

# 应用于四旋翼无人机角速度估计的几何滑模观测器设计\*

安宏雷, 李杰, 王剑, 王建文, 马宏绪  
(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**对四旋翼无人机的角速度进行估计时,传统的基于单位四元数的滑模观测器需要引入强制比例重调,因而影响了跟踪精度。提出一种基于数值积分的李群方法的滑模观测器设计框架。该算法基于等变映射思想,在齐性流形空间的等价李代数空间中设计滑模反馈,从而避免了直接在流形空间中设计反馈的复杂性,并消除了传统方法在每个积分步骤中强制加入的比例重调,提高了观测器的跟踪性能。仿真结果表明,几何滑模观测器算法可以有效地对四旋翼无人机的角速度进行估计。

**关键词:** 几何滑模; 观测器; 四旋翼无人机; 角速度估计

**中图分类号:** TP139 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2013)06-0165-06

## Geometric sliding mode observer design with application to angular velocity estimation of quadrotor UAV

AN Honglei, LI Jie, WANG Jian, WANG Jianwen, MA Hongxu

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Traditional quaternion-based sliding mode observer for angular velocity estimating has to introduce the process of mandatory rescaling which affects the tracking performance of the observer algorithm. In this work, a sliding mode observer design framework is proposed, based on the Lie group method of numerical integration on manifolds for angular velocity estimation of quadrotor attitude. The algorithm constructs sliding mode feedback in the space of equivalent Lie algebra of homogeneous manifolds on the basis of equivariant mapping ideological. It avoids the complexity of constructing sliding mode feedback in homogeneous space directly, and eliminates the process of mandatory rescaling which is required by the traditional methods in each integration step. The simulation results show that the algorithm of geometric sliding mode observer is effective.

**Key words:** geometric sliding mode; observer; quadrotor UAV; angular velocity estimation

姿态控制在飞行器、卫星和水下机器人控制等领域中都有非常重要的应用<sup>[1-5]</sup>。以四旋翼无人机的为例,由于飞行器的欠驱动特性,位置外环通常在姿态内环的基础上实现<sup>[6-7]</sup>,因此姿态控制的性能对飞行器的性能有着重大影响。

多数姿态控制算法都需要姿态和角速度信息,这些信息的测量通常结合了多种传感器,并通过估计技术得到。然而建造微小型系统(如微型四旋翼飞行器,小型卫星等)的趋势下,受限于成本和体积的限制,通常将角速度测量设备取消<sup>[9-10]</sup>。

滑模观测器利用非光滑反馈,可以对带匹配干扰的系统进行状态估计<sup>[8-9]</sup>。同时,相比较传统的EKF滤波器,滑模观测器的计算负担更小。

在姿态和角速度估计算法中,姿态表示是一个基础性问题<sup>[13-14]</sup>。姿态的最小坐标表示,如欧拉角、罗德里格斯参数、改进的罗德里格斯参数

等,通常会遇到几何奇异性问题(运动学奇异)。单位四元数是近年来被广泛使用的姿态表示方法,是使用最小可能数目的元素对姿态流形进行全局表示的方法。相比较传统的姿态矩阵,单位四元数的群运算和微分算法都更加简单。

传统基于单位四元数表示的观测器设计方法通常将单位四元数作为代数工具使用,而没有考虑单位四元数的几何结构。然而,在基于单位四元数表示的运动学方程构造的观测器中使用传统的数值积分方法(欧拉法、RK方法等)无法保持流形结构,也就是说,每一个离散步骤得到的下一时刻的积分结果并不处于原始流形上,而必须额外加入比例重调的过程。由于比例重调的过程是强制加入的,因此会降低观测器的跟踪性能。为了解决这个问题,基于单位四元数空间是一个李群这一事实,本文将数值积分的李群方法应用到基于单位四元数表示的滑模观测器的设计中,给

\* 收稿日期:2013-03-06

作者简介:安宏雷(1983—),男,天津人,博士研究生,E-mail:eirc\_nudt@163.com;

王剑(通信作者),男,讲师,博士,E-mail:jianwang2318a@163.com

出了实现单位四元数流形上的滑模观测器的数值方法。通过将流形上的微分方程与其李代数上的微分方程等价,首先在李代数空间(等价  $R^3$  空间)中设计反馈,然后将李代数空间中的演化量变换到流形空间中,最后计算流形在下一时刻的估计值。

因此本文的主要贡献为:(1)基于数值积分的李群方法,提出了一种滑模观测器设计框架。在此框架中,反馈在向量空间中构建,因此避免了强制的比例重调过程。(2)设计了二阶几何滑模姿态观测器,使用单位四元数表示的姿态信息对角速度进行估计。

## 1 四旋翼无人机动力学模型

### 1.1 单位四元数运动学

定义:一个单位四元数  $q$  是一个模为一的复数,可以被看作单位球面  $S^3$  上的点:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (1)$$

其中  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ 。

令  $\tilde{q}$  表示其向量部分,即  $\tilde{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ , 则单位四元数可写为下面的形式

$$q = (q_0, \tilde{q}) \quad (2)$$

给定一个单位四元数,该单位四元数与旋转变换有如下对应关系:

$$R(q_0, \tilde{q}) = (q_0^2 - \tilde{q}^T \tilde{q})I + \dots + 2q_0S(\tilde{q}) + 2\tilde{q}\tilde{q}^T \quad (3)$$

其中

$$S(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

注意到,  $R(q_0, \tilde{q}) = R(-q_0, -\tilde{q})$ , 因此单位四元数表示的单位球面  $S^3$  是  $SO(3)$  的双覆盖。使用单位四元数的角度形式将更清楚地看到这一问题。欧拉定理表明,空间中任意一个旋转变换都可以通过绕一个特征轴  $n$  (单位矢量) 旋转一个角度  $\theta$  得到,该变换对应的单位四元数为:

$$q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)n) \quad (5)$$

$\theta \in [0, 2\pi]$

可以直观地看到,一个绕一个特征轴  $n$  旋转一个角度  $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  的变换总可以通过绕特征轴  $-n$  反向旋转  $2\pi - \theta$  实现。

给定两个单位四元数  $q_1 = (q_{10}, \tilde{q}_1)$  和  $q_2 = (q_{20}, \tilde{q}_2)$ , 定义单位四元数乘法  $\otimes$ :

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} q_{10}q_{20} - \tilde{q}_1^T \tilde{q}_2 \\ q_{10}\tilde{q}_2 + q_{20}\tilde{q}_1 + S(\tilde{q}_1)\tilde{q}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

单位四元数乘法与旋转矩阵乘法是等价的。

若  $q_1$  和  $q_2$  分别对应  $SO(3)$  中的旋转矩阵  $R_1$  和  $R_2$ , 有如下对应关系:

$$\begin{aligned} R_1 R_2 &\leftrightarrow \pm q_1 \otimes q_2 \\ R_1 v &\leftrightarrow q_1 \otimes \bar{v} \otimes q_1^* \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\bar{v} = (0, v)$ 。

单位四元数的时间导数由四元数传导法则 (quaternion propagation rule) 给出:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \bar{\omega} \quad (8)$$

### 1.2 系统模型

为了建立四旋翼飞行器系统的动力学方程,必须首先建立坐标系。本文使用两个坐标系,即惯性坐标系和体坐标系。如图 1 所示,体坐标系  $O_b - X_b Y_b Z_b$  中心位于飞行器十字梁的交叉处,  $X$  轴方向指向一号螺旋桨,  $Z$  轴方向垂直十字梁平面,  $Y$  轴与  $Z$  轴和  $X$  轴成右手坐标系。

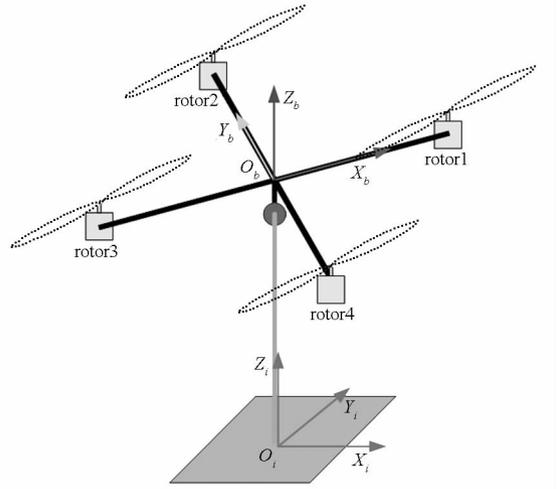


图 1 四旋翼飞行器坐标系

Fig. 1 Coordinate frames of quadrotor

四旋翼飞行器动力学模型的建立基于两个假设:

(1) 飞行器除螺旋桨高速旋转外,其余均固连在一起,而螺旋桨质量很轻可以忽略不计,因此假设飞行器机体是一个刚体;

(2) 其次,不考虑飞行器机构设计和安装的微小误差,认为飞行器机体是对称分布的。

基于刚体假设,可以基于牛顿-欧拉方程和四元数运动学建立下面的数学模型:

$$J\dot{\omega} = M - \omega \times (J\omega) \quad (9a)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} (q_0 I + S(\tilde{q})) \omega \\ \dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \tilde{q}^T \omega \end{cases} \quad (9b)$$

模型中  $q = [q_0 \quad \tilde{q}^T]^T$  表示体坐标系的姿态

四元数,  $w$  为体坐标系下的角速度,  $M$  则表示飞行器受到的合外力矩。

由第二个假设, 四旋翼飞行器四个螺旋桨的推力  $f_i (i=1,2,3,4)$  与在机体坐标系下表示的等效推力  $f$  和力矩  $M_i (i=1,2,3)$  有如下关系:

$$\begin{bmatrix} f \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d & 0 & -d \\ -d & 0 & d & 0 \\ -c_{\tau f} & c_{\tau f} & -c_{\tau f} & c_{\tau f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中,  $d$  为螺旋桨距十字中心的距离,  $c_{\tau f}$  为螺旋桨的力矩\推力比率。

我们的模型中没有包含低速下为微小量的空气动力项,  $M$  只包含了三轴控制力矩  $M_1, M_2, M_3$ , 即

$$M = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T \quad (11)$$

## 2 滑模角速度观测器设计的李群方法

单位四元数空间是一个非线性流形  $S^3$ , 在  $S^3$  流形上直接使用经典的数值积分方法无法保守原始流形的初始结构, 因此必须加入比例重调过程。为了解决这个问题, 参考文献[18-19]基于等变映射的思想, 将齐性流形上的微分方程变换为李代数上的等价微分方程。在等价李代数空间中设计增量, 并进而获得流形空间中的积分。基于这一思想, 本文为四旋翼无人机设计了用于角速度估计的几何滑模观测器。

### 2.1 数值积分的李群方法

作为观测器设计的基础, 本节给出数值积分的李群方法的主要思想, 更详细的内容参考文献[18-19]。

**定义1** (等变映射) 令  $M$  和  $N$  为两个流形, 并令  $G$  为作用在  $M$  和  $N$  上的李群, 其中  $G$  在  $M$  上的作用为  $\Phi_g: M \rightarrow M$ ,  $G$  在  $N$  上的作用为  $\Psi_g: N \rightarrow N$ 。如果光滑映射  $f: M \rightarrow N$  满足

$$f \circ \Phi_g = \Psi_g \circ f \quad (12)$$

则称  $f$  为相对于  $\Phi_g$  和  $\Psi_g$  的等变映射。

图2给出了更直观的等变映射满足的变换关系

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Phi_g \uparrow & & \uparrow \Psi_g \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

图2 流形上的等变映射

Fig.2 Equivariant map on manifolds

由流形上的李群作用  $\Phi: G \times M \rightarrow M$ , 对于每个  $g \in$

$G$  和  $m \in M$ , 令  $\Phi_g: M \rightarrow M$  表示光滑映射  $m \rightarrow \Phi(g, m)$ ,  $\Phi_m: G \rightarrow M$  表示光滑映射  $g \rightarrow \Phi(g, m)$ 。则  $\Phi_m: G \rightarrow M$  是相对于  $G$  的左变换  $L_g$  和光滑映射  $\Phi_g$  的等变映射

$$\Phi_m \circ L_g = \Phi_g \circ \Phi_m \quad (13)$$

令  $f: g \rightarrow G$  为  $G$  上的光滑可逆局部坐标映射, 通常为指数映射  $\exp$ 。这里, 通过构造李代数  $g$  上的左作用  $B_g$  使

$$f \circ B_g = L_g \circ f \quad (14)$$

成立, 这样  $f$  就是相对于作用  $B_g$  和李群  $G$  上的作用  $L_g$  的等变映射。

当  $f$  为指数映射时,  $B_g$  就是著名的 Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式

$$B_g(u) = \log(g \cdot \exp(u)) \quad (15)$$

其中  $\log$  为对数映射。

由于等变映射的合成仍为等变映射, 可以构造相对于李代数上的作用  $B_g$  和光滑映射  $\Phi_g$  的等变映射  $\Phi_m \circ f: g \rightarrow M$ 。

$$\begin{array}{ccccc} g & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{\Phi_m} & M \\ B_g \uparrow & & \uparrow L_g & & \uparrow \Phi_g \\ g & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{\Phi_m} & M \end{array}$$

图3 李代数空间和流形之间的复合等变映射

Fig.3 Composition equivariant map between manifold and Lie algebra space

**定义2** (向量场的相关性) 令  $\phi: M \rightarrow N$  为流形间的光滑映射,  $X$  和  $Y$  分别是  $M$  和  $N$  中的向量场, 如果  $T\phi \circ X = Y \circ \phi$ , 则称  $X$  和  $Y$  是  $\phi$  相关的, 表示为  $X \sim \phi Y$ 。

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\phi} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

图4 向量场的相关性

Fig.4 Relatedness of vector fields

**定理1** 如果  $\phi$  是一个相对于无穷小生成元  $\xi_M$  和  $\xi_N$  对应的流  $\Phi_{\exp(t\xi_M)}$  和  $\Psi_{\exp(t\xi_N)}$  的等变映射, 则无穷小生成元  $\xi_M$  和  $\xi_N$  是  $\phi$  相关的。

前面已经提到, 光滑映射  $\Phi_m: G \rightarrow M$  和  $f: g \rightarrow G$  的合成  $\Phi_m \circ f: g \rightarrow M$  是相对于李代数上的作用  $B_g$  和光滑映射  $\Phi_g$  的等变映射, 则由定理1可知,  $g$  上流  $B_g$  的无穷小生成元  $\xi_g$  和  $M$  上流  $\Phi_g$  的无穷小生成元  $\xi_M$  是  $\Phi_m \circ f$  相关的, 即有

$$\xi_M \circ \Phi_m \circ f = T\Phi_m \circ Tf \circ \xi_g \quad (16)$$

空间变换关系如图 5 所示。

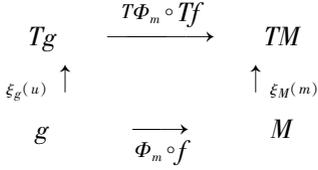


图 5 流形和李代数及其向量场之间的变换关系

Fig. 5 Transform relations between manifold, Lie algebra, and their vector fields

通常,流形上的微分方程为

$$\dot{y} = \xi_M(y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\exp(t \cdot \xi(s, y)), y) \quad (17)$$

初始状态为  $y_0 = \Phi_{y_0} \circ f(0) \in M$ 。由于  $g$  上无穷小生成元  $\xi_g$  和  $M$  上无穷小生成元  $\xi_M$  是  $\Phi_m \circ f$  相关的,  $M$  上的微分方程可以通过选择  $\xi_g$  变换为  $g$  上的等价系统。这样,流形  $M$  上的微分方程的求解就可以通过首先求解李代数  $g$  上的微分方程,然后再通过  $\Phi_m \circ f$  映射得到流形中的解。

单位四元数运动学的微分方程可以重写为

$$\dot{\mathbf{q}} = A(\mathbf{w})\mathbf{q} \quad (18)$$

因此,单位四元数空间为齐性空间,其微分方程的解为

$$Y(t) = \exp(A(\mathbf{w}(t))) \cdot Y_0 \quad (19)$$

其中  $A(\mathbf{w}(t))$  满足下面的微分方程

$$\dot{A}(\mathbf{w}(t)) = \text{dexp}_{A(\mathbf{w}(t))}^{-1}(\Omega(t)) \quad (20)$$

注意,  $\text{dexp}_{A(u)}^{-1}(v)$  对应着前述变换中的  $\xi_v(u)$ 。

## 2.2 凯莱映射(Cayley map)

上述积分求解的连续形式使用指数映射,但在数值积分算法中无法精确得到指数映射的值,其精度决定了数值算法的阶数。但在观测器设计中,由于反馈保证了算法的收敛,因此一定程度的数值误差是可以接受的。另一方面,考虑到高精度的数值计算需要耗费更多的机器时间,而观测器的运行速度则越快越好,因此使用凯莱映射代替指数映射。

凯莱映射  $\text{cay}: g \rightarrow G$  定义为

$$\text{cay}(u) = \frac{1+u/2}{1-u/2} \quad (21)$$

李代数空间中对应的向量场的计算方法为

$$\text{dcay}_u^{-1}(v) = v - \frac{1}{2}[u, v] - \frac{1}{4}u \cdot v \cdot u \quad (22)$$

其中  $[\cdot, \cdot]$  为李括弧运算。

## 2.3 几何滑模观测器设计

设计几何滑模观测器目标是在仅有单位四元数表示的姿态测量  $\mathbf{q}$  情况下,使用观测器算法获

得角速度的估计值  $\hat{\mathbf{w}}$ 。

为了避免传统基于单位四元数的观测器算法的缺点,即直接在单位四元数空间中构造反馈和使用强制比例重调,本文提出在数值积分的李群方法框架下,在李代数空间(向量空间)中引入反馈,而不是直接在流形中引入反馈,构造滑模观测器。

### 2.3.1 定义姿态误差

真实姿态和姿态的估计变量之间的误差定义为:

$$\mathbf{q}_e \triangleq \mathbf{q}^* \otimes \hat{\mathbf{q}} \quad (23)$$

根据误差定义,当观测值与实际姿态相同时,即  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$  时,  $\mathbf{q}_e = 0$ ; 而当  $\hat{\mathbf{q}} \neq \mathbf{q}$  时,  $\mathbf{q}_e = \sin(\theta/2)\mathbf{n}$ , 表示沿三维空间轴  $\mathbf{n}$  旋转  $\theta$ 。因此,将  $\mathbf{q}_e$  当做反馈变量。

### 2.3.2 构造等价李代数空间中的滑模观测器

姿态平台上的四旋翼飞行器模型已经在第一节建立了,其中四旋翼飞行器的运动学由单位四元数的演化律给出

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \quad (24)$$

对应的等价李代数空间中表示的微分方程为

$$\dot{\xi} = \text{dcay}_{\xi}^{-1}(A(\mathbf{w})) \quad (25)$$

其中

$$A(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & -w_2 & -w_1 \\ w_3 & 0 & w_3 & -w_2 \\ w_2 & -w_3 & 0 & w_1 \\ w_1 & w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

在李代数空间中构造滑模观测器

$$\dot{\xi} = \text{dcay}_{\xi}^{-1}\{A[\hat{\mathbf{w}} - k_1 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{q}}_e)]\} \quad (27)$$

姿态平台上的四旋翼飞行器模型的动力学方程为

$$I\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M} - \mathbf{w} \times (I\mathbf{w}) \quad (28)$$

则构造滑模观测器为

$$I\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{M} - \hat{\mathbf{w}} \times (I\hat{\mathbf{w}}) - k_2 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{q}}_e) \quad (29)$$

### 2.3.3 计算流形上的等价积分

由等价李代数空间中连续形式的观测器,根据数值积分的李群方法,可以得到离散形式的几何滑模观测器

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}(+)=\text{cay}(A(\hat{\xi}))\hat{\mathbf{q}}(-) \\ \hat{\xi}(+)=\hat{\xi}(-)+\dots \\ \dots+h \cdot \text{dcay}_{\xi}^{-1}\{A[\hat{\mathbf{w}}-k_1 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{q}}_e)]\} \\ \hat{\mathbf{w}}(+)=\hat{\mathbf{w}}(-)+\dots \\ \dots+h \cdot [\mathbf{M}-\hat{\mathbf{w}} \times (I\hat{\mathbf{w}})-k_2 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{q}}_e)] \end{cases} \quad (30)$$

其中  $h$  为观测器积分步长。

需要注意的是,等变映射为瞬时等效,即在每个步长的变化量计算时等效,因此等价李代数空间中的积分总是从零开始积分。

观测器中非连续反馈的使用将导致震颤效应。虽然观测器中的震颤仅存在于数值计算中(相比较控制器的情形),不会对系统造成破坏,但为了使用估计的角速度信息,需要增加低通滤波器。

### 3 仿真

仿真在 MATLAB/Simulink 环境中实现。给定四旋翼无人机的惯性参数为

$$J = \text{diag}(8.942 \quad 9.458 \quad 7.787) \times 10^{-3}$$

指定初始状态为

$$q(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$w(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

和施加的力矩

$$M = 0.01 \times [\sin(t) \quad \sin(t) \quad 0]$$

仿真得到平台运行轨迹如图 6 和图 7(包括姿态轨迹和角速度轨迹)。以间隔 0.02s 获取采样数据。

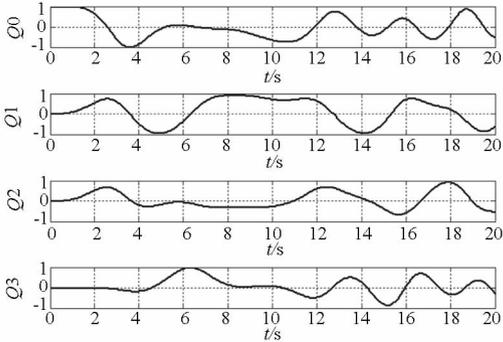


图 6 平台姿态轨迹

Fig. 6 Attitude curve of platform

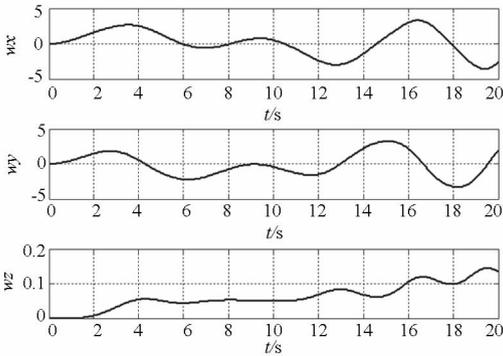


图 7 平台角速度轨迹

Fig. 7 Angular velocity curve of platform

设定估计算法步长为 0.01s,运行几何滑模观测器算法,获得四旋翼飞行器的角速度估计如图 8。

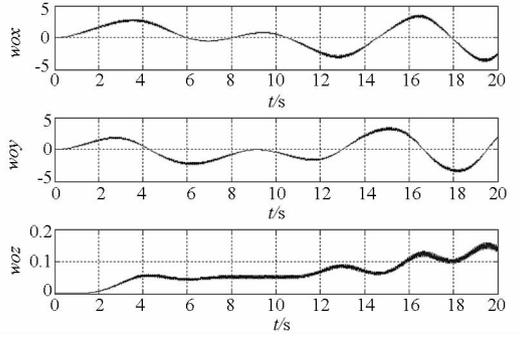


图 8 观测器得到的角速度估计

Fig. 8 Estimated angular velocity

图 9 给出了滤波处理后角速度的估计值(实线)与平台原始数据(虚线)的比较。仿真结果表明跟踪效果良好。

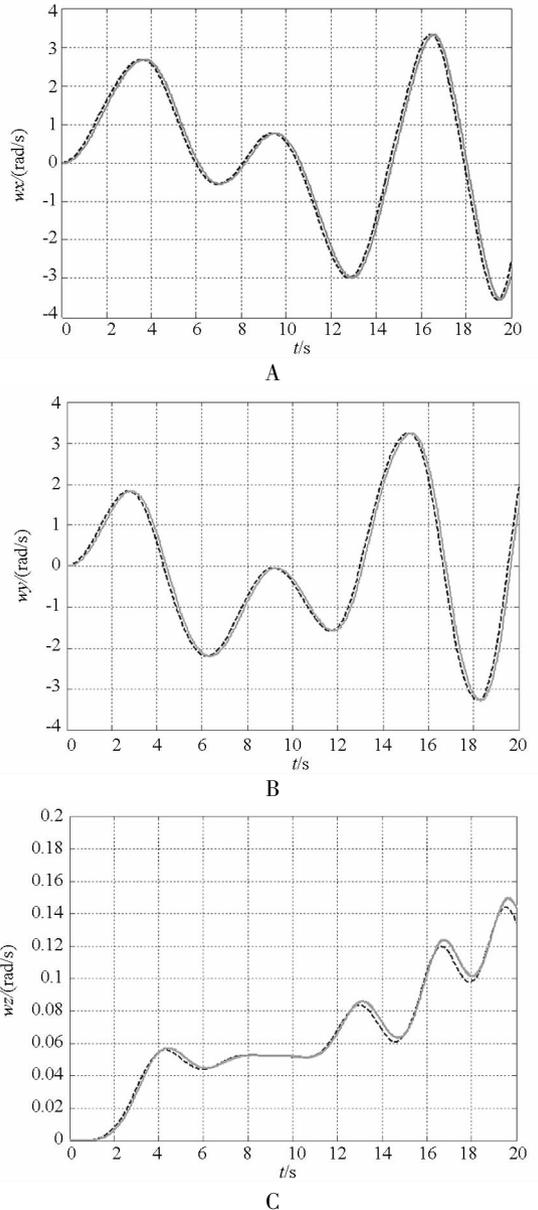


图 9 角速度观测数据与原始数据的比较 (A、B、C 分别为沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的角速度)

Fig. 9 Comparison between measurement data and estimated data

## 4 结论与展望

针对四旋翼无人机的角速度估计问题,提出一种基于流形上数值积分的李群方法的滑模观测器设计框架。该算法基于等变映射思想,在齐性流形空间的等价李代数空间中设计滑模反馈,从而避免了直接在流形空间中设计反馈的复杂性,并消除了传统方法在每个积分步骤中强制加入的比例重调。仿真结果表明,几何滑模观测器算法有效且易于实现。

## 参考文献 (References)

- [1] Ahmed R, Gu D, Postlethwaite I. A case study on spacecraft attitude control[C]//Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference, Shanghai, 2009: 7345-7350.
- [2] Zhang R, Quan Q, Cai K. Attitude control of a quadrotor aircraft subject to a class of time-varying disturbances[J]. IET Control Theory and Applications, 2011, 5(9): 1140-1146.
- [3] Inoue A, Deng M, Harima T, et al. Attitude control system design of a helicopter experimental system [C]//IEEE International Conference on Industrial Technology, 2005: 1240-1245.
- [4] Horri N M, Palmer P L, Roberts M R. Optimal satellite attitude control; a geometric approach [C]//Aerospace conference, IEEE, 2009: 1-11.
- [5] Wen J T, Kreutz-Delgado K. The attitude control problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36(10): 1148-1162.
- [6] Fang Z, Wang X, Sun J. Design and nonlinear control of an indoor quadrotor flying robot [C]//Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2010: 429-434.
- [7] Stingu E, Lewis F. Design and implementation of a structured flight controller for a 6DoF quadrotor using quaternions[C]//17th Mediterranean Conference on Control & Automation, Greece, 2009: 1233-1238.
- [8] Spurgeon S K. Sliding mode observers: a survey [J]. International Journal of System Science, 2008, 39(8): 751-764.
- [9] Koprubasi K, Thein M L. Attitude and angular rate estimation using the sliding mode observer with multiplicative quaternion corrections for the cooperative astrophysics technology SATellite (CATSAT) [C]//Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16.
- [10] Lizarralde F, Wen J T. Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(3): 468-472.
- [11] Jorgensen U, Gravdahl J T. Observer based sliding mode attitude control: theoretical and experimental results [J]. Modeling, Identification and Control, 2011, 32(3): 113-121.
- [12] Vasconcelos J F, Cunha R, Silvestre C, et al. A landmark based nonlinear observer for attitude and position estimation with bias compensation [C]//Proceedings of the 17th World Congress, Seoul, 2008, 17(1): 3446-3451.
- [13] Aspragathos N A, Dimitros J K. A comparative study of three methods for robot kinematics [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1998, 28(2): 135-145.
- [14] Lee T, Sanyal A, Leok M, et al. Deterministic global attitude estimation [C]//Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control, San Diego, 2006: 3174-3179.
- [15] Fragopoulos D, Innocenti M. Stability considerations in quaternion attitude control using discontinuous lyapunov functions [C]//IEE Proceedings on Control Theory Applications, 2004, 151(3): 253-258.
- [16] Han D, Wei Q, Li Z. Attitude control based on the lie-group structure of unit quaternions [C]//Proceedings of the 26th Chinese Control Conference, Zhangjiajie, 2007: 326-331.
- [17] Murray R, Li Z, Sastry S. A mathematical introduction to robotic manipulation [M]. Orlando, FL: CRC, 1994.
- [18] Engo K. On the construction of geometric integrators in the RKMK class [J]. BIT Numerical Mathematics, 2000, 40(1): 41-61.
- [19] Iserles A, Munthe-Kaas H Z, Norsett S P, et al. Lie-group methods [J]. Acta Numerica, 2000: 215-365.