

阵列雷达双零点单脉冲低角跟踪算法*

徐振海,熊子源,宋 聃,肖顺平

(国防科技大学 电子信息系统工程电磁环境效应国家重点实验室,湖南 长沙 410073)

摘要:针对阵列雷达体制,从改进单脉冲的角度出发研究了低角跟踪问题。在多径阵列信号模型的基础上,利用极大似然估计原理推导了双零点单脉冲测角算法,通过数字波束形成实现双零点单脉冲系统修正和差方向图。仿真分析了双零点单脉冲测角性能,得出测角性能与信噪比、目标仰角以及复反射系数的关系。用实测数据对该算法进行验证,结果表明:当目标仰角小于 $1/4$ 波束宽度时,测角均方根误差达到 $1/40$ 波束宽度,可以有效解决低角跟踪问题。

关键词:阵列雷达;低角跟踪;多径;双零点;单脉冲;复反射系数;数字波束形成

中图分类号:TN820 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2015)01-130-06

Double-null monopulse low-angle tracking algorithm with array radars

XU Zhenhai, XIONG Ziyuan, SONG Dan, XIAO Shunping

(State Key Laboratory of Complex Electromagnetic Environment Effects on Electronics and Information System, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: According to array radar system, low-angle tracking problem was investigated from the perspective of revised mono-pulse. Firstly, based on the array signal model under multi-path conditions, the double-null mono-pulse algorithm was deduced by using the principle of Maximal Likelihood (ML) estimation. The revised sum-difference patterns were designed by digital beamforming (DBF). Simulation result shows the relation of double-null mono-pulse performance, SNR, target elevation, and complex reflection coefficient. Finally, measured data is used for validation. Result shows that the root of mean square error (RMSE) is still less than $1/40$ of the beamwidth when the target elevation is less than $1/4$ of the beamwidth. Therefore, the double-null mono-pulse algorithm is effective for low-angle tracking problem.

Key words: array radar; low-angle tracking; multi-path; double-null; mono-pulse; complex reflection coefficient; digital beamforming

当雷达跟踪水平面以上、天线波束宽度以内的低仰角目标时,目标回波通过多条路径到达雷达接收天线:从目标直接到达雷达天线的信号称为直达信号,通常只有一条;通过地球表面反射到达雷达天线的信号称为多径信号,该现象称为多径现象。多径效应严重影响着低空(低仰角)目标的探测与测量,尤其是舰载雷达和米波三坐标雷达。

低角跟踪是一个经典的“老”问题,采用阵列信号处理是当前解决多径条件下低角跟踪问题的主要途径。阵列信号处理技术又可分为四大类方法:第一类是基于精确多径模型的极大似然方法^[1-5],其核心是对多径信号进行精确建模,减少估计问题中未知参量的数目,进而改善目标高度的估计精度。具有代表性的研究机构有两家:加

拿大渥太华国防研究院^[1-3]和加拿大 McMaster 大学^[4-5],在 20 世纪 90 年代分别开发了低角跟踪实验系统(Experimental Low Angle Tracking, ELAT)和多参量自适应雷达实验系统(Multi-parameter Adaptive Radar System, MARS),并开展了实验研究。第二类是基于平滑去相干思想的高分辨率方法^[6-10],其核心是通过空间平滑^[6-7]、极化平滑^[8-9]或者频率分集^[10]去相干之后,再应用特征分解类高分辨算法。第三类是基于子阵级或波束域的降维处理方法^[11-12],其核心思想是通过子阵划分^[11]和多波束形成^[12]将阵列处理从 N 维降低到 3 维,其优势是在 3 维子空间内正交子空间可以解析求出,并且与未知的复反射系数无关。第四类是改进单脉冲方法^[13-16],文献[13-14]提出了调节的双零点法(tempered double-null

* 收稿日期:2013-12-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61471372)

作者简介:徐振海(1977—),男,河南卫辉人,研究员,博士,硕士生导师,E-mail:drxzh930@sina.com

solution),该方法在组装的机械扫描雷达上实现,试验研究表明:当目标仰角低于1/4波束宽度时,测角精度均方根误差在1/20~1/10波束宽度。文献[15]针对阵列天线研究了双零点差波束形成问题,首先建立合理化约束条件,然后通过最小二乘准则优化得到双零点差方向图。然而该方法没有给出具体的测角方法。文献[16]基于阵列雷达通过权向量优化实现了最优和、差波束,并实现了双零点方法,仿真研究表明:测角误差小于波束宽度的1/10,该方法可以应用在漫反射以及地面斜率未知的情况,然而该方法没有实际实验数据验证。

本文针对阵列雷达体制,从极大似然估计原理出发推导了双零点单脉冲测角方法,分析了测角性能与信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)、目标仰角以及复反射系数的关系,并用实测数据验证了方法的有效性。

1 多径阵列信号模型

在镜像对称多径条件下,阵列接收目标单次(快拍)回波的信号模型为:

$$\mathbf{x} = A_1 \mathbf{s}(u) + A_2 \mathbf{s}(-u) + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中, A_1 为直达信号复幅度, A_2 为镜像反射信号复幅度,并定义复反射系数 $\rho = A_2/A_1$; $\mathbf{s}(u) = [e^{-j\pi\frac{N-1}{2}u} \quad e^{-j\pi\frac{N-3}{2}u} \quad \dots \quad e^{j\pi\frac{N-1}{2}u}]^T$ 为阵列导向矢量, $u = \sin\theta$ 为目标仰角 θ 的正弦,因此测量 u 和测量 θ 是等价的。

\mathbf{n} 为接收机热噪声矢量,为独立同分布零均值复高斯白噪声矢量,协方差矩阵 $\mathbf{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$, σ^2 为接收机热噪声强度, \mathbf{I}_N 表示 N 维单位矩阵。

通常接收机热噪声强度 σ^2 已知,信号模型中未知参数有3个,即: A_1 , A_2 和 u 。求出 \hat{u} 以后,容易得到 $\hat{\theta} = \arcsin(\hat{u})$; 求出 \hat{A}_1, \hat{A}_2 后,自然得到复反射系数估计值 $\hat{\rho} = \hat{A}_2/\hat{A}_1$ 。

2 双零点单脉冲测量

2.1 极大似然估计

根据阵列接收热噪声矢量的分布特性,利用极大似然估计原理可得三个未知参量的估计为:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{u} &= \arg \min_{A_1, A_2, u} f(A_1, A_2, u) \\ &= \|\mathbf{x} - A_1 \mathbf{s}(u) - A_2 \mathbf{s}(-u)\|^2 \quad (2) \end{aligned}$$

根据优化理论,最优估计值满足以下方程组:

$$\mathbf{s}^H(u) \mathbf{x} = A_1 + A_2 \mathbf{s}^H(u) \mathbf{s}(-u) \quad (3)$$

$$\mathbf{s}^H(-u) \mathbf{x} = A_2 + A_1 \mathbf{s}^H(-u) \mathbf{s}(u) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{A_1^* \mathbf{d}^H(u) [\mathbf{x} - A_2 \mathbf{s}(-u)]\} \\ &= \operatorname{Re}\{A_2^* \mathbf{d}^H(-u) [\mathbf{x} - A_1 \mathbf{s}(u)]\} \quad (5) \end{aligned}$$

其中:

$$\mathbf{d}(u) = \frac{d}{du} \mathbf{s}(u) = j\pi \mathbf{x}_e \odot \mathbf{s}(u) \quad (6)$$

$\mathbf{d}(u)$ 为信号导向矢量的导数,实际上是差波束权矢量。 $\mathbf{x}_e = \left[-\frac{N-1}{2} \quad -\frac{N-3}{2} \quad \dots \quad \frac{N-1}{2} \right]^T$ 为阵元序号矢量,“ \odot ”表示 Hadamard 积。并且: $\mathbf{d}^H(u) \mathbf{s}(u) = 0$, 差波束权矢量与和波束权矢量正交。

显然,直接求解该方程组的解析解是非常困难的,采用“迭代”方法可以求解最优值。其核心思想是在当前波束指向的条件下测量目标的仰角,下一步波束指向该仰角方向,重新测量新的仰角,迭代下去,直至收敛稳定。

2.2 双零点单脉冲测角

为表述方便,指向目标和镜像的单脉冲系统分别简记为单脉冲系统 I 和单脉冲系统 II。假定当前两套单脉冲系统的波束指向分别为 u_b 和 $-u_b$ 。令: $\mathbf{s}(u_b) \triangleq \mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}(-u_b) \triangleq \mathbf{s}_2$, $\mathbf{d}(u_b) \triangleq \mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}(-u_b) \triangleq \mathbf{d}_2$ 。

联合式(3)、式(4),求解线性方程组可得 A_1 和 A_2 的估计值为:

$$\hat{A}_1 = \frac{\mathbf{s}_1^H \mathbf{x} - \mathbf{s}_1^H \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2^H \mathbf{x}}{1 - |\mathbf{s}_1^H \mathbf{s}_2|^2} = \frac{(\mathbf{P}_{\mathbf{s}_2^\perp} \mathbf{s}_1)^H \mathbf{x}}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{s}_2^\perp} \mathbf{s}_1\|^2} \quad (7)$$

$$\hat{A}_2 = \frac{\mathbf{s}_2^H \mathbf{x} - \mathbf{s}_2^H \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1^H \mathbf{x}}{1 - |\mathbf{s}_2^H \mathbf{s}_1|^2} = \frac{(\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp} \mathbf{s}_2)^H \mathbf{x}}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp} \mathbf{s}_2\|^2} \quad (8)$$

其中:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^H = \mathbf{I}_N - \mathbf{s}(u_b) \mathbf{s}^H(u_b) \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{s}_2^\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^H = \mathbf{I}_N - \mathbf{s}(-u_b) \mathbf{s}^H(-u_b) \quad (10)$$

$\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp}$ 、 $\mathbf{P}_{\mathbf{s}_2^\perp}$ 分别表示到 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 的正交补空间上的正交投影矩阵。并且:

$$\|\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp} \mathbf{s}_2\|^2 = \|\mathbf{P}_{\mathbf{s}_2^\perp} \mathbf{s}_1\|^2 = 1 - |\mathbf{s}_2^H \mathbf{s}_1|^2 \quad (11)$$

可以看出: \hat{A}_1 实际上是单脉冲系统 I 的修正和波束输出 Σ_1 , 接收目标信号的同时抑制了镜像信号; \hat{A}_2 实际上是单脉冲系统 II 的修正和波束输出 Σ_2 , 接收镜像信号的同时抑制了目标信号。

在式(5)中,令:

$$\Delta_1 = \mathbf{d}^H(u) [\mathbf{x} - A_2 \mathbf{s}(-u)] \quad (12)$$

$$\Delta_2 = \mathbf{d}^H(-u) [\mathbf{x} - A_1 \mathbf{s}(u)] \quad (13)$$

将式(8)代入式(12)可得:

$$\Delta_1 = \mathbf{d}_1^H \left[\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{s}_2 (\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp} \mathbf{s}_2)^H}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{s}_1^\perp} \mathbf{s}_2\|^2} \right] \mathbf{x} \quad (14)$$

将式(7)代入式(13)可得:

$$\Delta_2 = \mathbf{d}^H \left[\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{s}_1 (\mathbf{P}_{s_2 \perp} \mathbf{s}_1)^H}{\|\mathbf{P}_{s_2 \perp} \mathbf{s}_1\|^2} \right] \mathbf{x} \quad (15)$$

可以看出:式(14)相当于单脉冲系统 I 修正差波束输出,抑制了镜像信号对目标角度测量的影响;式(15)相当于单脉冲系统 II 修正差波束输出,抑制了目标信号对镜像角度测量的影响。

将式(7)、式(8)、式(14)、式(15)代入式(5),进一步简化得到:

$$\text{Re} \{ \Sigma_1^* \Delta_1 \} = \text{Re} \{ \Sigma_2^* \Delta_2 \} \quad (16)$$

即:

$$|\Sigma_1|^2 \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Sigma_1} \right\} = |\Sigma_2|^2 \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_2}{\Sigma_2} \right\} \quad (17)$$

在镜像对称多径条件下,两套单脉冲系统单脉冲比符号是相反的,即:

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Sigma_1} \right\} \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_2}{\Sigma_2} \right\} < 0 \quad (18)$$

该现象可以由图 1 来解释。

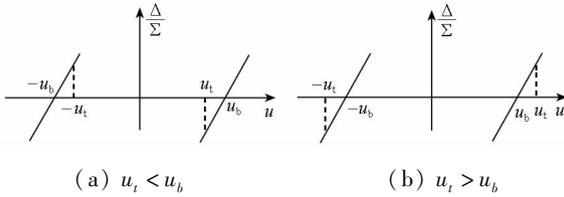


图 1 双单脉冲系统鉴角曲线示意图

Fig. 1 The sketch map of double monopulse curves

因此,根据式(17)和式(18)可得:

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Sigma_1} \right\} = 0 \quad (19)$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta_2}{\Sigma_2} \right\} = 0 \quad (20)$$

实际上,当目标仰角偏离波束指向时,单脉冲比不等于零,可以在波束指向处进行一阶线性近似,对于单脉冲系统 I 和单脉冲系统 II 分别可得:

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Sigma_1} \right\} = K(u - u_b) \quad (21)$$

$$\frac{\Delta_1}{\Sigma_1}(u) = \frac{[1 - V_\Sigma^2(2u_b)]V_\Delta(u - u_b) + V_\Delta(2u_b)[V_\Sigma(u + u_b) - V_\Sigma(2u_b)V_\Sigma(u - u_b)]}{V_\Sigma(u - u_b) - V_\Sigma(2u_b)V_\Sigma(u + u_b)} \quad (27)$$

$$\frac{\Delta_2}{\Sigma_2}(u) = \frac{[1 - V_\Sigma^2(2u_b)]V_\Delta(u + u_b) - V_\Delta(2u_b)[V_\Sigma(u - u_b) - V_\Sigma(2u_b)V_\Sigma(u + u_b)]}{V_\Sigma(u + u_b) - V_\Sigma(2u_b)V_\Sigma(u - u_b)} \quad (28)$$

其中, $V_\Sigma(u) = \frac{\sin(\frac{Nu}{2})}{N \sin(\frac{u}{2})}$ 为 N 元均匀半波长线阵电压方向图。

考虑 16 元半波长均匀线阵,当目标仰角正弦为 $u_0 = 0.5u_{3dB}$ 时,两套单脉冲系统的修正和、差波束方向图如图 2 所示,对应的双单脉冲鉴角曲线如图 3 所示。

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta_2}{\Sigma_2} \right\} = K[-u - (-u_b)] \quad (22)$$

其中, K 为鉴角曲线斜率。根据式(21)和式(22)可以对 u 进行更新:

$$\hat{u} = u_b + \frac{1}{K} \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Sigma_1} \right\} \quad (23)$$

$$\hat{u} = u_b - \frac{1}{K} \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_2}{\Sigma_2} \right\} \quad (24)$$

单脉冲系统 I 可以直接对目标的仰角进行更新,单脉冲系统 II 可以通过更新镜像仰角进而对目标仰角进行更新,因此可以对两种更新进行加权融合处理,即:

$$\hat{u} = u_b + \frac{1}{K} \cdot \frac{|\hat{A}_1|^2 \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Sigma_1} \right\} - |\hat{A}_2|^2 \text{Re} \left\{ \frac{\Delta_2}{\Sigma_2} \right\}}{|\hat{A}_1|^2 + |\hat{A}_2|^2} \quad (25)$$

也就是说,对目标和镜像的测量结果按照 SNR 的不同分别给予不同的加权,由于复反射系数的模小于 1,因此对于目标的测量结果占的权重大于镜像的权重。

单脉冲系统 I 和 II 的波束指向更新为: $u_b = \hat{u}$, $-u_b = -\hat{u}$,重新进行迭代,直至 $|\hat{u} - u_b| \leq \varepsilon$,迭代停止。

2.3 复反射系数估计

当两套单脉冲系统迭代停止以后,根据两套单脉冲系统的和波束输出可以得到复反射系数的估计为:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{A}_2}{\hat{A}_1} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{(\mathbf{P}_{s_1 \perp} \mathbf{s}_2)^H \mathbf{x}}{(\mathbf{P}_{s_2 \perp} \mathbf{s}_1)^H \mathbf{x}} \quad (26)$$

3 双零点单脉冲鉴角曲线

单脉冲系统鉴角曲线定义为差波束方向图除以和波束方向图,单脉冲系统 I 和单脉冲 II 的鉴角函数分别为:

从图 2 可以看出:对于单脉冲系统 I,和波束在 $u_0 = 0.5u_{3dB}$ 处取得峰值,差波束在 $u_0 = 0.5u_{3dB}$ 形成零点;和、差波束均在 $-u_0 = -0.5u_{3dB}$ 形成零点,也就是说在测量目标仰角时抑制了镜像多径信号的影响。而对于单脉冲系统 II,道理是类似的。从图 3 可以看出:双单脉冲系统鉴角曲线在波束指向附近近似为直线。

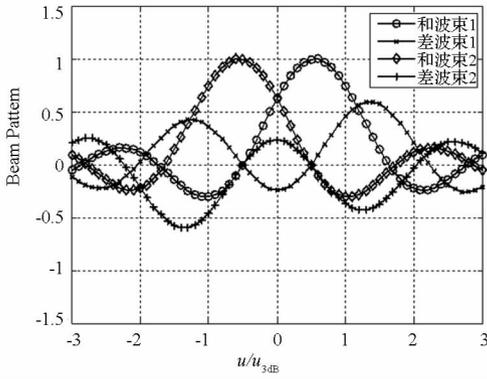


图 2 双单脉冲系统修正和、差方向图
Fig.2 Modified sum and difference patterns of double monopulse system

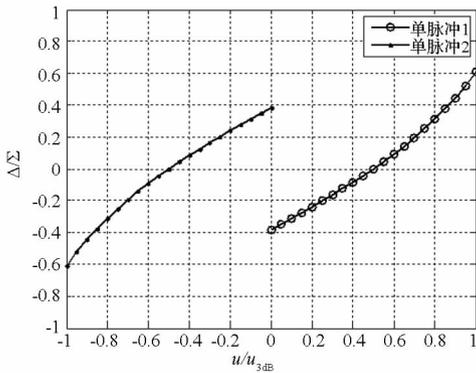


图 3 双单脉冲系统鉴角曲线
Fig.3 Double monopulse curves

在双零点单脉冲测角方法中,波束指向随着“迭代”而变化,鉴角曲线也随之变化。图 4 给出了不同波束指向时的鉴角曲线,波束指向 $\pm u_{3dB}$ (‘+’), $\pm \frac{3}{4} u_{3dB}$ (‘o’), $\pm \frac{1}{2} u_{3dB}$ (‘*’), $\pm \frac{3}{8} u_{3dB}$ (‘.’), $\pm \frac{1}{4} u_{3dB}$ (‘x’)时的鉴角曲线,可以看出:随着波束指向减小,鉴角曲线的斜率也逐渐减小。

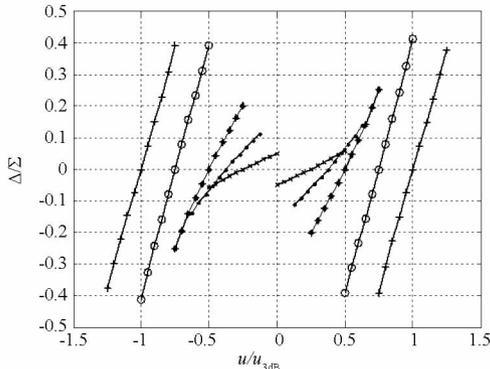


图 4 双单脉冲系统鉴角曲线与波束指向的关系
Fig.4 Relation of double monopulse curves and beam pointings

4 仿真分析

考虑垂直均匀半波长线阵,阵元数 $N = 16$,则波束宽度 $\theta_{3dB} \approx 6.35^\circ$ 。信噪比定义为直达信号功率与阵元噪声方差的比,即: $SNR = \frac{|A_1|^2}{\sigma^2}$ 。测角均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE) $RMSE = E[(\hat{\theta} - \theta_d)^2]$ 。针对低角跟踪问题,为了得到一般性结论,目标仰角、测角均方根误差均对波束宽度进行归一化,目标相对仰角为 $\bar{\theta}_d = \theta_d / \theta_{3dB}$,相对均方根误差(Normalized Root Mean Square Error, NRMSE) $NRMSE = RMSE / \theta_{3dB}$ 。

低仰角条件下双零点单脉冲测角性能与 SNR、目标相对仰角以及复反射系数有关,下面分情况讨论。在研究某一因素对测角性能影响时,固定其他参数为典型值。为分析统计性能进行 Mont Carlo 仿真,仿真次数为 1000。

4.1 测角精度与信噪比的关系

在该实验中,设定复反射系数 $\rho = 0.8e^{j\frac{8}{9}\pi}$,目标相对仰角 $\bar{\theta} = 0.25$,图 5 给出了 NRMSE 与 SNR 的关系曲线。

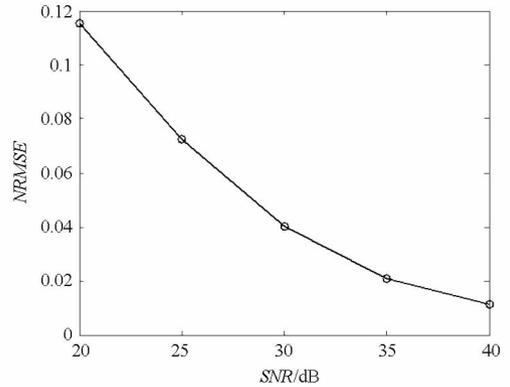


图 5 测角精度与 SNR 的关系曲线
Fig.5 Relation curve of NRMSE versus SNR

可以看出:随着 SNR 的增加,测角均方根误差较小,测角精度提高,这是普遍的规律。

4.2 测角精度与目标相对仰角的关系

在该实验中,设定复反射系数 $\rho = 0.8e^{j\frac{8}{9}\pi}$, $SNR = 30dB$,图 6 给出了 NRMSE 与目标相对仰角的关系曲线。

可以看出:随着目标相对仰角下降,测角均方根误差增大,测量精度下降,这是多径问题的特有规律,目标仰角越低,多径信号与直达信号的夹角越小,多径对测角的影响越剧烈。

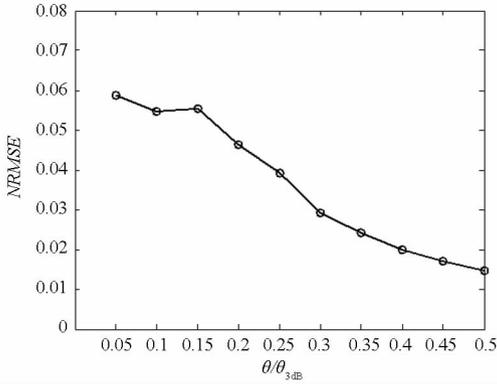


图 6 测角精度与目标仰角的关系曲线
Fig. 6 Relation curve of *NRMSE* versus $\bar{\theta}$

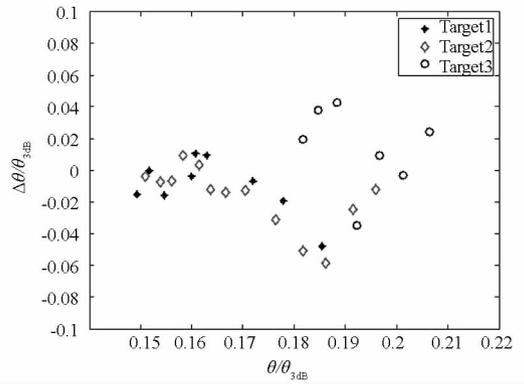


图 8 实测数据处理结果
Fig. 8 The results of field data

4.3 测角精度与复反射系数的关系

在该实验中,目标相对仰角 $\bar{\theta} = 0.33$, $SNR = 30\text{dB}$,图 7 给出了 *NRMSE* 与复反射系数的关系。

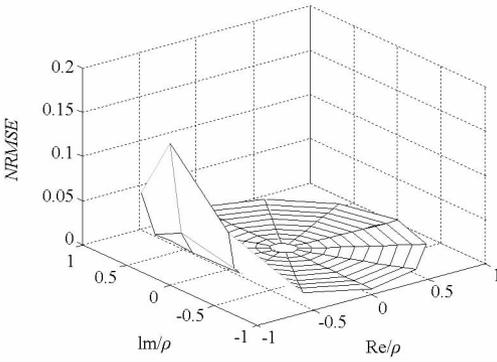


图 7 测角精度与复反射系数的关系曲面
Fig. 7 Relation surface of *NRMSE* versus ρ

可以看出:测角精度在复反射系数平面内关于实轴对称,也就是说复反射系数相位符号对测角无影响。并且仰角估计精度随着 $|1 + \rho|$ 减小而变大,也就是说越接近“理想镜面反射”精度越差,由于复反射系数的影响,测角精度相差可达 8 倍。

5 实测数据处理结果

应用双零点单脉冲技术对某米波阵列实验系统外场测量数据进行分析处理。对民航目标进行观测,经过脉冲压缩、快拍提取、通道误差补偿等预处理后,利用双零点单脉冲算法得到雷达对三批目标的低角跟踪结果,如图 8 所示,其中目标仰角和测角误差均对波束宽度进行归一化。

雷达跟踪了三批目标,共 29 次测量,目标相对仰角分布在 $0.15^\circ \sim 0.21^\circ$ 之间,目标仰角小于 $1/4$ 波束宽度,相当于非常困难的低角跟踪情形。经处理后,所有误差均小于 $1/20$ 波束宽度,测角归一化均方根误差 0.023 7,小于波束宽度的 $1/40$ 。该精度优于文献[13]报道的 $1/20 \sim 1/10$ 波

束宽度,可以认为有效地解决了低角跟踪问题。

6 结论

本文针对阵列雷达体制,从极大似然估计原理出发推导了双零点单脉冲测角方法,通过“迭代”处理实现对目标仰角的精确估计。该方法测角性能与目标的仰角、复反射系数有强烈的依赖关系,目标仰角越小测角精度越差,这是由多径问题本身所决定的;复反射系数越偏离理想镜面反射,测角精度越好。实测数据处理结果表明:当目标仰角小于 $1/4$ 波束宽度时,测角均方根误差小于 $1/40$ 波束宽度,有效解决了多径条件下的低角跟踪问题。

该方法具有以下三个优点:第一,不依赖未知的复反射系数;第二,可以处理 $\rho = -1$ 的情况,即在理想镜面反射条件下仍然有效,只是误差较大;第三,测量角度的同时还可以估计出复反射系数。以上优点预示着该算法具有广泛的应用前景,即可以应用在米波陆地环境与 X 波段海洋环境下目标仰角的测量。

参考文献 (References)

- [1] Eloi B, Ross M T, Michel L. Tracking swerling fluctuating targets at low altitude over the sea[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(5): 806–822.
- [2] Eloi B, Ross M T, Brookes D. Improved radar tracking using a multipath model: maximum likelihood compared with eigenvector analysis[J]. Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings, 1994, 141(4): 213–222.
- [3] Eloi B, Boss M T. Model-based multi-frequency array signal processing for low-angle tracking[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1995, 31(1): 194–210.
- [4] Lo T, Litva J. Use of a highly deterministic multipath signal model in low-angle tracking[J]. Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings, 1991, 138(2): 163–171.
- [5] Lo T, Litva J. Low angle tracking using a multi-frequency sampled aperture radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(9): 797–805.

- [6] Thompson J S, Grant P M, Mulgrew B. Performance of spatial smoothing algorithms for correlated sources [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44 (10): 1040 - 1046.
- [7] Qi C, Wang Y, Zhang Y, et al. Spatial difference smoothing for DOA estimation of coherent signals [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(11): 800 - 802.
- [8] Rahamim D, Tabrikian J, Shavit R. Source localization using vector sensor array in a multipath environment [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52 (11): 3096 - 3103.
- [9] Hurtado M, Nehorai A. Performance analysis of passive low-grazing-angle source localization in maritime environments[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(2): 780 - 789.
- [10] 徐振海, 黄坦, 熊子源, 等. 基于频率分集的阵列雷达低角跟踪算法 [J]. 国防科技大学学报, 2014, 36 (2): 93 - 98.
XU Zhenhai, HUANG Tan, XIONG Ziyuan, et al. Low angle tracking algorithm using frequency diversity for array radar[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36(2): 93 - 98. (in Chinese)
- [11] 徐振海, 张亮, 熊子源, 等. 多径条件下子阵级低角测高算法[J]. 国防科技大学学报, 2012, 34(4): 164 - 168.
XU Zhenhai, ZHANG Liang, XIONG Ziyuan, et al. Low-angle height finding algorithm at sub-array level under multipath environment [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2012, 34(4): 164 - 168. (in Chinese)
- [12] Xu Z H, Rao B, Xiong Z Y, et al. Elevation finding algorithm in beam domain under multi-path environments for VHF radar[J]. Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings, 2013, 7(9): 978 - 984.
- [13] White W D. Low-angle radar tracking in the presence of multipath[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1974, 10(6), 835 - 852.
- [14] White W D. Double null technique for low angle tracking[J]. Microwave Journal, 1976(11): 35 - 38.
- [15] Zhao J H, Yang J Y. Double-null pattern synthesis for low-angle tracking[C]//Proceedings of ICMMT, 2007: 1 - 4.
- [16] Sebt M A, Sheikhi A, Nayebi M M. Robust low-angle estimation by an array radar[J]. Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings, 2010, 4(6): 780 - 790.