

## 改进多重信号分类算法的宽带频谱快速感知方法\*

孙伟朝,王丰华,黄知涛,王翔

(国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

**摘要:**针对宽带频谱感知中采样率大、感知时间长的问题,在调制宽带转换器采样的基础上提出了一种改进多重信号分类算法的宽带频谱快速感知方法。调制宽带转换器对宽带频谱进行欠奈奎斯特采样,以最小描述长度准则估计信号个数,用改进多重信号分类谱估计信号位置。算法引入调整因子,使得多重信号分类谱中信号位置更为明显,降低了噪声的干扰。整个感知过程无须重构原始波形,无须计算频谱,大大降低了计算量,而且感知算法计算复杂度低,提高了感知效率。仿真结果表明,在低信噪比的情况下,该算法仍具有很好的检测性能。

**关键词:**宽带频谱快速感知;欠奈奎斯特采样;调制宽带转换器;多重信号分类算法

中图分类号:TN911.7 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2015)05-155-06

## Wideband spectrum fast sensing method based on improved multiple signal classification

SUN Weichao, WANG Fenghua, HUANG Zhitao, WANG Xiang

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of exorbitant sampling rate and sensing time too long in wideband sensing, a wideband spectrum sensing method using improved multiple signal classification (MUSIC) based on modulated wideband converter (MWC) was proposed. The MWC for sub-Nyquist sampling was used, the number of signals by minimum description length (MDL) criterion was estimated, and the signals' location using improved MUSIC was estimated. In the improved MUSIC, an adjustment factor was given, which enhanced the MUSIC spectrum at the signal' locations and reduced others, and the noise jam was restrained. An amount of calculations was reduced, because it neither needed to recover original wave, nor calculated PSDs in the whole process. The complexity of sensing method was small, so that it increased sensing efficiency. The results show a reliable detection even in low signal noise ratio.

**Key words:** wideband spectrum fast sensing; sub-Nyquist sampling; modulated wideband converter; multiple signal classification

频谱感知广泛应用于认知无线电<sup>[1-2]</sup>、无线电监测与频谱管理等领域。随着现代通信技术的发展,宽带信号逐步成为一种常见的信号形式。对宽带频谱进行感知,过高的采样率和过大的数据量,对现有的模数转换器(Analog to Digital Converter, ADC)、处理器和存储设备等提出了巨大的挑战。

近年来, Mishali 等提出的调制宽带转换器 (Modulated Wideband Converter, MWC) 系统<sup>[3]</sup>,以宽带频谱的稀疏性和压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 理论<sup>[4]</sup>为基础,用远低于奈奎斯特采样速率的速率进行采样,可无损重构信号。该系统易于实现,硬件要求低,并能达到 Landau 最小采样速率<sup>[5]</sup>,因此,是一种有效的解决宽带频谱

采样率过大问题的方案。

文献[6]利用欠奈奎斯特采样值重构平稳信号的功率谱,进行宽带频谱感知;文献[7]建立了一种空频2维压缩感知模型,提出相应的重构算法,通过寻找空间小波基的方法检测信号;文献[8-9]利用不同的重构算法对压缩后的信号进行重构,得到信号的功率谱。这些方法都是通过重构接收信号,计算功率谱进行频谱感知。重构信号算法复杂度较高、运算量较大,用于频谱感知会引起较大的感知延迟。例如,认知无线电中出现感知延迟,甚至有可能给主用户造成干扰。

文献[10]利用多重集采样提出了一种宽带频谱感知方法,直接在时域利用 MUSIC 算法实现频谱感知。文献[11]也利用多重集采样,基于多

\* 收稿日期:2014-12-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61302141)

作者简介:孙伟朝(1986—),男,河南夏邑人,博士研究生,E-mail:sweichao1266@163.com;

黄知涛(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:taldcn@sina.com

重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC) 算法提出了一种动态门限搜索匹配的信号个数估计方法。但基于多重集采样的方法,要求时间延迟部分精确到其奈奎斯特采样周期量级,对于宽带频谱采样来说,保持各支路之间的精确时延是很困难的。

针对上述存在的问题,孙伟朝等在易于实现的 MWC 进行欠奈奎斯特采样的基础上提出了基于改进 MUSIC 算法的宽带频谱快速感知方法。

### 1 问题描述

稀疏多带信号是军事和民用通信领域经常遇到的信号类型<sup>[13]</sup>。假设接收信号  $x(t)$  是一个稀疏多带信号,带宽范围为  $[-f_{nyq}/2, f_{nyq}/2]$ ,  $f_{nyq}$  是其奈奎斯特采样速率。其频谱是由  $q$  个互不相交的子带  $X_i(f)$  ( $i = 1, \dots, q$ ) 及对称的负频段子带组成,如图 1 所示。所有子带中的最大的带宽为  $B$ ,子带最大个数  $N(N \geq 2q)$ ,且有所有子带带宽之和远小于信号的奈奎斯特频率。

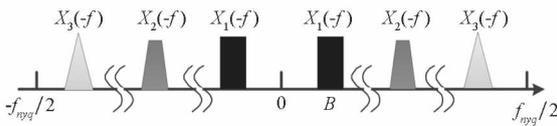


图 1 稀疏多带信号频谱

Fig. 1 Sparse multiband signal spectrum

整个频带等宽度划分为  $L$  个连续的窄带信道,每个信道宽度不小于  $B$ ,信道序号为  $[1, \dots, L]$ 。各子带  $X_i(f)$  所处的信道序号组成的集合称为支撑集<sup>[3]</sup>。

问题描述如下:预先不知道宽带频谱中信号子带位置的情况下,如何利用 MWC 得到的压缩采样点快速感知子带所处信道序号,即快速估计出支撑集。

### 2 MWC 欠奈奎斯特采样

MWC 采样结构如图 2 所示,共有  $m$  个通道,每个通道都包括一个混频器、一个低通滤波器和一个 ADC。接收到的信号  $x(t)$  同时输入到  $m$  个通道,乘上一个周期  $T_p = 1/f_p$  的伪随机周期序列波形  $p_i(t)$ ,  $f_p$  为周期序列波形的频率,且每路的伪随机序列互不相关。经过截止频率为  $1/2T_s$  的低通滤波器滤波,和采样率  $f_s = 1/T_s$  的 ADC 采样,得到压缩采样点  $y_i[n]$ 。

周期序列波形  $p_i(t)$  按傅里叶级数展开<sup>[3]</sup>有

$$p_i(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{il} e^{j2\pi l f_p t} \quad (1)$$

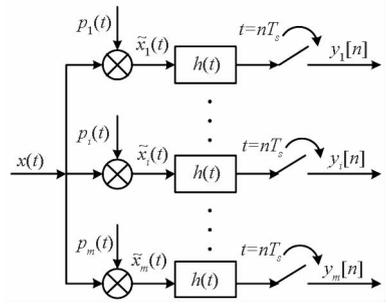


图 2 MWC 结构

Fig. 2 MWC structure

其中,系数  $c_{il} = d_l \sum_{k=0}^{L-1} a_{ik} \theta^{lk}$ ,  $a_{ik} \in \{-1, +1\}$ ,  $\theta = e^{-j2\pi/L}$ ,  $d_0 = 1/L$ ,  $d_l = (1 - \theta^l)/(2j\pi l)$  ( $l \neq 0$ )。

低通滤波器  $h(t)$  的频响特性为  $H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_s/2 \\ 0, & |f| > f_s/2 \end{cases}$ , 取  $f_s = f_p$ , 因此,压缩采样点  $y_i[n]$  只包含频率在  $[-f_s/2, f_s/2]$  之内的部分。其离散时间傅里叶变换为

$$Y_i(e^{j2\pi T_s}) = \sum_{l=-L_0}^{L_0} c_{il} X(f - lf_p), \quad |f| \leq f_s/2 \quad (2)$$

其中,  $L_0$  为使得  $L = 2L_0 + 1 \geq f_{nyq}/f_p$  的最小整数。

考虑  $m$  个通道,将式(2)写成矩阵的形式。

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(f), \quad f \leq f_s/2 \quad (3)$$

其中,  $Y_i(f) = Y_i(e^{j2\pi T_s})$ ,  $A_{il} = c_{i, -l} = c_{il}^*$ , 未知量  $Z_j(f) = X[f + (j - L_0 - 1)f_p]$ ,  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq L_0$ 。

文献[3]中定理 2 给出了式(3)有唯一最稀疏解的充分条件。其中,要求  $m \times L$  的系数矩阵  $\mathbf{A}$  中任意  $2N$  列线性独立。

式(3)表示了压缩采样序列  $y_i[n]$  与原始信号  $x(t)$  之间的关系,以及一个求欠定方程组最稀疏解的问题。在感知过程中,文献[3]提出了连续到有限 (Continue To Finite, CTF) 模块,把式(3)转化为多观测矢量 (Multiple Measurement Vectors, MMV) 模型,再利用压缩感知稀疏重构算法求解频率支撑集,如复杂度低、运行速度快的正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 算法<sup>[14]</sup>等。

### 3 宽带频谱快速感知算法

MUSIC 算法是阵列信号处理中经典的信号参数估计方法。孙伟朝等本文借助阵列信号处理模型,对 MUSIC 算法进行改进,引入调整因子,比 MUSIC 算法具有更高的感知正确率。为表述方便,本文算法记为 MUSIC\_M。

### 3.1 子空间分析

根据式(3),可得到带噪声的观测序列  $y[n]$  的频域表达式

$$Y(f) = AZ(f) + W(f), |f| \leq f_s/2 \quad (4)$$

其中  $W(f)$  代表高斯噪声,其分布为  $N(0, \sigma_w^2 I)$ , 且与信号不相关。

观测矢量的自相关矩阵

$$R_Y = E[Y(f)Y^H(f)] = APA^H + \sigma_w^2 I \quad (5)$$

其中,  $E[\cdot]$  是求期望,  $H$  表示共轭转置,  $P$  是信号矢量的自相关矩阵。对  $R_Y$  进行特征值分解, 得到信号子空间  $E_s$  和噪声子空间  $E_n$ 。

$$R_Y = E_s \Lambda_s E_s^H + E_n \Lambda_n E_n^H \quad (6)$$

其中,  $\Lambda_s$  和  $\Lambda_n$  分别表示由信号和噪声的特征值构成的对角阵,  $E_s$  和  $E_n$  是对应的特征向量矩阵。假定观测长度为  $K$ , 自相关矩阵  $R_Y$  可通过式(7)估计。

$$\hat{R}_Y = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K y[n]y[n]^H \quad (7)$$

其中  $y[n] = [y_1[n], y_2[n], \dots, y_m[n]]^T$ 。

信号个数估计采用最小描述长度 (Minimum Description Length, MDL) 准则, MDL 准则在决策过程中不需要人工参与, 能够直接利用观测矢量计算出所含有信号数目<sup>[12]</sup>, 即信号个数的估计值  $\hat{q}$ 。

### 3.2 改进的 MUSIC 算法

估计出信号个数  $\hat{q}$  之后,  $m - \hat{q}$  个小特征值即为噪声的特征值, 对应的噪声特征向量矩阵  $\hat{E}_n$  是其噪声子空间。MUSIC 算法公式<sup>[10]</sup> 为

$$Pmu(l) = \frac{1}{\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l} = \frac{1}{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n\|^2}, 1 \leq l \leq L \quad (8)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示 2 范数,  $l$  是信道序号,  $\mathbf{a}_l$  表示系数矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $l$  列。

由式(1)可得知, 系数矩阵  $\mathbf{A}$  与窄带远场信号的波达方向 (Direction of Arrival, DOA) 数学模型中的系数矩阵存在差异, 矩阵各元素的模不恒定。因此, 直接计算 MUSIC 谱易受到“噪声”干扰。而整个空间 (噪声子空间和信号子空间) 的 MUSIC 谱  $\frac{1}{\mathbf{a}_l^H \hat{E} \hat{E}^H \mathbf{a}_l}$  中包含了所有“噪声”信息, 可

以用来抵消噪声子空间 MUSIC 谱  $\frac{1}{\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l}$  中“噪声”干扰, 即

$$\frac{1}{\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l} - \frac{1}{\mathbf{a}_l^H \hat{E} \hat{E}^H \mathbf{a}_l} = \frac{\mathbf{a}_l^H \hat{E} \hat{E}^H \mathbf{a}_l - \mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l}{\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^H \hat{E} \hat{E}^H \mathbf{a}_l}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbf{a}_l^H \hat{E}_s \hat{E}_s^H \mathbf{a}_l}{\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l (\mathbf{a}_l^H \hat{E}_s \hat{E}_s^H \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_l^H \hat{E}_n \hat{E}_n^H \mathbf{a}_l)} \\ &= \frac{1}{(1 + \frac{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n\|^2}{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_s\|^2}) \|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n\|^2} \end{aligned} \quad (9)$$

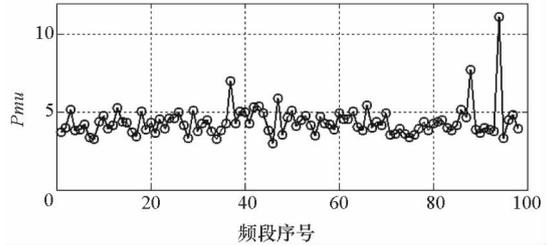
其中  $\hat{E} = [\hat{E}_s \hat{E}_n]$  为信号和噪声的特征向量组成的矩阵。另外, 考虑到频谱的对称性, 只需计算其中一半的 MUSIC 谱。

结合式(9), 定义引入调整因子的改进 MUSIC 谱为

$$MPmu(l) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho}} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n\|^2}, 1 \leq l \leq L_0 + 1 \quad (10)$$

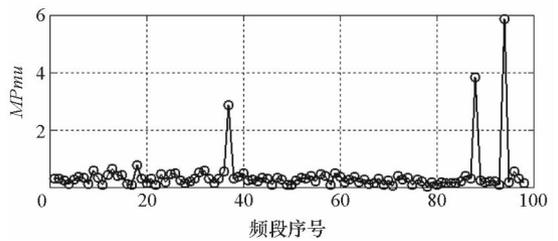
其中,  $\rho = \frac{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_s\|^2}{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n\|^2}$  为调整因子。存在信号的位置处,  $\frac{1}{\|\mathbf{a}_l^H \hat{E}_n\|^2}$  达到极大值,  $\frac{1}{1 + \frac{1}{\rho}}$  也达到极大值, 对

谱值有增强的作用; 反之, 有削弱的作用, 使得信号在谱中位置更为突出, 能够适应更低的信噪比。如图 3 所示, MUSIC\_M 算法得到的谱中信号位置峰值比 MUSIC 算法得到的峰值更为明显。通过搜索谱中峰值的位置, 即可估计出频率支撑集  $\hat{S}$ 。



(a) MUSIC 谱

(a) MUSIC spectrum



(b) 改进后的 MUSIC 谱

(b) Improved MUSIC spectrum

图 3 信号支撑集为  $\{37, 88, 94\}$  时的 MUSIC 谱和改进后的 MUSIC 谱  
Fig. 3 MUSIC spectrum and improved MUSIC spectrum with frequency support  $\{37, 88, 94\}$

MUSIC\_M 算法的主要步骤为:

- 1) 利用 MWC 对宽带模拟信号采样, 得到压缩采样序列  $y[n]$ ;
- 2) 利用式(7)估计自相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_y$ ;
- 3) 进行特征值分解, 特征值按从大到小排序, 得到特征值  $d$  和对应的特征向量矩阵  $\mathbf{E}$ ;
- 4) 利用 MDL 准则估计信号个数  $\hat{q}$ ;
- 5) 利用式(10)计算谱  $MPmu$ ;
- 6) 搜索谱  $MPmu$  中的峰值, 估计频率支撑集  $\hat{S}$ , 结束。

### 3.3 算法复杂度分析

文献[15]也提出了基于 MWC 采样的宽带频谱感知方法。利用 MDL 准则估计信号个数, 应用 OMP 算法感知频谱。下面把基于 OMP 的感知算法与 MUSIC\_M 算法在计算复杂度方面进行分析比较。

#### 3.3.1 基于 OMP 算法的宽带频谱感知复杂度分析

基于 OMP 算法的宽带频谱感知方法与 MUSIC\_M 算法的计算量差异主要体现在 OMP 算法上。下面在文献[16]的基础上分析上述 OMP 算法的复杂度。

在第  $t$  次迭代中, OMP 算法中计算选取与残差相关性最强的列的集合的复杂度为  $O(mLK)$ ; 然后更新残差  $Res^{(t)} = \mathbf{V} - \mathbf{A}_s^{(t)} (\mathbf{A}_s^{(t)})^\dagger \mathbf{U}$ , Moore-Penrose 伪逆  $(\mathbf{A}_s^{(t)})^\dagger = [(\mathbf{A}_s^{(t)})^H \mathbf{A}_s^{(t)}]^{-1} (\mathbf{A}_s^{(t)})^H$ ,  $\mathbf{A}_s^{(t)}$  的维数为  $m \times 2t$ 。而  $2t \times 2t$  的复矩阵求逆至少需要  $O[(2t)^3]$  的计算量, 那么上述求残差过程的计算复杂度为  $O[m(2t)K + m(2t)^2 + (2t)^3]$ 。因此, OMP 算法中第  $t$  次迭代的计算复杂度为  $O[mLK + m(2t)K + m(2t)^2 + (2t)^3]$ 。

综上所述, 经过  $\hat{q}$  次迭代 OMP 算法复杂度为  $O[mLK\hat{q} + mK\hat{q}(\hat{q} + 1) + m\hat{q}(\hat{q} + 1)(2\hat{q} + 1) + \hat{q}^2(\hat{q} + 1)^2]$ 。

#### 3.3.2 MUSIC\_M 算法复杂度分析

MUSIC\_M 算法与 OMP 算法相比, 计算量的主要差别在于计算谱  $MPmu$  上。

谱  $MPmu$  共需计算  $L_0 + 1 = (L + 1)/2$  个值, 每个值中  $\|\mathbf{a}_i^H \mathbf{E}\|^2$  的计算复杂度为  $O(2m^2 + m)$ ,  $\|\mathbf{a}_i^H \hat{\mathbf{E}}_n\|^2$  的复杂度为  $O[2m(m - \hat{q}) + m]$ 。那么,  $L_0 + 1$  点的计算复杂度  $O[(L + 1)(2m^2 + m - m\hat{q})]$ 。可以看出, 信号个数越多, 计算量越小; 当  $\hat{q} = 1$  时, 计算量最大, 计算复杂度为  $O[2(L + 1)m^2]$ 。根据文献[3]要求  $m \geq 4\hat{q}$  才能全盲恢复信号, 当  $\hat{q} = m/4$  时那么  $L_0 + 1$  点的计算复杂度的乘

法次数最少, 约为  $O[(L + 1)(7/4m^2 + m)]$ 。

#### 3.3.3 算法复杂度比较

基于上述分析, 表 1 给出了两种方法的计算复杂度比较。

表 1 两种感知算法计算复杂度比较  
Tab.1 Computational complexity comparison of two sensing methods

步骤	OMP 算法	MUSIC_M 算法
求自相关矩阵	$O(Km^2)$	$O(Km^2)$
自相关矩阵分解	$O(m^3)$	$O(m^3)$
构造矩阵 $\mathbf{V}$	$O(m^3)$	—
支撑集估计	$O[mLK\hat{q} + mK\hat{q}(\hat{q} + 1) + m\hat{q}(\hat{q} + 1)(2\hat{q} + 1) + 2\hat{q}^2(\hat{q} + 1)^2]$	$O[(L + 1)(2m^2 + m - m\hat{q})]$

MWC 中,  $L > m \geq 4\hat{q}$ , 采样长度  $K \geq m$ 。当  $\hat{q} \geq 2$  时, OMP 算法的复杂度高于 MUSIC\_M 算法, 且随着信号个数的增加, 其复杂度也会快速增加; 而 MUSIC\_M 算法的复杂度会随着信号个数的增加而降低。一般宽带频谱中的信号个数都会多于 1 个, 因而, 应用 MUSIC\_M 算法比 OMP 算法能快速感知频谱。

## 4 仿真实验

稀疏多带信号由式(1)模型产生<sup>[10]</sup>。

$$x(t) = \sum_{i=1}^q [s_i(t) * h(t)] \cos(2\pi f_i t) + w(t) \quad (11)$$

其中:  $s_i(t) \sim N(0, \sigma_i^2)$ , 实验中假设所有信号功率相同, 即  $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ;  $h(t)$  为窄带低通滤波器;  $q$  表示信号个数;  $w(t) \sim N(0, \sigma_w^2)$  为加性高斯白噪声, 带内信噪比  $SNR = \sigma^2 / \sigma_w^2$ 。

设置信号的有效带宽范围为  $[0, 500\text{MHz}]$ , 即  $f_{nyq} = 1\text{GHz}$ , 信号个数  $q = 3$ , 谱带数目  $N = 6$ , 选取通道数  $m = 30$ , 采样长度  $K = 101$ ; 载频  $f_i$  随机产生, 各信号互不交叠, 每个信号带宽都为  $B = 5\text{MHz}$ , 选取信道数  $L = 195$ 。则每个通道的采样率  $f_s = f_{nyq}/L = 5.13\text{MHz}$ , 平均采样率  $mf_s = 153.9\text{MHz}$ , 只有奈奎斯特采样率的 15.4%, 大大降低了采样率, 实现了低速采样。

每个信噪比下进行 500 次蒙特卡洛仿真实验, 以式(12) ~ (13) 所示的估计值的检测概率和虚警概率分析算法性能<sup>[15]</sup>。

$$P_d = \frac{\sum_{i=1}^M \text{Num}(b(i) \in \hat{b} | b(i) \in b)}{\sum_{i=1}^M q_i} \quad (12)$$

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^M \text{Num}(b^c(i) \in \hat{b} | b^c(i) \in b^c)}{LM - \sum_{i=1}^M q_i} \quad (13)$$

其中:  $q_i$  表示第  $i$  次实验产生的信号个数;  $\text{Num}(b(i) \in \hat{b} | b(i) \in b)$  表示一次实验中,实际支撑集  $b$  与估计支撑集  $\hat{b}$  中相同元素的个数;  $\text{Num}(b^c(i) \in \hat{b} | b^c(i) \in b^c)$  表示一次实验中,实际支撑集的补集  $b^c$  与估计支撑集  $\hat{b}$  中相同元素的个数。

图4和图5分别给出了在不同信噪比下 MUSIC\_M, MUSIC 和 OMP 算法的检测概率曲线和虚警概率曲线。由图4、图5可见:同信噪比下, MUSIC\_M 算法的检测概率比 MUSIC 算法的高,并且在 15dB 时接近于 1; 其虚警概率比 MUSIC 算法的低,并且在 15dB 时接近于 0。同信噪比下, MUSIC\_M 算法的检测概率和 OMP 算法的基本一样,虚警概率也基本一样。

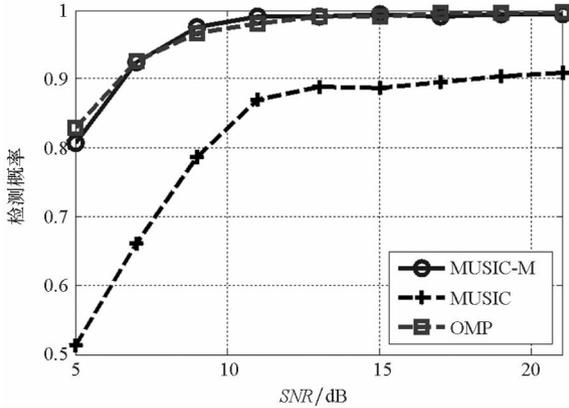


图4 MUSIC\_M, MUSIC, OMP 算法检测概率比较  
Fig. 4 Detection probability comparisons between MUSIC\_M, MUSIC and OMP

图6给出了信号个数  $q$  从 1 增加到 6 时, MUSIC\_M 算法与 OMP 算法在所用的平均时间。从图6中可以看出,在信号个数多于 1 时, MUSIC\_M 算法的处理时间远低于 OMP 算法,而且不随信号个数的增加而增加。

### 5 结论

本文采用 MWC 采样来解决宽带频谱感知中的采样率过高和多重集采样等硬件难以实现等问题;用 MDL 准则估计信号个数,并引入调整因子改进 MUSIC 谱估计算法,来估计信号的支撑集,

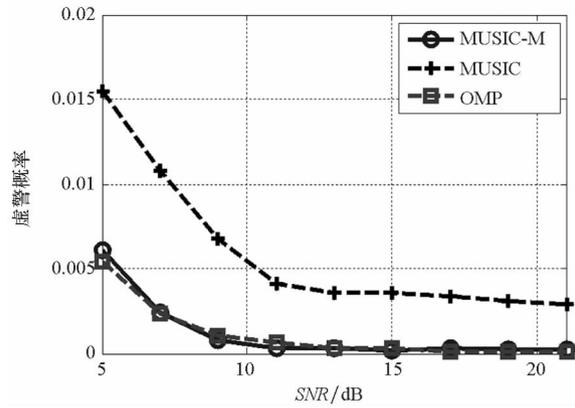


图5 MUSIC\_M, MUSIC, OMP 算法虚警概率比较  
Fig. 5 False alarm probability comparisons between MUSIC\_M, MUSIC and OMP

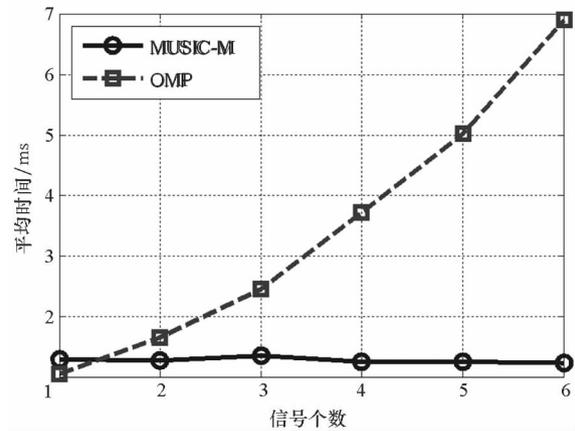


图6 信号数不同时 MUSIC\_M 与 OMP 算法耗时比较  
Fig. 6 Average time comparisons between MUSIC\_M and OMP

从而完成宽带频谱感知。与基于 OMP 的感知算法相比, MUSIC\_M 算法在不损失感知正确率的基础上,大大降低了算法复杂度,减少了感知时间,实现了宽带频谱快速感知。

### 参考文献 (References)

- [1] Bao D, Vito L D, Rapuano S. A histogram-based segmentation method for wideband spectrum sensing in cognitive radios [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2013, 62(7): 1900 - 1908.
- [2] Sharma S K, Chatzinotas S, Ottersten B. Compressive sparsity order estimation for wideband cognitive radio receiver [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(19): 4984 - 4996.
- [3] Mishali M, Eldar Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 375 - 391.
- [4] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [5] Landau H J. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions [J]. Acta Mathematica, 1967, 117(1): 37 - 52.

- [6] Cohen D, Eldar Y C. Sub-nyquist sampling for power spectrum sensing in cognitive radios: a unified approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(15): 3897–3910.
- [7] 王伟刚, 杨震, 胡海峰. 一种宽带频谱检测的空域频域压缩感知方法[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(2): 255–260.  
WANG Weigang, YANG Zhen, HU Haifeng. A method of space-frequency compressed sensing on wideband spectrum detection[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(2): 255–260. (in Chinese)
- [8] Zhang Z H, Li H S, Yang D P, et al. Space-time Bayesian compressed spectrum sensing for wideband cognitive radio networks [C]//*Proceedings of IEEE Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum*, 2010: 1–11.
- [9] Wang Y, Pandharipande A, Leus A. Compressive sampling based MVDR spectrum sensing [C]//*Proceedings of 2010 2nd International Workshop on Cognitive Information Processing*, 2010: 333–337.
- [10] Rashidi M, Haghghi K, Owrang A, et al. A wideband spectrum sensing method for cognitive radio using sub-Nyquist sampling [C]//*Proceedings of Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop*, 2011: 30–35.
- [11] 赵知劲, 张鹏, 尚俊娜, 等. 基于 MUSIC 算法的宽带频谱感知[J]. *计算机工程*, 2012, 38(13): 83–92.  
ZHAO Zhijin, ZHANG Peng, SHANG Junna, et al. Wideband spectrum sensing based on MUSIC algorithm[J]. *Computer Engineering*, 2012, 38(13): 83–92. (in Chinese)
- [12] Wax M, Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1985, 33(2): 387–392.
- [13] 杨鹏, 樊昀, 黄知涛, 等. 基于 Sub-Nyquist 采样的单通道频谱感知技术[J]. *国防科技大学学报*, 2013, 35(4): 121–127.  
YANG Peng, FAN Yun, HUANG Zhitao, et al. Single-channel spectrum sensing technique based on sub-Nyquist sampling [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2013, 35(4): 121–127. (in Chinese)
- [14] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666.
- [15] 赵知劲, 张鹏, 王海泉, 等. 基于 OMP 算法的宽带频谱感知[J]. *信号处理*, 2012, 28(5): 723–728.  
ZHAO Zhijin, ZHANG Peng, WANG Haiquan, et al. Wideband spectrum sensing based on OMP algorithm [J]. *Signal Processing*, 2012, 28(5): 723–728. (in Chinese)
- [16] Sturm B L, Christensen M G. Comparison of orthogonal matching pursuit implementations [C]//*Proceedings of 20th European Signal Processing Conference*, 2012: 220–224.