased. To solve this problem, the minimum mean square error bound calculation method for polynomial model Kalman filters was derived based on the minimum mean square error criterion, and the process noise variance law minimizing the state estimation mean square error was obtained. The proposed algorithm provides a unified evaluation standard for maneuvering target tracking algorithms based on the polynomial model, and also provides the basis for the setting of the actual process noise variance in maneuvering target tracking. The effectiveness of the proposed algorithm is demonstrated by the simulation results.

Key words: maneuvering target tracking; minimum mean square error bound; adaptive kalman filtering; biased estimation; polynomial model

应用卡尔曼滤波器解决机动目标跟踪问题的关键是建立机动目标准确的动力学模型,但对于目标未知的机动,运动模型通常无法准确建立。Singer 模型^[1]的提出为后续机动目标建模提供了一种基础性的思路,即把机动作为系统方程的一种扰动输入,因此现代机动目标建模多采用多项式模型作为描述目标运动的近似模型^[2],并将模型截断误差作为过程噪声,能否对时变的过程噪声进行准确描述成为该类方法的核心问题。

过程噪声的构造方法通常有两类:(a) 基于先验信息,如 Singer 模型、Jerk 模型^[3]和当前统计(Current Statistic, CS)模型^[4],及其各种改进算法^[5]等,将过程噪声方差构造为机动时间常数和加速度方差等先验信息的函数;(b) 基于历史数

据,如极大后验估值法^[6]和输入估值法^[7],及其各种改进算法^[8-9]等,将机动加速度估计转化为自适应滤波问题,滤波的同时对过程噪声方差进行统计估计。上述方法通常还与交互多模型(Interacting Multiple Model, IMM)^[10]、强跟踪滤波器(Strong Tracking Filtering, STF)^[11]等方法相结合,进一步增加跟踪的稳定性和精度。

尽管有各种工程方法用于过程噪声方差的确定,但针对过程噪声方差最优取值以及对应估计最小均方误差界的理论研究较少。克拉玛罗界(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)是无偏估计算法性能评估的常用判断标准^[12],如 Farina 给出了存在未知定常参数的再入目标跟踪 CRLB 计算方法^[13],占荣辉对目标以常速率转弯机动的估计

* 收稿日期:2013-04-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(41240031)

作者简介:吴楠(1984—),男,河南开封人,博士研究生,E-mail:wunan8471@nudt.edu.cn;

陈磊(通信作者),男,教授,博士,E-mail:chenl@nudt.edu.cn

CRLB 进行了分析^[14], Lei M 提出了用状态估计而不是真值计算 CRLB 的方法^[15],但在这些方法中, CRLB 的计算或将过程噪声方差作为已知信息,或将待估的未知参数作为定常,而对于现代机动目标,待估参数和过程噪声方差通常是未知时变的,因此采用传统 CRLB 的计算方法很难获得时变机动目标状态估计的最小均方误差界。

本文将多项式模型的截断误差(目标机动)作为未知输入,首先证明由于确定性的时变未知输入存在,机动目标状态估计为有偏估计;然后基于状态估计均方误差最小的准则,推导了相应多项式模型滤波算法的估计最小均方误差界,并获得了使状态估计均方误差最小的最优过程噪声方差变化规律;最后基于本文理论给出了一种过程噪声自适应设计的工程算法。

1 机动目标跟踪问题描述

若采用匀加速(Constant Acceleration, CA)模型描述具有确定性机动的目标,相应的离散化状态方程和观测方程可表示为

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (1)$$

$$y_{k+1} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} + \nu_{k+1}$$

式中 x, \dot{x}, \ddot{x} 分别为位置、速度和加速度, y 为位置观测量, T 为观测间隔, ν_{k+1} 为观测噪声 ($E\{\nu_{k+1}\} = 0, E\{\nu_{k+1}\nu_{k+1}^T\} = R$), 与标准卡尔曼滤波要求的状态方程不同, u_k 为确定的未知输入加速度增量, $E\{u_k\} = u_k$ (即 CA 模型的截断误差), 而不是均值为 0 的过程噪声。将式(1)归纳为更一般的矩阵形式

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_k + \mathbf{G}u_k \\ y_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{X}_{k+1} + \nu_{k+1} \end{cases} \quad (2)$$

对于式(1)的情况 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{H} = [1 \quad 0 \quad 0], E\{\nu_{k+1}\nu_{k+1}^T\} = R$ 。式(2)是机动目标跟踪问题一般化的表示,其中向量或矩阵的具体表达式随问题的不同而变化。在实际跟踪过程中,通常将未知输入近似为随机过程噪声,并用合理的过程噪声方差对估计方差进行补偿,此时便可以采用卡尔曼滤波对系统进行求解,对于该

系统,过程噪声方差如何取值才能使状态估计均方误差最小即是本文需要解决的问题。

2 未知输入导致的估计有偏性

由于式(2)中 u_k 未知,滤波器 $k+1$ 时刻的一步预测为

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_{k/k} \quad (3)$$

一步估计为

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{K}_{k+1}[y_{k+1} - \mathbf{H}\mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_{k/k}] \quad (4)$$

估计误差为

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1} = -(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{G}u_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k} - \mathbf{X}_k) + \mathbf{K}_{k+1}\nu_{k+1} \quad (5)$$

由式(5)可知,估计误差分为三部分:(a) 该步未知输入导致的估计误差;(b) 上步状态估计误差的累积;(c) 该步观测噪声导致的估计误差。如果 u_k 为零均值随机量,上步估计为无偏估计,观测噪声为零均值白噪声,则状态估计误差的均值为 0,估计的均方误差与估计方差等价。而当 $E\{u_k\} = u_k$ 时,状态估计误差的均值为

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{X}_{k+1} &= E\{\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})[\mathbf{F}\Delta\mathbf{X}_k - \mathbf{G}u_k] \\ &= -\sum_{j=1}^k \left(\left(\prod_{i=j+1}^{k+1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\mathbf{H})\mathbf{F} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_j\mathbf{H})\mathbf{G}u_{j-1} \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{G}u_k \right) \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)说明:(a) 对于存在确定性未知输入的系统,每个时刻的状态估计均为有偏估计;(b) 每个时刻的估计偏差量均会累积入最后时刻的估计偏差,即使当前时刻没有未知输入存在,之前的累积误差也会导致当前时刻估计有偏。

滤波器方程式(4)也可写为

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{K}_{k+1}y_{k+1} \quad (7)$$

式(7)为一个线性系统,其稳定性可由相应的齐次方程式进行判别

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_{k/k} \quad (8)$$

式(8)一致渐近稳定的充要条件为:存在常数 $C_1 > 0, C_2 > 0$,使得对所有 $k \geq l > 0$,范数

$$\left\| \left(\prod_{i=l}^k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\mathbf{H})\mathbf{F} \right) \right\| \leq C_2 e^{-C_1(t_k - t_l)} \quad (9)$$

式(9)可等价描述为:如果滤波器系统是稳定的,则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\prod_{i=1}^k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\mathbf{H})\mathbf{F} \right) \right\| = 0 \quad (10)$$

综合式(10)和式(6)可知,通过合理调整增益矩阵 \mathbf{K} ,保证滤波器是稳定的,则状态估计虽有偏,但只要未知输入有界,则偏差量也是有界的, $k+1$ 时刻的状态估计偏差主要由 $k+1$ 时刻及以前的

$l(l \leq k)$ 组未知输入序列 $\{u_i\}$ ($i = k+1, k, \dots, k-l$) 决定。当状态估计为有偏估计时,估计的均方误差矩阵与协方差矩阵不再等价,二者关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k+1}^{\text{MSE}} &= \mathbf{E} \{ [\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}] [\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}]^T \} \\ &= \mathbf{P}_{k+1/k+1} + \Delta \mathbf{X}_{k+1} \Delta \mathbf{X}_{k+1}^T \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{P}_{k+1/k+1}^{\text{MSE}}$ 体现了状态估计对真值的接近程度,而 $\mathbf{P}_{k+1/k+1}$ 仅体现了状态估计对均值的接近程度,因此当状态估计有偏时, $\mathbf{P}_{k+1/k+1}^{\text{MSE}}$ 才代表了状态估计的性能。从式(5)可以看出,通过调整增益矩阵 \mathbf{K}_{k+1} (或 \mathbf{Q}_k) 可以改变估计方差和偏离量在均方误差中的比重,增加 \mathbf{K}_{k+1} (或 \mathbf{Q}_k) 有利于减小估计偏差,但同时也会增大估计方差,因此存在一个最优的 \mathbf{K}_{k+1} (或 \mathbf{Q}_k),可取得减小估计偏差和估计方差间的平衡,从而使状态估计的均方误差取得最小值。

3 机动目标估计的最小均方误差界

基于最小均方误差准则,采用卡尔曼滤波的递推公式,获得确定性未知输入存在条件下的估计最小均方误差界和最优过程噪声方差计算方法。根据上节推导, k 时刻的状态估计可表示为

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/k} = \mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{X}_k + \delta \mathbf{X}_k \quad (12)$$

式中 $\Delta \mathbf{X}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})(\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{G} u_{k-1})$ 为 k 时刻状态估计误差的均值, $\delta \mathbf{X}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{F} \delta \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{K}_k \boldsymbol{\nu}_k$ 为估计误差的随机项,即 $\mathbf{E} \{ \delta \mathbf{X}_k \} = 0$,估计方差矩阵为 $\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{E} \{ \delta \mathbf{X}_k \delta \mathbf{X}_k^T \}$,估计均方误差矩阵为 $\mathbf{P}_{k/k}^{\text{MSE}} = \mathbf{P}_{k/k} + \Delta \mathbf{X}_k \Delta \mathbf{X}_k^T$ 。利用估计值一步预测

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{X}}_{k/k} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{X}_k + \delta \mathbf{X}_k) \quad (13)$$

而 $k+1$ 时刻一步预测和估计的真值应为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_{k+1/k} = \mathbf{F} \mathbf{X}_k + \mathbf{G} u_k \quad (14)$$

一步预测误差为

$$\mathbf{dX}_{k+1/k} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} - \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k + \mathbf{F} \delta \mathbf{X}_k - \mathbf{G} u_k \quad (15)$$

一步预测误差的均值为

$$\mathbf{E} \{ \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} - \mathbf{X}_{k+1/k} \} = \mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k - \mathbf{G} u_k \quad (16)$$

一步预测的均方误差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k}^{\text{MSE}} &= \mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k} \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \} \\ &= \mathbf{F} \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{F}^T + (\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k - \mathbf{G} u_k)(\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k - \mathbf{G} u_k)^T \\ &= \mathbf{F} \mathbf{P}_{k/k}^{\text{MSE}} \mathbf{F}^T - u_k (\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k \mathbf{G}^T + \mathbf{G} \Delta \mathbf{X}_k^T \mathbf{F}^T) + \mathbf{G} u_k^2 \mathbf{G}^T \end{aligned} \quad (17)$$

去偏后的预测误差协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ [\mathbf{dX}_{k+1/k} - (\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k - \mathbf{G} u_k)] [\mathbf{dX}_{k+1/k} - (\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k - \mathbf{G} u_k)]^T \} &= \mathbf{F} \delta \mathbf{X}_k \delta \mathbf{X}_k^T \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{F}^T \\ & \quad (18) \end{aligned}$$

将增益矩阵 \mathbf{K}_{k+1} 作为待定系数矩阵,仍采用卡尔曼滤波进行递推,获得 $k+1$ 时刻状态估计

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{K}_{k+1} ([y_{k+1} - \mathbf{H} \mathbf{F} \hat{\mathbf{X}}_{k/k}]) \quad (19)$$

根据式(15)所示的一步预测误差与 $k+1$ 时刻的观测噪声不相关(即 $\mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k} \boldsymbol{\nu}_{k+1}^T \} = 0$), $k+1$ 时刻状态估计的二次型均方误差函数 J_{k+1} 为

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \mathbf{E} \{ [\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}]^T [\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}] \} \\ &= \mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \mathbf{dX}_{k+1/k} + \boldsymbol{\nu}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1} \boldsymbol{\nu}_{k+1} \\ & \quad - 2 \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} \\ & \quad + \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \mathbf{H}^T \mathbf{K}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} \} \end{aligned} \quad (20)$$

根据矩阵微分公式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{y} \mathbf{x}^T, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m \times 1}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n \times 1} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{y} \mathbf{x}^T + \mathbf{y} \mathbf{x}^T), \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n \times 1} \end{cases} \quad (21)$$

将 J_{k+1} 对增益矩阵 \mathbf{K}_{k+1} 求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \mathbf{K}_{k+1}} &= 2 \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{E} \{ \boldsymbol{\nu}_{k+1} \boldsymbol{\nu}_{k+1}^T \} \\ & \quad - 2 \mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k} \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \} \mathbf{H}^T \\ & \quad + 2 \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k} \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \} \mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (22)$$

使 J_{k+1} 取极值的增益矩阵 \mathbf{K}_{k+1} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1}^{\text{opt}} &= \\ \mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k} \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{E} \{ \mathbf{dX}_{k+1/k} \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)是使 J_{k+1} 最小的必要条件,还需要证明其充分性。任取一与 \mathbf{K}_{k+1} 同维的矩阵 \mathbf{A} ,比较不同增益矩阵条件下 J_{k+1} 值

$$\begin{aligned} J_{k+1}(\mathbf{K}_{k+1}^{\text{opt}} + \mathbf{A}) - J_{k+1}(\mathbf{K}_{k+1}^{\text{opt}}) &= (\mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} + \boldsymbol{\nu}_{k+1})^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_{k+1}^{\text{opt}} \\ & \quad + (\mathbf{K}_{k+1}^{\text{opt}})^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}) (\mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} + \boldsymbol{\nu}_{k+1}) \\ & \quad - 2 \mathbf{dX}_{k+1/k}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} \\ &= (\mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} + \boldsymbol{\nu}_{k+1})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{H} \mathbf{dX}_{k+1/k} + \boldsymbol{\nu}_{k+1}) > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

显然,充分性得到证明,即式(23)是使 J_{k+1} 最小的充分必要条件。由式(23)可知,采用一步预测的均方误差矩阵式(17)构造增益矩阵,可使状态估计二次型均方误差最小;也可等价表述为,采用 k 时刻的状态估计均方误差矩阵而非估计误差协方差矩阵进行均方误差预测,并用式(25)给出的过程噪声方差对一步预测均方误差矩阵进行补偿,可使状态估计的二次型均方误差最小。

$$\mathbf{Q}_k^{\text{opt}} = -u_k (\mathbf{F} \Delta \mathbf{X}_k \mathbf{G}^T + \mathbf{G} \Delta \mathbf{X}_k^T \mathbf{F}^T) + \mathbf{G} u_k^2 \mathbf{G}^T \quad (25)$$

式(25)为使状态估计均方误差最小的最优过程噪声方差一般表达式,该过程噪声方差不仅与当前时刻的未知输入有关,还与上一时刻的状态估计确定偏差项有关。当未知输入存在,估计为有偏

时,估计误差协方差矩阵与均方误差矩阵不再等价,估计误差协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k+1} &= \mathbf{E}\{\delta\mathbf{X}_{k+1}\delta\mathbf{X}_{k+1}^T\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}^{opt}\mathbf{H})\mathbf{F}\mathbf{P}_{k/k}[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}^{opt}\mathbf{H})\mathbf{F}]^T \\ &\quad + \mathbf{K}_{k+1}^{opt}\mathbf{R}(\mathbf{K}_{k+1}^{opt})^T \end{aligned} \quad (26)$$

$k+1$ 时刻状态估计的均方误差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k+1}^{MSE} &= \mathbf{E}\{[\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}][\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} - \mathbf{X}_{k+1}]^T\} \\ &= \mathbf{P}_{k+1/k+1} + \Delta\mathbf{X}_{k+1}\Delta\mathbf{X}_{k+1}^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}^{opt}\mathbf{H})\mathbf{P}_{k+1/k}^{MSE} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}^{opt}\mathbf{H})(\mathbf{F}\mathbf{P}_{k/k}^{MSE}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_k^{opt}) \end{aligned} \quad (27)$$

式(13)、(17)、(23)、(19)、(27)和(6)构成了估计最小均方误差界和最优过程噪声方差计算的一个完整循环:状态预估、均方误差矩阵预估(含最优过程噪声方差补偿)、最优增益矩阵计算、状态估计更新、均方误差矩阵更新和状态估计偏离量计算。

该方法适用于机动目标的全运动周期:当目标无机动时,相对应的未知输入 u_k 设为 0 即可;当目标受零均值随机扰动时,过程噪声方差设定为扰动噪声方差,此时与传统的卡尔曼滤波方法相同。

4 过程噪声方差的自适应设计

根据式(25),过程噪声方差的最优值由未知输入和估计偏差量计算,但这两个量在工程使用中通常无法准确获得。在实际运用中,可依据先验信息掌握程度的不同,采用各种工程手段去获得该量的近似值,进而构造过程噪声方差以逼近最优值。本文仅给出在最不利条件下,即没有任何先验信息情况下的一种基于未知输入统计估计的过程噪声自适应设计方法。

根据式(1)可知,每个观测间隔内的未知输入就是该间隔内的加速度增量

$$u_k = \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k \quad (28)$$

由于真值无法获得,只能用估计值代替真值进行近似, $k+1$ 时刻的未知输入估计为

$$\hat{u}_k = \hat{\ddot{x}}_{k+1/k+1} - \hat{\ddot{x}}_{k+1/k} = \hat{\ddot{x}}_{k+1/k+1} - \hat{\ddot{x}}_{k/k} \quad (29)$$

该估计值并不能直接使用,因为状态估计与状态预测之差中还包含了观测噪声的影响,因此需要进行平滑,同时由于未知输入的时变特性,采用渐消记忆的指数加权法,逐渐减弱老数据对平滑结果的影响

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{1-b}{1-b^{k+1}}(\hat{u}_k - \bar{u}_{k-1}) \quad (30)$$

式中 \bar{u}_k 为最终获得的未知输入平滑估计, b 为遗忘因子,通常取值范围为 $0.9 \leq b \leq 0.995$,此处设定值为 0.95。

根据式(6)可知,估计偏差量与未知输入间存在一定的比例关系,可以表示为

$$\Delta\mathbf{X}_{k+1} = -\beta_k\mathbf{G}u_k - \beta_{k-1}\mathbf{G}u_{k-1} - \cdots - \beta_0\mathbf{G}u_0 \quad (31)$$

其中系数间有关系 $\beta_k > \beta_{k-1} > \cdots > \beta_0$,考虑到估计偏差量的累积效应,估计偏差量应约为未知输入的数十倍,即式(31)可近似等价表示为

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_{k+1} \approx \mathbf{F}\Delta\hat{\mathbf{X}}_k \approx -\beta\mathbf{G}\bar{u}_k \quad (32)$$

利用第 3 节的计算方法,根据仿真实验, β 设定为 20。将式(30)和式(32)代入式(25)可以得到最优过程噪声方差的工程实用近似式

$$\hat{\mathbf{Q}}_k^{opt} = (2\beta + 1)\bar{u}_{k-1}^2\mathbf{G}\mathbf{G}^T \quad (33)$$

由式(33)可知,当 β 取值为 20 时,加速度的过程噪声标准差约是未知输入的 7 倍,这说明由于误差累积作用,确定性未知输入导致的模型误差远大于零均值随机扰动的影响。

5 仿真分析

随着科技的不断发展,一些强机动目标(如巡航导弹、机动弹头等)的机动模式逐渐复杂,阶跃、斜坡等简单的加速度输入已不能体现其强机动特征,为此本文建立如下仿真场景:目标进行正弦方式的规避机动,初始位置、速度分别为 20 000m 和 1000m/s,加速度形式为 $a = 10\sin(t/20)$ (m/s²),其中 $t \in [0, 200]$ (s) 为仿真时间。正弦机动有如下特点:(a) 状态对时间的 n 阶导数均不为 0,且具有解析解,即采用 n 阶多项式模型描述目标运动,未知输入总是存在且是时变的;(b) 正弦加速度中的幅值和周期与当前统计模型最大加速度和机动时间常数等先验信息相对应,便于该类模型参数的设置。

假设雷达直接对位置进行观测,观测数据叠加均值为 0、标准差 $\sqrt{R} = 10$ m 的白噪声,观测间隔 $T = 0.1$ s;采用基于匀加速模型的滤波算法对该机动目标进行状态估计,相应的离散化未知输入加速度增量为 $u_k = a_{k+1} - a_k \approx (T/2)\cos(t_k/20)$ (m/s²)。目标的真实速度、加速度和加速度增量变化曲线如图 1 所示。

为验证本文提出的估计最小均方误差界计算方法和基于未知输入估计的过程噪声方差自适应设计方法的有效性,采用机动目标跟踪领域应用最为广泛的基于 CS 模型的自适应滤波算法和基于 CA 模型的 IMM 滤波算法^[16],滤波结果与本文算法结果进行比较。上述两种算法的本质均为以匀加速模型为状态预测模型,通过自适应调整过程噪声方差实现对机动目标的稳定跟踪。

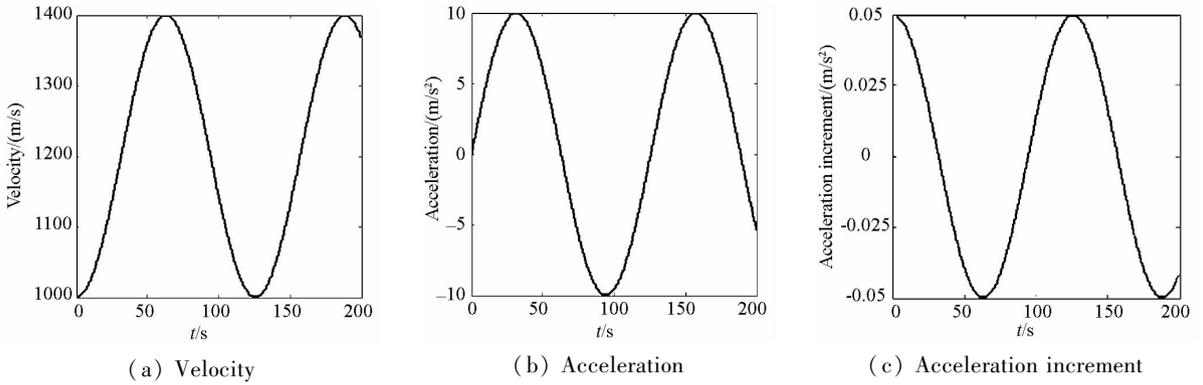


图1 真实的速度、加速度和加速度增量

Fig. 1 True data of velocity, acceleration and acceleration increment

CS 模型算法参数设置:最大加速度 $a_{\max} = 12\text{m/s}^2$, 机动时间常数 $T_m = 20\text{s}$ 。

IMM 算法设置:采用三个匀加速模型,每个模型对应不同的过程噪声方差 GQG^T 。根据本文第3节算法的计算结果,可获得过程噪声加速度项方差的变化范围 $Q_{33} \in [0, Q_{33, \max}]$,按文献[17]的方法将过程噪声水平分别设置为 $Q = (\sqrt{Q_{33, \max}}/6)^2$ 、 $(\sqrt{Q_{33, \max}}/2)^2$ 和 $(5\sqrt{Q_{33, \max}}/6)^2$ (m^2/s^4)。转移概率矩阵采用对角线元素占优的形式,设置为

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{bmatrix}$$

每一行元素和为1,对

角线元素一般在 $[0.8, 0.99]$ 取值,该值较大时具有较高的稳态估计精度,较小时则具有较快的响应,由于仿真算例没有突变机动,对角线元素取较大的值,以侧重提高稳态估计精度;在没有任何先验信息的条件下,每个模型的初始概率应是相等的,因此均设置为 $1/3$ 。

本文提出的工程算法(以下简称 Adp)设置:状态模型采用匀加速模型,过程噪声方差由第4节实时计算。

滤波初始参数设置:采用三点观测数据 y_1 、 y_2 和 y_3 构造滤波初始参数,滤波初值为 $\hat{X}_{0/0} =$

$$\begin{bmatrix} y_3 & \frac{y_3 - y_2}{T} & \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{T^2} \end{bmatrix}^T$$

, 初始协方差矩阵

$$P_{0/0} = \begin{bmatrix} R & \frac{R}{T} & \frac{R}{T^2} \\ \frac{R}{T} & \frac{2R}{T^2} & \frac{3R}{T^3} \\ \frac{R}{T^2} & \frac{3R}{T^3} & \frac{6R}{T^4} \end{bmatrix}$$

分别采用上述三种实际工程应用的滤波算法进行机动目标的状态估计, Monte Carlo 仿真 500 次,获得估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE),与本文算法计算的最小均方根误差界进行比较,一方面验证本文算法结果的正确性(为该类算法提供一个估计误差的下界),另一方面对上述滤波算法的性能进行评估。图2给出了4种算法的位置、速度和加速度估计 RMSE 曲线。其中 Opt 为本文计算的估计最小均方根误差界,CS 为当前统计模型结果,IMM 为交互多模型算法结果,Adp 是本文提出的工程算法结果。图3为本文最小均方根误差估计所对应的状态估计确定性偏离量曲线。图4为本文计算的最优过程噪声位置、速度和加速度项标准差变化曲线。图5为 IMM 算法 500 次仿真的平均模型概率曲线, Mp1、Mp2 和 Mp3 分别为第一、二和三个模型的平均模型概率。

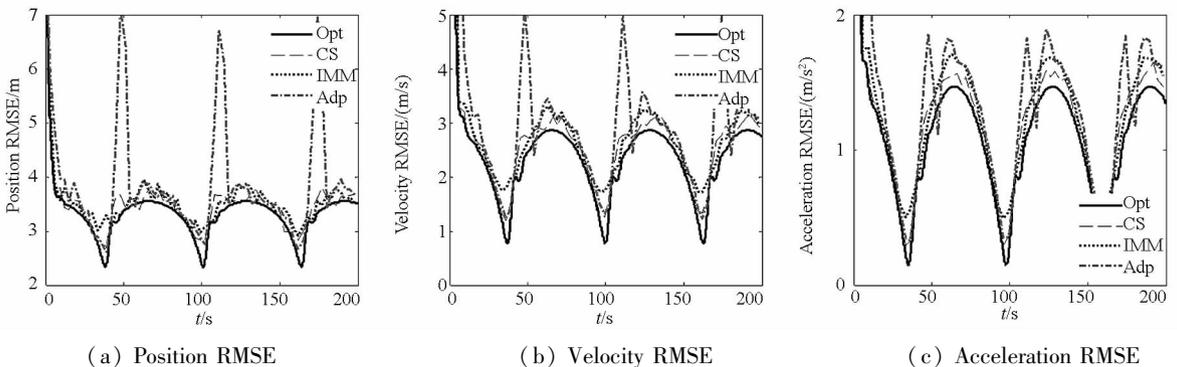


图2 位置、速度和加速度估计 RMSE 曲线

Fig. 2 Estimated RMSEs of position, velocity and acceleration

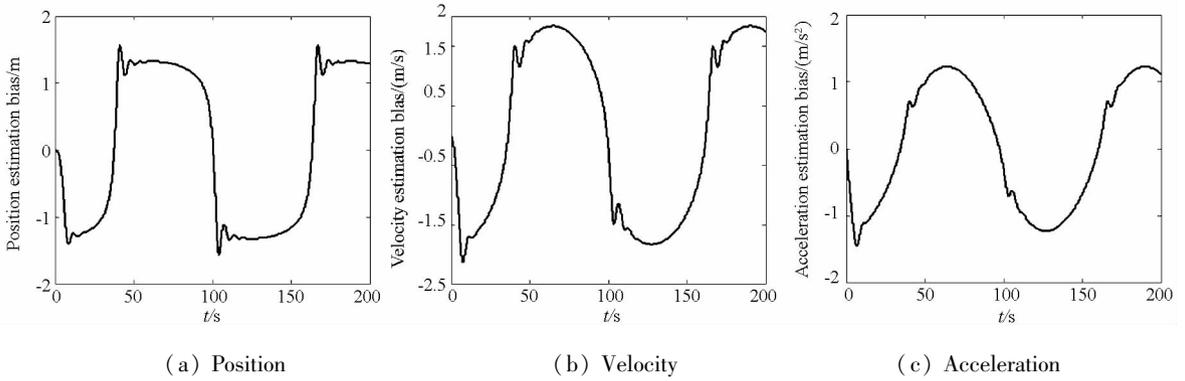


图 3 最小均方误差估计对应的估计偏差量
Fig. 3 Estimated deviation of MMSE estimation

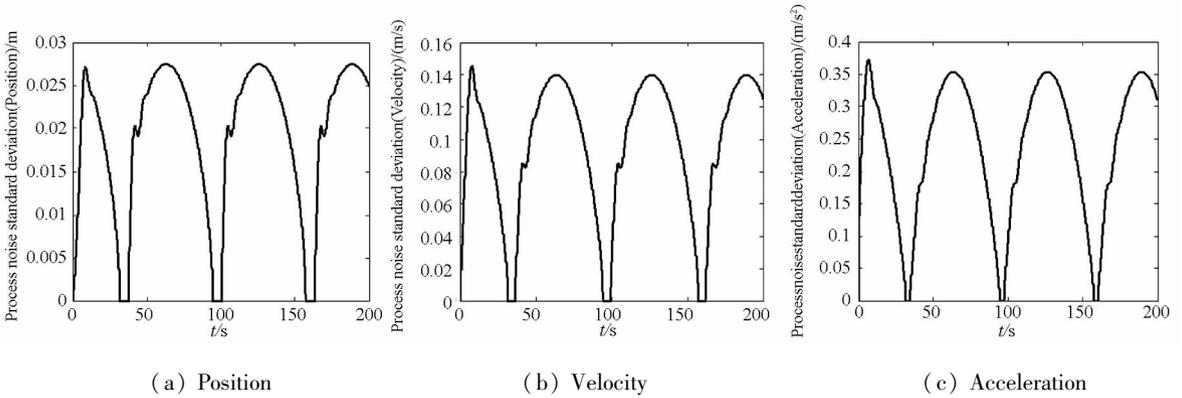


图 4 最小均方根误差估计对应的过程噪声标准差
Fig. 4 Process noise standard deviation of MMSE estimation

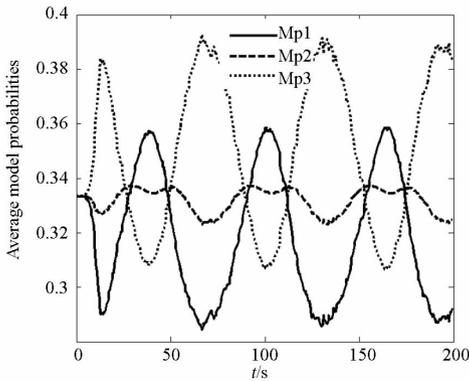


图 5 IMM 算法的平均模型概率

Fig. 5 Average model probabilities in IMM algorithm

由图 2 ~ 图 5 可以看出:(a) 估计 RMSE 与未知输入加速度增量 u_k 的变化相对应,呈周期变化趋势,但整体比 u_k 变化滞后,且 RMSE 的增加段和减小段并不对称,增加段明显具有震荡特性,这就说明在实际跟踪中目标作加速度渐增的机动时,估计精度较加速度渐减时要低;(b) 当滤波器参数设置合理时,CS 模型算法具有较好的估计精度, RMSE 基本逼近了本文计算的下界,但当 u_k 较小和加速度渐增时, RMSE 与下界相比有所增大;(c) IMM 算法采用了本文计算的最优过程噪声方差结果构造过程噪声,结果表明设置是合理

的,估计 RMSE 也逼近了本文计算的估计下界,精度与 CS 模型算法相当,这同时说明了本文计算的最小均方根误差界和相应的最优过程噪声方差是正确的;(d) 图 5 也从模型概率的角度证明了 IMM 参数设置的合理性,IMM 三个模型达到了预期作用,当 u_k 过小和过大时,模型 1 和 3 分别占优;(e) 本文提出的 Adp 方法不需要任何先验信息,除加速度突增阶段由于统计估计的延迟造成 RMSE 增大外,也具有较高的估计精度,逼近了估计的最小均方误差界,验证了本文所提工程算法的实用性。由于缺少先验信息支持,响应特性低于 CS 和 IMM 算法;(f) 本文 CS 和 IMM 算法的参数设置均采用了准确的先验信息,代表了实际跟踪过程中的“最好”估计结果,均逼近但大于本文计算的最小均方根误差界。一方面说明了本文计算的最小均方根误差界的正确性,可以用本文理论计算结果对该类算法的估计效果进行评价,而不需要采用 Monte Carlo 仿真,另一方面也说明如果参数设置合理,该类算法的估计精度已接近极限,若要进一步提高精度,则需建立更为精确的状态方程。(g) 位置、速度和加速度的估计 RMSE 和偏离量在数值上均相差不大,这与采用式(20)类型的均方误差函数有关,因为三者是等

权重的,考虑到三者自身大小的量级,实际上采用卡尔曼滤波对三者的估计相对精度是依次降低的。

针对该仿真算例,分别计算采用匀速(Constant Velocity, CV)模型、匀加速模型和匀加加速(Constant Jerk, CJ)模型作为状态方程的最小均方误差估计,获得的位置、速度估计 RMSE 下界如图 6 和图 7 所示。

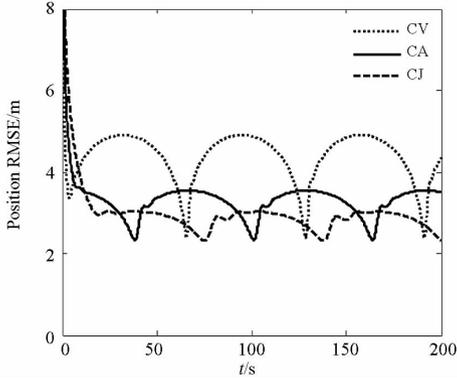


图 6 不同状态方程的位置估计 RMSE 下界

Fig. 6 Position RMSE bounds of different equations

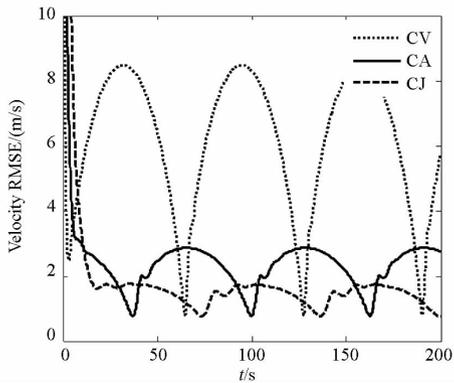


图 7 不同状态方程的速度估计 RMSE 下界

Fig. 7 Velocity RMSE bounds of different equations

从图 6 和图 7 可以看出:(a) 由于仿真算例采用正弦机动,实际运动模型阶数为无穷大,因此随着状态方程阶数增大,模型截断误差减小,估计精度从整个飞行过程来看得到提高,但提高的效果逐渐不明显,考虑到机动飞行目标的动力学特征、滤波的运算效率和响应特性等,CA 和 CJ 模型应是机动目标跟踪中经费比最高的模型;(b) 高阶模型并不意味着估计结果在每个点 RMSE 都是最小的,当目标实际运动与低阶模型匹配时(通常该阶段持续时间较短但存在),低阶模型的估计精度要高于高阶模型,因此估计精度取决于模型与目标运动的匹配度而不是模型阶数,只是对于强机动目标,高阶模型与实际运动近似匹配的时间更长,因此其估计结果是一种“整体”最优

性,这就说明对于处于不同运动模式的机动目标,采用多模型算法可以进一步提高估计精度。

6 结论

(1) 对于具有确定性机动的目标,利用多项式模型描述其运动通常存在截断误差,其本质是一类存在未知输入系统,确定的时变的未知输入存在,导致该类目标的状态估计为有偏估计。

(2) 基于状态估计均方误差最小的准则,推导了机动目标跟踪最优过程噪声方差的表达式,并构建了状态和均方误差矩阵估计的递推卡尔曼滤波算法,计算获得相应多项式模型滤波算法的估计最小均方误差界,以及使状态估计均方误差最小的过程噪声方差变化规律,为各种基于多项式模型的机动目标跟踪工程算法提供了统一的评估标准,也为实际机动目标跟踪中过程噪声方差的设定提供了依据。

(3) 对于有偏估计的卡尔曼滤波,使估计均方误差最小的过程噪声水平由当前时刻的状态估计偏离量和未知输入共同决定,通常是未知输入大小的数倍或数十倍。该结论可为实际跟踪过程中过程噪声的设置提供参考。

(4) 对于 CS 模型滤波算法和基于 CA 模型的 IMM 算法,当参数设置合理时,该类算法的估计精度已接近 CA 模型算法的极限,若要进一步提高精度,则需建立更为精确的状态方程。

(5) 基于本文的最优过程噪声方差理论公式提出了一种基于未知输入估计的过程噪声自适应设计方法,仿真结果验证了方法的有效性和实用性。

(6) 估计精度取决于模型与目标运动的匹配度而不是模型阶数,对于通常的机动飞行目标, CV 模型简单但具有较大的模型误差,CA 和 CJ 模型是经费比最高的模型,更高阶模型过于复杂且精度提高幅度有限。

(7) 本算法不仅限于机动目标跟踪领域,对于一切存在未知时变确定性输入系统的状态估计均适用;也可以扩展到三维机动目标跟踪的情况。

参考文献 (References)

- [1] Singer R A. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1970, 6(4): 473-483.
- [2] Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking: dynamic models [C]//Proceedings 2000 SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, Orlando, Florida, USA, 2000, 4048: 212-235.
- [3] Mehrotra K, Mahapatra P R. A jerk model to tracking highly

- maneuvering targets[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(4):1094 - 1105.
- [4] Zhou H R, Kumar K S P. A current statistical model and adaptive algorithm for estimating maneuvering targets [J]. AIAA Journal, Guidance Control and Dynamics, 1984, 7(5): 596 - 602.
- [5] 钱华明, 陈亮, 杨峻巍. 基于 AR 模型的非线性目标跟踪自适应算法[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2012, 40(9): 52 - 56.
QIAN Huaming, CHEN Liang, YANG Junwei. Adaptive algorithm of nonlinear target tracking based on AR model[J]. Journal Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2012, 40(9): 52 - 56. (in Chinese)
- [6] Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics [C]//Proceedings of Joint Automatic Control Conference, Boulder Colorado, USA; 1969, 760 - 769.
- [7] Kirilin R L, Moghaddamjoo A. Arobust running window detector and estimator for step signals in contaminated Gaussian noise[J]. IEEE Transactions on ASSP, 34(4):816 - 823.
- [8] Sinha A, Kirubarajan T, Bar-Shalom Y. Application of the kalman-levy filter for tracking maneuvering targets [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(3): 1099 - 1107.
- [9] Chan Y T, Hu A G, Plant J B. A kalman filter based tracking scheme with input estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1989, 15(2):237 - 244.
- [10] Li X R, Jilkov V P, Ru J F. Multiple-model estimation with variable structure-part VI: expected-mode augmentation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(3): 853 - 867.
- [11] 周政, 刘进忙. 基于强跟踪滤波器的 MACA-MIE 模型及跟踪算法[J]. 控制与决策, 2013, 28(1): 100 - 104.
ZHOU Zheng, LIU Jinmang. MACA-MIE model and tracking algorithm based on strong tracking filter [J]. Control and Decision, 2013, 28(1): 100 - 104. (in Chinese)
- [12] Tichavsky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior cramer-rao bounds for discrete-time nonlinear filtering [J]. IEEE Transactions on Signal Process, 1998, 46(5):1386 - 1396.
- [13] Farina A, Ristic B, Benvenuti D. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(3): 855 - 867.
- [14] 占荣辉, 郁春来, 辛勤. 机动目标跟踪误差 CRLB 计算与分析[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(5):90 - 94.
ZHAN Ronghui, YU Chunlai, XIN Qin. CRLB calculation and analysis for maneuvering target tracking [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2007, 29(5):90 - 94. (in Chinese)
- [15] Lei M, Barend J W, Qi Y. Online estimation of the approximate posterior cramer-rao lower bound for discrete-time nonlinear filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(1):37 - 57.
- [16] Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking. Part V: multiple-model methods[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(4): 1255 - 1321.
- [17] Li X R, Zhao Z L, Li X B. General model-set design methods for multiple-model approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(9): 1260 - 1276.