

在轨加注过程中组合体航天器动力学建模与分析*

杨雅君, 廖 瑛, 文援兰

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对在轨加注过程中质量分布随时间变化的组合体航天器, 研究动力学建模问题并对其动态特性进行分析。将航天器系统分为刚性组合体平台和贮箱内燃料两部分, 贮箱内的燃料视为质量、外形和位置连续变化的质量块, 将航天器系统抽象为一组有固定边界的变质量质点系; 在推导出变质量质点系一般力学方程的基础上, 通过对航天器结构进行一定限制消除方程中的反冲力和失调力矩, 以组合体平台主轴作为参考坐标系, 建立在轨加注过程中组合体动力学模型; 该模型除了参数时变的特点外, 与普通刚体动力学相比还含有阻尼项; 基于李雅普诺夫稳定判据, 对该时变动力学系统的动态特性进行分析。仿真计算展现了不同结构参数对姿态运动轨迹的影响, 也证明了理论分析的正确性。

关键词: 在轨加注; 时变参数; 变质量系统; 航天器动力学; 稳定性分析

中图分类号: V443.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2016)03-088-06

Dynamics modeling and analysis of on-orbit refueling assembled spacecraft

YANG Yajun, LIAO Ying, WEN Yuanlan

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A research was presented to solve the problem of dynamics modeling and characteristics analysis in the case of the mass distribution of the spacecraft changes obviously during the on-orbit propellant refueling process. The variable-mass vehicle was considered to consist of two parts: a rigid platform and the liquid propellant confined in tanks. The liquid in tanks was regarded as a finite number of lumped masses with time-varying mass, configuration and position, so that, the actual physics could be abstracted as a set of variable mass particles with fixed border. Then, the dynamics model of refueling spacecraft was established by using the general equations of mass-varying particles set. Based on some reasonable assumptions about the structure of vehicle, the misalignment moment and the reactive force were eliminated from equations. It is remarkable that the established model include time-varying parameters and damping terms. Besides, the dynamics characteristics of the model were analyzed by using the Lyapunov's stability criterion. Simulation results demonstrate that the difference structure of the vehicle effect the state trajectories dramatically, and prove that theoretic analysis is correct.

Key words: on-orbit refueling; time-varying parameters; variable mass system; spacecraft dynamics; stability analysis

在轨加注技术是空间在轨服务的重要组成部分, 通过对在轨运行的航天器进行推进剂加注补给, 不仅可以延长使用寿命、提高轨道机动能力, 还为增加有效载荷比重和降低发射成本提供了可能, 具有良好的经济效益和广泛的应用前景, 因此备受各航天大国的重视。现有的在轨加注技术要求服务航天器与目标航天器进行空间对接, 形成新的组合体后再将加注贮箱内的燃料经管路连续不断地传输到目标航天器贮箱中。

虽然在轨加注技术早已用于实践, 但相关文献却并不多见, 特别是在在轨加注过程中的航天器

动力学建模和分析, 仅查阅到文献[1]和文献[2]有所涉及。文献[1]考虑转动惯量的时变效应, 通过对角动量方程直接求微分得到姿态动力学方程, 所得到的方程与描述刚体姿态运动的欧拉方程相比多出一项与转动惯量变化率有关的项。文献[2]将贮箱内的燃料视为外形变化的匀质刚体, 详细推导了系统转动惯量随时间变化的公式, 将计算得到的系统转动惯量直接代入到欧拉方程中建立姿态动力学模型。上述两篇文献并没有对系统的运动特性进行分析。加注过程中, 燃料从加注贮箱转移到目标贮箱, 服务航天器质量随之

* 收稿日期: 2015-04-08

基金项目: 上海航天科技创新基金资助项目(SAST201251)

作者简介: 杨雅君(1987—), 男, 云南勐腊人, 博士研究生, E-mail: yajunsand@163.com;

廖瑛(通信作者), 女, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: liaoying1104@163.com

减少,目标航天器质量持续增加,可以借鉴变质量体系统的建模方法。文献[3]建立了考虑燃料消耗时质量和转动惯量随时间变化的飞艇的6自由度运动方程。文献[4]以固体火箭为背景,分析了有大量质量损耗时的自旋体姿态运动特性。文献[5]研究了在时变惯量矩和黏滞阻力影响下的非对称航天器的姿态运动,并对运动的混沌现象进行了深入分析。杨雅君等在文献[2]提出的简化条件基础上,对在轨加注过程中航天器系统的动力学建模和分析进行深入研究。

1 力学原理

对于加注过程中的组合体航天器,由于燃料传输造成系统质量分布持续变化,航天工程中常用的单刚体或多刚体建模方法不再适用,有必要重新审视建模所基于的力学原理。考虑一组有固定边界的变质量质点系^[6],如图1所示, \mathbf{R}_0 为固连参考坐标系原点的绝对位置矢量, \mathbf{R}_i 为质点 m_i 的绝对位置矢量, \mathbf{r}_i 为质点 m_i 相对参考坐标系原点 O 的位置矢量。因为质量分布随时间变化,系统质心位置也是时变的,因此体固连参考坐标系的原点选择在任意非系统质心的固定点上。

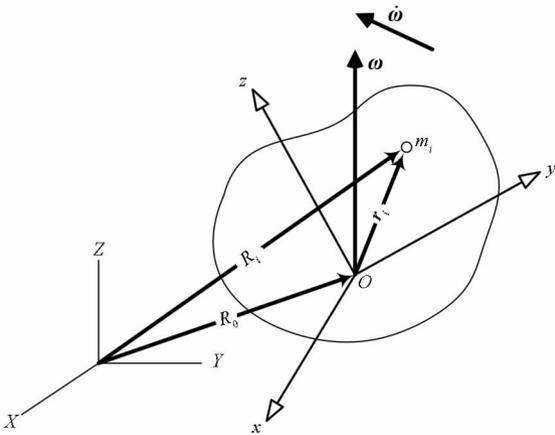


图1 边界固定的变质量质点系

Fig. 1 System of particles with varying mass and fixed boundary

在 t 时刻,系统相对参考坐标系原点 O 的角动量为:

$$\mathbf{h}_0 = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i) \quad (1)$$

其中, \mathbf{r}_i 为参考原点 O 指向质点 m_i 的矢量, $\dot{\mathbf{R}}_i$ 表示质点 m_i 相对惯性系 XYZ 的绝对速度。对式(1)等号两边同时求微分得:

$$\dot{\mathbf{h}}_0 = \sum [\mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{R}}_i)] + \sum (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i) \quad (2)$$

其中, $\sum [\mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{R}}_i)]$ 为外力作用产生的相

对于参考原点的力矩 \mathbf{M}_0 。根据几何关系,式(2)第二项可以改写为:

$$\sum (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i) = -\dot{\mathbf{R}}_0 \times m \dot{\mathbf{r}} \quad (3)$$

其中, m 表示 t 时刻系统总质量, \mathbf{r} 为相对体坐标系原点 O 的系统质心位置矢量。根据式(2)和式(3)可以写出系统的力矩方程为:

$$\mathbf{M}_0 = \dot{\mathbf{h}}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0 \times m \dot{\mathbf{r}} \quad (4)$$

式(4)表明,只有当原点 O 静止、质心相对原点 O 静止, $\dot{\mathbf{R}}_0$ 和 $\dot{\mathbf{r}}$ 平行时,力矩才等于角动量变化率。下面分析质点质量发生变化对力矩方程的影响。

考虑在 $t + \Delta t$ 时刻质点 m_i 移动到了 $\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i$ 位置,并分裂成两块 $m + \dot{m} \Delta t$ 和 $-\dot{m} \Delta t$,相对速度为 \mathbf{u}_i (如图2所示)。则 $t + \Delta t$ 时刻的系统的角动量变为:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 + \Delta \mathbf{h}_0 = & \sum [(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i) \times (m_i + \dot{m} \Delta t)(\dot{\mathbf{R}}_i + \Delta \dot{\mathbf{R}}_i)] + \\ & \sum [(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i) \times (-\dot{m} \Delta t)(\dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{u}_i)] \end{aligned} \quad (5)$$

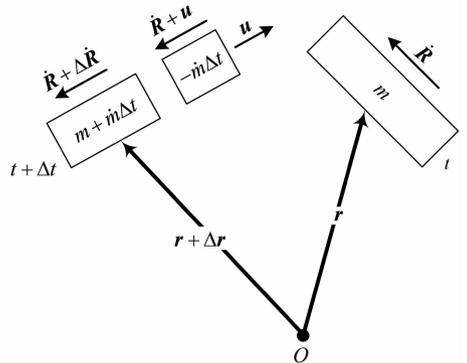


图2 质点 m 在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻角动量

Fig. 2 Angular momentum of element m at t and $t + \Delta t$

用式(5)减去式(2)并除以 Δt ,求 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限并忽略高阶小量,得到系统角动量变化率为:

$$\dot{\mathbf{h}}_0 = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{R}}_i) - \dot{\mathbf{R}}_0 \times m \dot{\mathbf{r}} - \sum (\mathbf{r}_i \times \dot{m}_i \mathbf{u}_i) \quad (6)$$

将式(6)代入式(4),得到质量变化时的力矩方程为:

$$\mathbf{M}_0 = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{R}}_i) - \sum (\mathbf{r}_i \times \dot{m}_i \mathbf{u}_i) \quad (7)$$

质点绝对加速度的一般表达式为:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_i = & \ddot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r}_i + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_i) + \\ & [\ddot{\mathbf{r}}_i] + 2\omega \times [\dot{\mathbf{r}}_i] \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $[\dot{\mathbf{r}}_i]$ 和 $[\ddot{\mathbf{r}}_i]$ 分别表示质点的相对速度和相对加速度。将式(8)代入式(6),同时引入惯性张量 \mathbf{J} 以及关系式 $\sum [\mathbf{r}_i \times (\dot{\omega} \times m_i \mathbf{r}_i)] = \mathbf{J} \cdot \dot{\omega}$ 和 $\sum \{\mathbf{r}_i \times [\omega \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)]\} = \omega \times \mathbf{J} \cdot \omega$,考虑质

量变化的力矩方程最终可以写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 = & -\ddot{\mathbf{R}}_0 \times m\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ & \sum \{ \mathbf{r}_i \times m_i [\ddot{\mathbf{r}}_i] \} + 2 \sum \{ \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times m_i [\dot{\mathbf{r}}_i]) \} - \\ & \sum (\mathbf{r}_i \times \dot{m}_i \mathbf{u}_i) \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $-\ddot{\mathbf{R}}_0 \times m\bar{\mathbf{r}}$ 为参考坐标系原点与系统质心不重合而产生的耦合力矩; $\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ 为描述刚体转动的欧拉方程项; $\sum \{ \mathbf{r}_i \times m_i [\ddot{\mathbf{r}}_i] \} + 2 \sum \{ \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times m_i [\dot{\mathbf{r}}_i]) \}$ 表示系统质量分布变化引起的诱导力矩; $-\sum (\mathbf{r}_i \times \dot{m}_i \mathbf{u}_i)$ 为质量改变引起的失调力矩, 值得注意的是当质点位置矢量 \mathbf{r}_i 和质量流相对速度 \mathbf{u}_i 平行时, 可以消除失调力矩。

边界固定的变质量质点系的在外力作用下, 瞬时质心的加速度和质量流的线动量会发生改变, 外力方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & m[\ddot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \ddot{\bar{\mathbf{r}}}] - \\ & \sum (\dot{m}_i \mathbf{u}_i) \end{aligned} \quad (10)$$

可见, 对于变质量质点组成的系统, 其力方程(10)和力矩方程(9)是相互耦合的。

2 动力学模型与分析

2.1 系统特点与假设

加注中的组合体航天器具有以下特点: 通过刚性对接机构的连接, 服务航天器壳体与目标航天器壳体之间没有相对运动, 形成一个刚性组合平台; 在液体管理装置的作用下贮箱内气-液完全分离, 燃料被气液分离面和贮箱壁约束成规则的几何体; 加注贮箱内的燃料通过管路向目标贮箱转移, 各贮箱内燃料的形状和质量持续变化。因此, 考虑将整个系统分成三个部分: 刚性组合体平台(整个系统除去燃料的部分)、加注贮箱内的燃料、目标贮箱中的燃料。

不考虑活动部件的运动, 刚性平台可以视为一个单刚体, 刚体的质量为 M_b , 相对自身质心 O 的惯性张量为 \mathbf{J}_b , 以 O 为原点, 以单刚体主轴为坐标轴建立系统的参考坐标系 $O-xyz$ 。为使推导过程简单, 不失一般性, 考虑只有一个加注贮箱和一个目标贮箱的情况, 加注贮箱内的燃料质量为 m_1 , 相对自身质心的惯性张量为 \mathbf{J}_1 , 质心相对参考坐标系原点的位置矢量为 \mathbf{r}_1 , 单位时间内质量变化率为 \dot{m}_1 , 燃料以相对速度 \mathbf{u}_1 离开加注贮箱; 目标贮箱内的燃料质量为 m_2 , 相对自身质心的惯性张量为 \mathbf{J}_2 , 质心相对参考坐标系原点的位置矢量为 \mathbf{r}_2 , 质量变化率为 \dot{m}_2 , 燃料以相对速度

\mathbf{u}_2 进入目标贮箱。在建模前, 先给出一些假设条件, 以简化模型的复杂程度。

①假设燃料为不可压缩流体; ②参考当前三轴稳定航天器对接技术和文献[2]的模型, 假设组合体平台的主轴系的 x 轴与对接轴重合, 且加注贮箱和目标贮箱纵轴也与对接轴重合; ③假设加注贮箱燃料出口处的法线方向与目标贮箱燃料入口处的法线方向同向且与对接轴平行; ④假设燃料出口截面积与入口截面积相等。系统结构如图3所示。

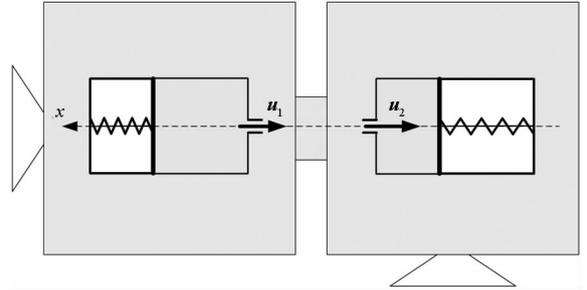


图3 组合体航天器结构

Fig.3 Configuration of assembled spacecraft

2.2 动力学模型

根据假设1, 加注贮箱和目标贮箱内燃料的质量变化率满足 $-\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = c > 0$ 。根据假设4, 燃料的流出速度和流入速度满足 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ 。在此基础上, 根据假设2和假设3, 可以消除式(9)中的失调力矩 $-\sum (\mathbf{r}_i \times \dot{m}_i \mathbf{u}_i)$ 和式(10)中的反冲力 $-\sum (\dot{m}_i \mathbf{u}_i)$ 。在轨加注过程中组合体的动力学模型为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 = & -\ddot{\mathbf{R}}_0 \times m\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ & \mathbf{r}_1 \times m_1 [\ddot{\mathbf{r}}_1] + \mathbf{r}_2 \times m_2 [\ddot{\mathbf{r}}_2] + \\ & 2\mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times m_1 [\dot{\mathbf{r}}_1]) + 2\mathbf{r}_2 \times (\boldsymbol{\omega} \times m_2 [\dot{\mathbf{r}}_2]) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & m\{\ddot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}} + \\ & 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \ddot{\bar{\mathbf{r}}}\} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 系统总质量为:

$$m = M_b + m_1 + m_2 \quad (13)$$

系统质心位置及其速度、加速度分别为:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m} \quad (14)$$

$$[\dot{\bar{\mathbf{r}}}] = \frac{c}{m}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{m_1}{m}[\dot{\mathbf{r}}_1] + \frac{m_2}{m}[\dot{\mathbf{r}}_2] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [\ddot{\bar{\mathbf{r}}}] = & \frac{\dot{c}}{m}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + 2\frac{c}{m}([\dot{\mathbf{r}}_2] - [\dot{\mathbf{r}}_1]) + \\ & \frac{m_1}{m}[\ddot{\mathbf{r}}_1] + \frac{m_2}{m}[\ddot{\mathbf{r}}_2] \end{aligned} \quad (16)$$

系统转动惯量为:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & \mathbf{J}_b + \sum_{i=1}^2 \mathbf{J}_i + \sum_{i=1}^2 [m_i(\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \mathbf{E}_{3 \times 3} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T)] - \\ & \frac{1}{m} \left\{ \left[\sum_{i=1}^2 (m_i \cdot \mathbf{r}_i) \right]^T \sum_{i=1}^2 (m_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{E}_{3 \times 3} - \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^2 (m_i \cdot \mathbf{r}_i) \left[\sum_{i=1}^2 (m_i \cdot \mathbf{r}_i) \right]^T \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

考虑加注过程中燃料匀速传输,即 $c = 0$,则贮箱内燃料质量时变公式为:

$$\begin{cases} m_1 = m_{10} - c(t - t_0) \\ m_2 = m_{20} + c(t - t_0) \end{cases} \quad (18)$$

其中, m_{10} 和 m_{20} 分别表示加注和目标贮箱内燃料的初始质量。对于转动惯量,需要明确受约束燃料的几何形状,考虑贮箱为圆柱体,根据均质圆柱体转动惯量计算公式,贮箱内燃料的惯量矩为:

$$\mathbf{J}_i = \text{diag} \left[\frac{1}{2} m_i \mathcal{R}_i^2, \frac{m_i}{12} (3\mathcal{R}_i^2 + l_i^2), \frac{m_i}{12} (3\mathcal{R}_i^2 + l_i^2) \right] \quad (19)$$

其中: $i = 1, 2$; \mathcal{R}_1 和 \mathcal{R}_2 为贮箱底面半径; l_1 和 l_2 为圆柱体母线长度。对于均质燃料,设密度为 ρ ,则母线长度随时间变化的公式为:

$$l_i = m_i / (\rho \pi \mathcal{R}_i^2), \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

根据式(20)并考虑贮箱的安装方式,贮箱内燃料的质心位置及其变化率分别为:

$$[\dot{\mathbf{r}}_i] = \left[-\frac{c}{2\rho\pi\mathcal{R}_i^2}, 0, 0 \right]^T, \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i0} + \left[-\frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_i^2}, 0, 0 \right]^T \quad (22)$$

其中, $\mathbf{r}_{10} = [r_1 \ 0 \ 0]^T$ 和 $\mathbf{r}_{20} = [r_2 \ 0 \ 0]^T$ 分别为加注贮箱和目标贮箱内燃料的初始质心位置。

设参考坐标系 $O - xyz$ 中组合体平台的惯量矩为 $\mathbf{J}_b = \text{diag}(J_{bx}, J_{by}, J_{bz})$, 将式(19) ~ (22)代入式(12) ~ (17)中并展开,整理出状态方程形式的数学模型。

$$\begin{cases} \ddot{R}_x = \frac{1}{m} [F_x + A \cdot (\omega_2^2 + \omega_3^2) - B] \\ \ddot{R}_y = -\kappa_1 (F_y - A \cdot \omega_1 \omega_2 - D \cdot \omega_3) + \\ \quad \kappa_3 [M_z - (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 - h \cdot \omega_3] \\ \ddot{R}_z = -\kappa_2 (F_z - A \cdot \omega_1 \omega_3 + D \cdot \omega_2) - \\ \quad \kappa_4 [M_y - (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 - h \cdot \omega_2] \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1} [M_x - (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3] \\ \dot{\omega}_2 = -\kappa_4 (F_z - A \cdot \omega_1 \omega_3 + D \cdot \omega_2) - \\ \quad \kappa_5 [M_y - (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 - h \cdot \omega_2] \\ \dot{\omega}_3 = \kappa_3 (F_y - A \cdot \omega_1 \omega_2 - D \cdot \omega_3) - \\ \quad \kappa_6 [M_z - (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 - h \cdot \omega_3] \end{cases} \quad (23)$$

其中,

$$\kappa_1 = \frac{J_3}{A^2 - m \cdot J_3}, \quad \kappa_2 = \frac{J_2}{A^2 - m \cdot J_2},$$

$$\kappa_3 = \frac{A}{A^2 - m \cdot J_3}, \quad \kappa_4 = \frac{A}{A^2 - m \cdot J_2},$$

$$\kappa_5 = \frac{m}{A^2 - m \cdot J_2}, \quad \kappa_6 = \frac{m}{A^2 - m \cdot J_3},$$

$$A = m_1 \left[r_1 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \right] + m_2 \left[r_2 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \right],$$

$$B = \frac{c^2}{\rho\pi} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_2^2} - \frac{1}{\mathcal{R}_1^2} \right),$$

$$D = 2c(r_1 - r_2) + \frac{[c^2(t-t_0) - cm_1]}{\rho\pi\mathcal{R}_1^2} - \frac{[c^2(t-t_0) + cm_2]}{\rho\pi\mathcal{R}_2^2},$$

$$h(t) = -\frac{m_1 c}{\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \left[r_1 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \right] - \frac{m_2 c}{\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \left[r_2 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \right],$$

$$J_1 = J_{bx} + \frac{1}{2} m_1 \mathcal{R}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathcal{R}_2^2,$$

$$\begin{aligned} J_2 = & J_{by} + \frac{m_1}{12} (3\mathcal{R}_1^2 + l_1^2) + \frac{m_2}{12} (3\mathcal{R}_2^2 + l_2^2) + \\ & m_1 \left[r_1 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \right]^2 + m_2 \left[r_2 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \right]^2 - \\ & \frac{1}{m} \left\{ m_1 \left[r_1 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \right] + m_2 \left[r_2 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \right] \right\}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 = & J_{bz} + \frac{m_1}{12} (3\mathcal{R}_1^2 + l_1^2) + \frac{m_2}{12} (3\mathcal{R}_2^2 + l_2^2) + \\ & m_1 \left[r_1 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \right]^2 + m_2 \left[r_2 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \right]^2 - \\ & \frac{1}{m} \left[m_1 \left(r_1 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_1^2} \right) + m_2 \left(r_2 - \frac{c(t-t_0)}{2\rho\pi\mathcal{R}_2^2} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

从式(23)可见,姿态变量 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ 的变化不受线位移变量 $\mathbf{R} = [R_x \ R_y \ R_z]^T$ 的影响,可以单独对其进行研究。

2.3 姿态自由运动分析

无外力作用情况下,加注过程中组合体的姿态动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \eta_1(t) \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \eta_2(t) \omega_1 \omega_3 + \lambda_2(t) \omega_2 \\ \dot{\omega}_3 = \eta_3(t) \omega_1 \omega_2 + \lambda_3(t) \omega_3 \end{cases} \quad (24)$$

其中, $\eta_1(t) = -(J_{bz} - J_{by})/J_1(t)$,

$$\eta_3(t) = \frac{m[J_2(t) - J_1(t)] - A^2(t)}{A^2(t) - m \cdot J_3(t)},$$

$$\lambda_2(t) = \frac{m \cdot h(t) - A(t)D(t)}{A^2(t) - m \cdot J_2(t)},$$

$$\lambda_3(t) = \frac{m \cdot h(t) - A(t)D(t)}{A^2(t) - m \cdot J_3(t)}.$$

如果组合体质量分布相对 x 轴对称,即 $J_{bx} =$

J_{by} 时, 则 $\eta_1(t) \equiv 0, J(t) = J_2(t) = J_3(t), \eta(t) = \eta_2(t) = -\eta_3(t)$ 和 $\lambda(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t)$, 且角速度 ω_1 为常数, 设 $\Omega(t) = \eta(t)\omega_1$, 姿态动力学方程(24)具有线性时变系统的形式。

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t) & \Omega(t) \\ -\Omega(t) & \lambda(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

显然该系统具有一个平衡点 $[\omega_2 \ \omega_3]^T = [0 \ 0]^T$, 下面讨论这个线性时变系统(25)的运动特性。

定理 设 $x=0$ 为线性时变系统 $\dot{x} = G(t)x$ 的平衡点, $G(t)$ 对所有 $t \geq t_0$ 连续。若存在连续可微、有界的正定对称矩阵 $P(t)$, 即 $0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \forall t \geq t_0$, 满足微分方程:

$$-\dot{P}(t) = P(t)G(t) + G^T(t)P(t) + Q(t) \quad (26)$$

式中, $Q(t)$ 是连续的正定对称矩阵, 即 $\forall t \geq t_0$ 有 $Q(t) \geq c_3 I > 0$ 。则线性时变系统 $\dot{x} = G(t)x$ 的平衡点 $x=0$ 全局指数稳定。

证明: 略, 参见文献[7]。□

对于式(25)所示系统, 设 $P(t) = I$, 根据式(26)构造 $Q(t)$ 为:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\left(\begin{bmatrix} \lambda(t) & \Omega(t) \\ -\Omega(t) & \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda(t) & -\Omega(t) \\ \Omega(t) & \lambda(t) \end{bmatrix} \right) \\ &= -2\lambda(t)I \end{aligned}$$

可见, 当 $\lambda(t) < 0, \forall t > t_0$ 时, $Q(t)$ 是连续的正定对称矩阵, 此时 $\omega_2(t)$ 和 $\omega_3(t)$ 轨迹将指数收敛到 0。当 $\lambda(t) > 0$ 时, $\omega_2(t)$ 和 $\omega_3(t)$ 轨迹不确定, 可能是周期变化或发散的。

通过分析可以明确, 由于质量分布随时间改变, 加注过程中的航天器姿态运动与刚体航天器姿态运动相比存在本质差异。自旋单刚体航天器在不受外力作用时, 角速度轨迹呈周期变化, 而质量分布时变航天器动力学方程中存在阻尼项 $\lambda(t)$, 在时变阻尼项 $\lambda(t)$ 的影响下角速度轨迹可以收敛到 0, 但也存在发散的可能性。

3 仿真算例

通过两个仿真场景, 展现不同贮箱安装位置对角速度轨迹的影响。仿真中设定的模型参数见表 1。

以角速度 $\omega(t_0) = [0.1, 0.1414, 0.1414]^T$ 作为初值进行数值积分, 得到角速度随时间变化轨迹如图 4 所示, 同时也给出了时变阻尼系数的变化轨迹如图 5 所示。在场景 1 中, 加注贮箱安装在 x 轴负半轴, 目标贮箱安装在 x 轴正半轴, 整个仿真时间内阻尼系数 $\lambda_1(t)$ 随时间连续变化但保持为负, 此

时 ω_1 收敛到一个定值, ω_2 和 ω_3 收敛到 0。场景 2 与场景 1 贮箱安装方式相反, 此时, 阻尼系数 $\lambda_1(t)$ 保持为正, 角速度轨迹振荡发散。

表 1 仿真参数设置

Tab. 1 Parameter values in simulation

参数	场景 1	场景 2
安装位置	$r_{10} = [-1 \text{ m} \ 0 \ 0]^T$ $r_{20} = [1 \text{ m} \ 0 \ 0]^T$	$r_{10} = [1 \text{ m} \ 0 \ 0]^T$ $r_{20} = [-1 \text{ m} \ 0 \ 0]^T$
燃料质量		$m_{10} = 900 \text{ kg}$ $m_{20} = 100 \text{ kg}$
贮箱半径		$\mathcal{R}_1 = 0.5 \text{ m}$ $\mathcal{R}_2 = 0.6 \text{ m}$
平台质量		$M_b = 100 \text{ kg}$
平台惯量矩		$J_{bx} = 10 \text{ kg} \times \text{m}^2$ $J_{by} = 15 \text{ kg} \times \text{m}^2$ $J_{bz} = 20 \text{ kg} \times \text{m}^2$
传输流速		$c = 5 \text{ kg/s}$
燃料密度		$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

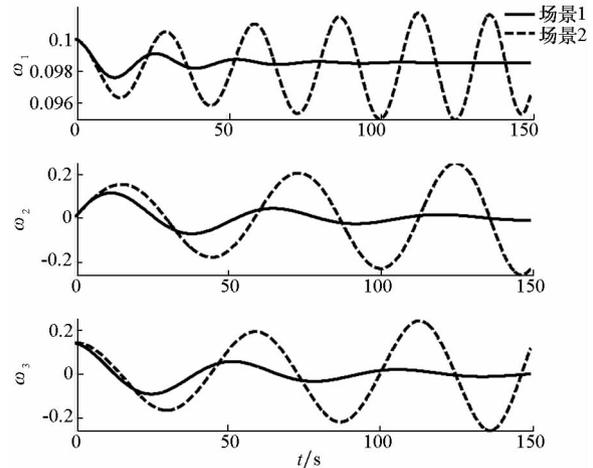


图 4 姿态角速度时间历程

Fig. 4 History of angular rate

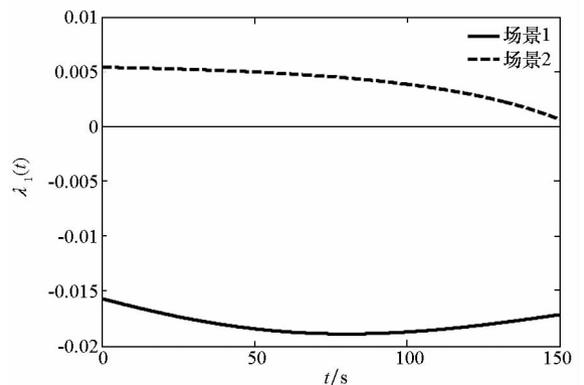


图 5 阻尼系数 $\lambda_1(t)$ 时间历程

Fig. 5 History of damping coefficient $\lambda_1(t)$

图6和图7分别为 $t = 100\text{ s}$, $\omega_1 = 0.01\text{ rad/s}$ 时,场景1和场景2的 $\omega_2 - \omega_3$ 流场图。从图6、图7可以清晰地看出,在场景1中 $\omega_2 - \omega_3$ 平面的原点为稳定焦点,而场景2中原点为非稳定焦点。

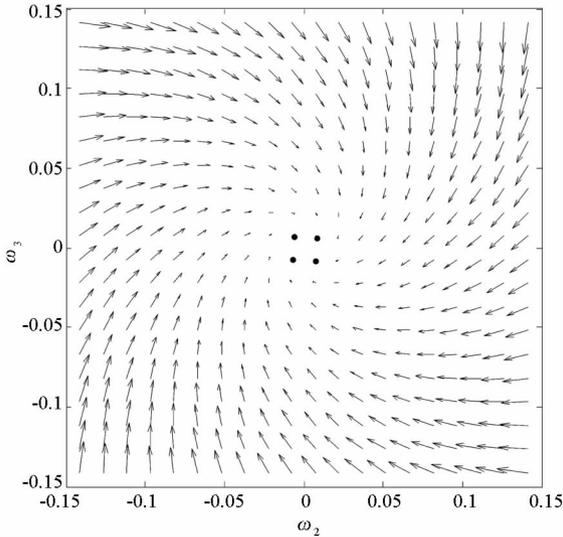


图6 场景1的流场图

Fig.6 Map of flow field in scene 1

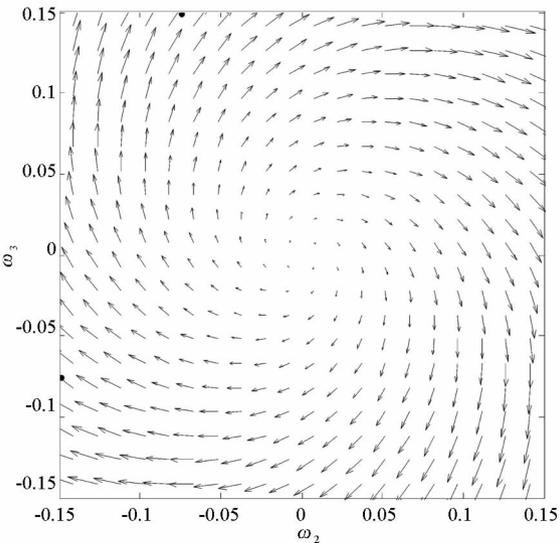


图7 场景2的流场图

Fig.7 Map of flow field in scene 2

从以上仿真分析中可以看出,燃料传输涉及的参数会对航天器姿态的动态特性带来直接影

响,而且这种影响所造成的结果并不唯一,既可能使姿态角速度稳定收敛,也可能使角速度振荡发散。

4 结论

基于变质量质点系一般力学原理建立了在轨加注过程中组合体航天器的动力学模型,利用该模型可实现对运动参数的数值计算,进而分析系统的动态特性。通过仿真分析可以看出,燃料传输对系统动态的影响是明显且复杂的,既可能使角速度稳定也可能使之发散。这为在轨加注航天器的结构和控制系统设计提供参考为加注过程中的控制系统设计奠定了基础。

参考文献 (References)

- [1] 王大奎, 高云峰. 卫星在轨加注姿态变化研究 [C]//北京力学学会第17届学术年会论文集, 2011: 2-3
WANG Dakui, GAO Yunfeng. Research on satellite attitude movement during on-orbit refueling [C]//Proceedings of Beijing Society of Theoretical and Applied Mechanic Conference, Beijing, 2011: 2-3. (in Chinese)
- [2] 张龙, 段广仁, 张永安. 在轨加注航天器的姿态动力学模型 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(5): 20-24.
ZHANG Long, DUAN Guangren, ZHANG Yongan. Attitude dynamics model of on-orbit refueling spacecrafts [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(5): 20-24. (in Chinese)
- [3] Waishek J, Dogan A, Bestaoui Y. Investigation into the time varying mass effect on airship dynamics response [C]//Proceedings of 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2009.
- [4] Eke F O, Mao T C, Morris M J. Free attitude motions of a spinning body with substantial mass loss [J]. Journal of Applied Mechanics, 2004, 71(2): 190-194.
- [5] Iarrea M, Lanchares V, Rothos V M, et al. Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(2): 393-409.
- [6] Thomson W T. Introduction to space dynamics [M]. USA: Dover Publications, 1986.
- [7] Khalil H K. 非线性系统 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2011.
Khalil H K. Nonlinear system [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011. (in Chinese)