

应用边界交叉法的高超声速滑翔飞行器多目标轨迹优化*

汪雷,葛健全,杨涛,丰志伟,李正楠
(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘要:针对高超声速滑翔飞行器复杂约束条件下多目标轨迹设计问题,基于边界交叉法和伪谱法提出多目标轨迹优化方法。分析高超声速滑翔飞行器复杂约束轨迹优化问题的特点,提出多目标轨迹优化问题。采用边界交叉法和伪谱法将多目标轨迹优化问题转化为一组单目标优化子问题,利用非线性规划算法分别求解。在优化过程中,将已求解子问题的解作为下一个子问题的初始值,求解最大横程和最小峰值热流轨迹优化问题。仿真结果表明:所提方法能够有效搜索到优化轨迹的 Pareto 前沿,可以为高超声速滑翔飞行器轨迹设计提供参考。

关键词:高超声速滑翔飞行器;轨迹优化;多目标优化;边界交叉法;高斯伪谱法
中图分类号:V414 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2016)04-137-06

Multi-objective trajectory optimization for hypersonic glide vehicle using boundary intersection method

WANG Lei, GE Jianquan, YANG Tao, FENG Zhiwei, LI Zhengnan

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The trajectory design for hypersonic glider vehicle subject to complex constraints is a multi-objective trajectory optimization problem. A multi-objective trajectory optimization method combining the boundary intersection method and the pseudospectral method was proposed. The multi-objective trajectory optimization problem was established based on the analysis of the features of trajectory for hypersonic glider vehicle. The multi-objective trajectory optimization problem was translated into a set of general optimization sub-problems by using the boundary intersection method and pseudospectral method. The sub-problems were solved by nonlinear programming algorithm. In the method, the solution that has been solved was employed as the initial guess for the next sub-problem. The maxima cross range and minimal peak heat problem was solved by the proposed method. The numerical results demonstrate that the proposed method can obtain the Pareto front of the optimal trajectory, which can provide reference for the trajectory design for hypersonic glider vehicle.

Key words: hypersonic glider vehicle; trajectory optimization; multi-objective optimization; boundary intersection method; Gauss pseudospectral method

助推-滑翔式飞行器以其增加射程、提高突防能力的独特优势正成为当前的研究热点。弹道优化技术是该类飞行器设计的关键技术之一,其再入弹道设计通常需要同时考虑多个性能指标,如纵程、横程、驻点最大热流、总加热量等。这些目标有些是冲突的,如纵程和射程、纵程和总加热量等。对于这种多个冲突目标的轨迹优化问题,工程中通常采用的方法是选择最重要的目标进行单目标优化,而将其他目标作为约束,或采用加权和方法聚合为一个目标进行优化。但是上述方法每次只能优化得到一个解,无法得到整个 Pareto 前沿。

近年来,随着非线性规划方法的广泛应用,出现了许多新的基于权重方法的多目标优化方法,其中最具有代表性的方法是边界交叉法。Das 等^[1]提出了求解多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem, MOP)的正规边界交叉(Normal Boundary Intersection, NBI)方法。之后, Messac 等^[2]提出了归一化正规约束(Normalized Normal Constraint, NNC)方法。这两种方法均属于边界交叉(Boundary Intersection, BI)法^[3],其基本思想是:在一般情况下,连续 MOP 的 Pareto 前沿是可达目标集左下边界的一部分。BI 方法的基本思想是寻找该边界与一组直线的交点来近似

* 收稿日期:2015-04-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11272345)

作者简介:汪雷(1982—),男,安徽利辛人,博士研究生,E-mail:star6851404@sohu.com;

杨涛(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:taoy90@163.com

Pareto 前沿。如果这一组直线在某种意义上是均匀分布的,则可获得对 Pareto 前沿的较均匀近似。BI 法将原 MOP 转化为一组单目标优化问题,并采用非线性规划对这些单目标问题逐一求解,并利用相邻单目标问题的解作为初始值来提高求解效率。Logist 等^[4]将 BI 应用于多目标轨迹优化问题的求解,用于快速产生多个 Pareto 前沿。

1 滑翔飞行器轨迹优化模型

1.1 三自由度再入运动模型

由于滑翔飞行器为升力体,弹体扁平,常采用倾斜转弯(Bank To Turn, BTT),可认为飞行中侧滑角保持为零。不考虑地球旋转,建立三自由度运动模型,其中位置参数以地心距 r 、经度 λ 和纬度 ϕ 三个参数来描述,速度参数由速度大小 V 、速度倾角 θ 和速度偏角 σ 确定。速度倾角 θ 是速度矢量与当地水平面的夹角,速度矢量指向水平面上方则 θ 为正。速度偏角 σ 是速度矢量在当地水平面投影与正北方向的夹角,从正北方向到速度矢量顺时针旋转时 σ 为正。由上述参数表示的无动力三自由度再入运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{V} = -\frac{X}{m} - g\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{Y\cos\nu}{mV} + \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V}\right)\cos\theta \\ \dot{\sigma} = \frac{L\sin\nu}{mV\cos\theta} + \frac{V\cos\theta\sin\sigma\tan\phi}{r} \\ \dot{\phi} = \frac{V\cos\theta\cos\sigma}{r} \\ \dot{\lambda} = \frac{V\cos\theta\sin\sigma}{r\cos\phi} \\ \dot{r} = V\sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

其中, ν 为侧倾角,表示升力方向与包含速度矢量的铅垂面之间的夹角,从飞行器尾部向前看,若升力方向向右倾斜,则侧倾角为正。

从最优控制的角度看,再入动力学系统的状态变量就是飞行器的位置参数、速度参数,控制变量就是攻角、侧倾角,弹道优化设计的目的就是寻找最优的攻角、侧倾角曲线,使得性能指标最小化。

1.2 弹道约束条件

1.2.1 气动热约束

再入弹道设计必须考虑气动加热对热防护系统(Thermal Protection System, TPS)的影响,TPS 材质确定了飞行器表面温度、驻点热流的极限。通常对沿弹道飞行的总吸热量与驻点最大热流进

行限制。驻点热流约束为:

$$\dot{Q} = k_s \rho^n V^m < \dot{Q}_{\max} \quad (2)$$

其中: \dot{Q} 表示热流, kW/m^2 ; k_s 为取决于飞行器头部形状的热流传递系数;驻点最大热流约束依 TPS 材质而定; m, n 为常数,对于超高声速再入问题,可取 $m = 3$ 或 $m = 3.15, n = 0.5$ 。

1.2.2 过载约束

飞行器再入时必须考虑过载对内部结构的影响。飞行器在再入段总过载通常较小,总过载约束对滑翔式飞行器再入影响不是很严重,再入段主要考虑法向过载约束,即

$$n_y = \frac{Y\cos\alpha + X\sin\alpha}{mg_0} < n_{y\max} \quad (3)$$

1.2.3 动压约束

主要考虑动压对飞行器姿态控制系统和稳定性的影响。动压是飞行力学中最重要量,空气动力和力矩与动压直接相关,它影响气动控制面的执行效率以及飞行器的稳定性。过大的铰链力矩将可能损坏舵面控制机构,而且姿态稳定性(特别是侧向稳定性)要求动压在一定范围之内,以满足飞行控制系统对稳定性的要求。动压 q 应满足:

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2 < q_{\max} \quad (4)$$

1.2.4 平衡滑翔约束

再入飞行器应具有充分的机动能力以满足制导控制系统的要求。当弹道高度过高时,由于空气稀薄,可获得的升力不足以平衡重力,一旦飞行器受到扰动,飞行器将有可能跟踪不上预定弹道,从而影响制导性能,甚至导致无法完成飞行任务。为保证弹道的可控性,必须保证沿弹道飞行器可获得的最大升力能够平衡其他力,即满足:

$$Y_{\max} > mg - m \frac{V^2}{r} \quad (5)$$

1.2.5 禁飞区约束

禁飞区指设计弹道不能经过的区域,主要是考虑规避敌方探测和突防而增加的约束。为便于处理,不考虑禁飞区的高度约束,认为禁飞区为无限高圆柱形区域,弹道和该区域不能相交,弹道点与禁飞区中心在地面投影的最短距离大于禁飞区半径时即满足:

$$\min \{ R_0 \cdot a\cos[\sin\phi\sin\phi_{\text{nfz}} + \cos\phi\cos\phi_{\text{nfz}} \cdot \cos(\lambda - \lambda_{\text{nfz}})] \} > R_{\text{nfz}} \quad (6)$$

其中, λ_{nfz} 和 ϕ_{nfz} 表示禁飞区中心经、纬度, R_{nfz} 表示禁飞区半径。

1.2.6 控制量约束

在飞行过程中由于受硬件限制,攻角、侧倾角

等控制量的幅值不能超过约束值。

$$\begin{cases} \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \\ \nu \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}] \end{cases} \quad (7)$$

1.2.7 终端约束

终端约束由飞行任务决定,如要求击中目标,则弹道终端位置参数应与目标一致,即

$$\begin{cases} r(t_f) = r_f \\ \lambda(t_f) = \lambda_f \\ \phi(t_f) = \phi_f \end{cases} \quad (8)$$

作为对地打击的再入飞行器,根据作战需要,通常还对落地弹道倾角和落地速度有要求,即

$$\begin{cases} \theta(t_f) > \theta_f \\ V(t_f) > V_f \end{cases} \quad (9)$$

1.3 性能指标

对飞行器性能分析时,常取射程最大、末速最大等性能指标。如取终端射程最大为优化指标时,

$$J = \min[-L(t_f)] \quad (10)$$

当弹道终点位置确定,需得到一条标准弹道时,常取路径最短、时间最短、总加热量最小等优化指标。如选择总加热量最小作为性能指标时,

$$J = \min \int_{t_0}^{t_f} \dot{Q} dt \quad (11)$$

2 多目标轨迹优化方法

2.1 多目标轨迹优化问题

多目标轨迹优化与普通轨迹优化问题的主要区别在于优化的目标函数较多,其他约束条件均不变。参考单目标轨迹优化问题,多目标轨迹优化问题可以表述^[4]为:

确定控制函数 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ (和时间 t_0, t_f),使得多个性能函数最小。

$$\min \mathbf{J} = (J_1, \dots, J_m)^T \quad (12)$$

满足状态方程约束:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), p, t], \quad t \in [t_0, t_f] \quad (13)$$

满足边界条件约束:

$$G(x_0, t_0; x_f, t_f; p) = 0 \quad (14)$$

满足路径约束:

$$C[x(t), u(t), p, t] \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (15)$$

其中, \mathbf{x} 为状态变量,边界条件 $x_0 = x(t_0)$, $x_f = x(t_f)$ 。

单个目标函数为:

$$J_i = h_i[x(t_f), p, t_f] + \int_0^{t_f} g_i[x(t), u(t), p, t] dt \quad (16)$$

式(12)~(16)给出了多目标轨迹优化的数学模型,求解这类问题的一个有效方法是通过参数化方法(如常用的伪谱法)转化为一般的多目标参数优化问题,采用基于梯度的算法(如序列二次规划算法)进行求解。Logist 等^[4]在其最优控制和动态优化工具箱的基础上考虑了多种分解方法(加权和法、正规边界交叉法、正规约束法等),具备了多目标轨迹优化求解能力。

2.2 正规边界交叉法

为了克服加权和方法的缺陷,Das 等^[1]提出的 NBI 方法的基本思想是寻找该边界与一组直线的交点来近似 Pareto 前沿。在一般情况下,连续 MOP 的 Pareto 前沿是可达目标集左下边界的一部分。如果这一组直线在某种意义下是均匀分布的,则可获得对 Pareto 前沿的一个近似。

NBI 方法的计算过程^[1]为:首先找到单目标最优点;然后在目标空间建立一个过单目标最优点的超平面(Das 定义为个体最小凸包(Convex Hull of Individual Minima, CHIM))并构建一组该超平面的(拟)法线;最后通过单目标优化方法求解(拟)法线与可达目标集的左下边界的交叉点得到近似 Pareto 前沿。NBI 方法的单目标优化问题为:

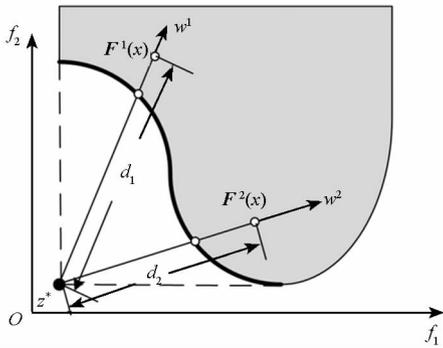
$$\begin{cases} \max & g^{bi}(\mathbf{x} | \mathbf{w}, z^*) = d \\ \text{s. t.} & \Phi \mathbf{w} + d \hat{\mathbf{n}} = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (17)$$

其中: \mathbf{w} 是权重(方向)矢量; Φ 是 $m \times m$ 的配置矩阵,其第 i 列的元素为 $F(x_i^*) - z^*$; $\hat{\mathbf{n}}$ 是从 CHIM 到理想点的拟法线。约束 $\Phi \mathbf{w} + d \hat{\mathbf{n}} = F(\mathbf{x})$ 保证解 \mathbf{x} 对应的目标函数位于拟法线上,优化目标 d 是目标矢量到 CHIM 的距离。

有时为了方便,也经常使用从理想点 z^* 出发的一组直线,这种情况下,聚合目标转化为寻找在某直线上可达目标空间到理想点距离最小的点,即

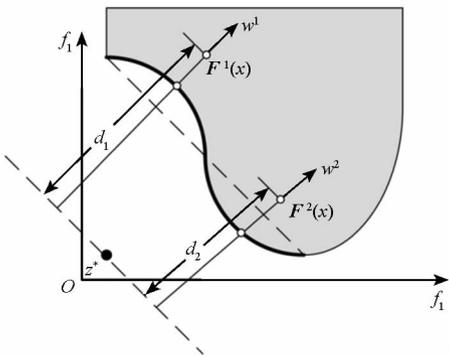
$$\begin{cases} \max & g^{bi}(\mathbf{x} | \mathbf{w}, z^*) = d \\ \text{s. t.} & F(\mathbf{x}) - z^* = d \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (18)$$

NBI 方法的优点是对 Pareto 前沿的形状不敏感,并且得到的 Pareto 最优点分布比较均匀。但是需要增加多个等式约束(与目标个数一致),并且有可能找到被支配解,需要对解集进行过滤。同时,对于某些具有两个以上目标的优化问题,该方法得到的解可能无法覆盖整个 Pareto 前沿^[5]。图 1 为 NBI 方法的示意图,其中图 1(a)是采用理想点出发的拟法线作为约束,而图 1(b)是采用 CHIM 上不同点的法线作为约束。



(a) 旋转

(a) Rotation



(b) 平移

(b) Translation

图 1 NBI 方法示意图

Fig. 1 Schematic diagram of NBI method

2.3 伪谱法

基本思想是采用 Legendre 多项式的根作为离散点,将连续最优控制问题的状态变量和控制变量离散化,并以离散点作为节点采用全区间 Lagrange 插值多项式来近似状态变量和控制变量,从而将轨迹优化的最优控制问题转换为非线性规划问题进行求解^[6]。

采用高斯伪谱法将高超声速滑翔飞行器多目标轨迹优化问题转化为一般多目标参数优化问题。高斯伪谱法转化后的非线性规划问题的 Karush-Kuhn-Tucker 条件,在一定条件下与离散的哈密顿边值问题的一阶最优性条件具有一致性^[7],并且可以由此得到原最优控制问题的协态变量,弥补了直接法无法得到协态信息的缺陷。为了在高斯伪谱法中应用边界交叉方法求解多目标轨迹优化问题,在高斯伪谱法工具箱 GPOPS 的基础上进行修改,修改如下:

- 1) 在目标函数中,对应每个目标分别输出其 Mayer 和 Lagrange 型指标;
- 2) 修改了稀疏矩阵模板;
- 3) 增加了正规边界交叉法。

正规边界交叉法通过改变方向矢量,获得不同的优化子问题,求解这些子问题可以得到多个 Pareto 最优点。在一般情况下,对于方向矢量相邻的子问题,由于其目标函数比较接近,可以认为其最优参数也是比较接近。因此,采用相邻子问题的最优解作为初始值以提高优化效率。

2.4 多目标轨迹优化流程

基于边界交叉法和伪谱法的高超声速滑翔飞行器多目标轨迹优化流程如下:

1) 构建多目标优化问题。根据任务设定选择优化目标,建立再入运动的动力学微分方程组,考虑状态变量和控制量需要满足的约束,然后输出多目标优化问题的数学模型。需要说明的是,选取的子优化目标需要具有冲突性,比如轨迹优化问题中,最小化热流密度和最大化横程以及最小总吸热量和最大射程,等等。

2) 多目标优化问题离散化。利用边界交叉法将流程 1 中所提出的多目标优化的数学模型离散化。自动生成权重矢量 $w = [w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_m]^T$, 权重矢量需要满足: $\sum_{i=1}^m w_i = 1, w_i \geq 0$ 。改变权重矢量,得到不同权重下的多个最优控制问题,它们的解对应不同的 Pareto 最优解。

3) 伪谱法求解单目标优化问题。在上一步中,通过改变权重矢量 w ,多目标优化问题已被分解成多个单目标优化问题。基于高斯伪谱法和序列二次规划求解单目标优化子问题,获得多目标 Pareto 最优前沿和相应的最优控制、状态函数曲线。

3 最大横程-最小峰值热流多目标轨迹优化

3.1 参数设置

仿真条件参考文献[8],具体参数如下。

3.1.1 飞行器参数

升力系数 $C_L(\alpha) = a_0 + a_1\alpha$, 阻力系数 $C_D(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2$, 驻点热流密度 $q = q_a(\alpha)q_r(h, v)$, $q_a(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3$, $q_r(h, v) = 2.01 \times 10^8 \sqrt{\rho} \times (10^{-4}v)^{3.07}$ 。上述计算模型中的其他参数如下:海平面大气密度 $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$, 参考高度 $h_r = 7.25 \text{ km}$, 飞行器参考面积 $S = 249.91 \text{ m}^2$, 飞行器质量 $m = 92.0792 \times 10^3 \text{ kg}$, 系数 $a_0 = -0.207, a_1 = 1.676, b_0 = 7.854 \times 10^{-2}, b_1 = -0.3529, b_2 = 2.040, c_0 = 1.067, c_1 = -1.101, c_2 = 0.6988, c_3 = -0.1903$ 。

3.1.2 优化条件

初始状态即再入点参数取为:地心距 $r_0 = R_0 +$

79.248 km, 经度 $\lambda_0 = 0^\circ$, 纬度 $\phi_0 = 0^\circ$, 速度 $V_0 = 7802.9 \text{ m/s}$, 速度倾角 $\theta_0 = -1^\circ$, 速度偏角 $\sigma_0 = 90^\circ$ 。

终端约束对飞行时间不做限制, 只考虑对高度、速度和弹道倾角的要求, 取 $r_f = R_0 + 24.4 \text{ km}$, $V_f = 762 \text{ m/s}$, $\theta_f = -5^\circ$ 。

过程约束考虑热流约束, 即 $q \leq q_U$; 同时考虑过载约束、动压约束。攻角、侧倾角约束为 $8^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$, $-80^\circ \leq \nu \leq 0^\circ$ 。

优化目标取为终端横程最大和峰值热流最小, 由于发射方向为正东, 且发射点位于赤道, 因此终端横程与终端纬度呈线性关系, 即 $\phi_f = \frac{L_f \cdot 180}{Re \cdot \pi}$, 这里为了便于求解简化目标为: $\min J = [-\phi_f, q_U]$ 。

为了易于采用梯度优化算法求解, 还需引入额外的参数变量 q_U , 同时也作为目标函数之一。

3.2 结果分析

采用基于边界交叉和伪谱法的多目标轨迹优化方法进行求解, 多目标 Pareto 前沿如图 2 所示, 结果中最小峰值热流解、最大横程解的优化目标见表 1。从结果可以看出, 给出的 Pareto 前沿点较为均匀, 通过较少的优化次数即可得到 Pareto 前沿较好的近似。最大横程解中的弹道横程为 3799.65 km, 对应的纬度为 34.17° , 其峰值热流为 170.9 W/cm^2 。最小峰值热流解中峰值热流为 61.16 W/cm^2 , 其横程为 3122.45 km, 对应的纬度为 28.08° 。其余点的目标值介于两个极限点之间, 说明两个目标呈现出较强的冲突性。另外, 从图 2 中的 Pareto 前沿可以看出, 在最大横程解附近(曲线的右上角)曲线梯度较大, 说明横程改善需要付出的代价(峰值热流急剧恶劣)较大, 在最大横程弹道设计时需要重点关注。

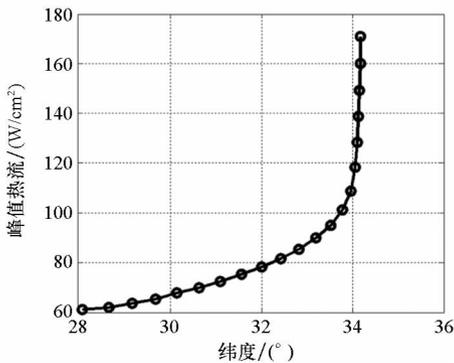


图 2 多目标轨迹优化的 Pareto 前沿

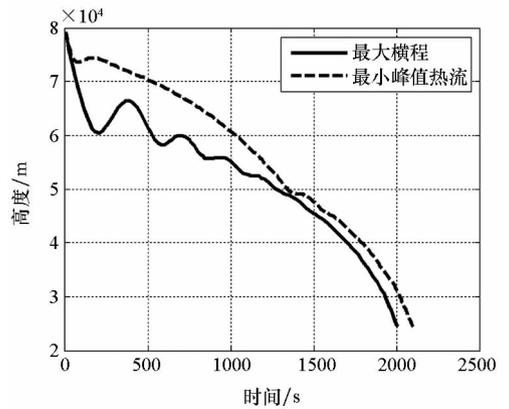
Fig. 2 Pareto-front of multiple target trajectory optimization solution

最小峰值热流和最大横程解的弹道曲线如图 3 所示, 图 3 分别给出了弹道高度、速度、纬度、峰值热流、攻角和侧倾角随时间变化的曲线。

表 1 多目标优化 Pareto 前沿的重要节点

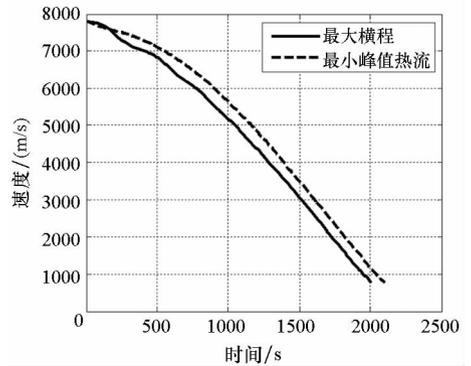
Tab. 1 Important node in Pareto-front of multiple target optimization solution

Pareto 前沿	最小峰值热流解	最大横程解
$\phi_f / (^\circ)$	28.08	34.17
$q_U / (\text{W}/\text{cm}^2)$	61.16	170.9



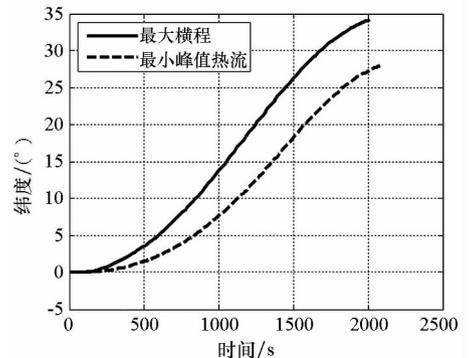
(a) 高度-时间曲线

(a) Altitude-time curve



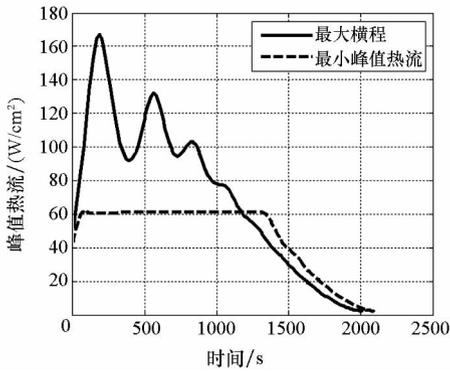
(b) 速度-时间曲线

(b) Speed-time curve

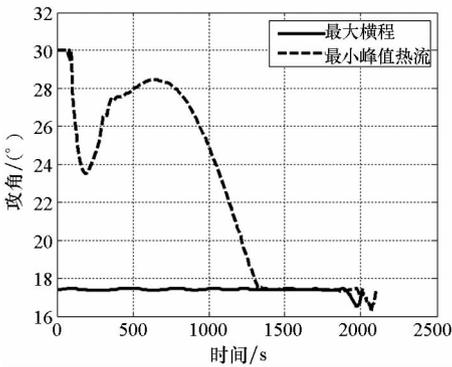


(c) 纬度-时间曲线

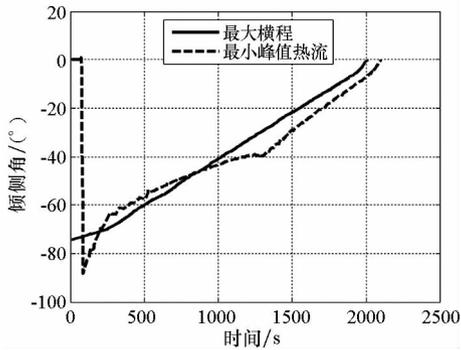
(c) Latitude-time curve



(d) 峰值热流 - 时间曲线
(d) Peak heat-time curve



(e) 攻角 - 时间曲线
(e) Angle of attack-time curve



(f) 侧倾角 - 时间曲线
(f) Angle of bank-time curve

图 3 Pareto 最优解中最小峰值热流和最大横程弹道的轨迹参数

Fig. 3 Trajectory parameters of minimum peak heat trajectory and maximum cross path trajectory in Pareto optimal solution

以上的仿真结果表明采用的基于边界交叉法和伪谱法的多目标轨迹优化能够有效地求解滑翔式飞行器多目标轨迹优化问题,且可对弹道设计提供有益的帮助。

4 结论

在高超声速滑翔飞行器弹道设计中,通常需要考虑多个相互冲突的优化目标,需要采用多目标优化方法进行求解。针对该问题,本文提出了基于边界交叉法和伪谱法的高超声速滑翔飞行器多目标轨迹优化方法,通过高斯伪谱法将最优控制问题转化为参数优化问题,利用正规边界交叉法将多目标优化问题转化为多个单目标优化问题,从而可以利用成熟的非线性规划算法进行求解。对高超声速滑翔飞行器最大横程 - 最小热流为目标的轨迹优化问题进行了数值仿真,获得了较均匀分布的 Pareto 前沿,可以为工程设计人员进行弹道设计时了解冲突目标的变化范围,并提供了多个候选解。该方法具有以下优点:①与加权和方法相比,能够在尚无工程实践经验时的反复设计;②与基于进化算法的多目标轨迹优化方法相比,可以用相对较小的计算量获得具有足够精度的 Pareto 最优解。该方法对于高超声速滑翔飞行器弹道设计具有一定的参考价值。

参考文献 (References)

- [1] Das I, Dennis J E. Normal boundary intersection; a new method for generating Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems [J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 8(3): 631 - 657.
- [2] Messac A, Ismail-Yahaya A, Mattson C A. The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2003, 25(2): 86 - 98.
- [3] Chang P C, Chen S H, Zhang Q, et al. MOEA/D for flowshop scheduling problems [C]//Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC, 2008: 1433 - 1438.
- [4] Logist F, Houska B, Diehl M, et al. Fast Pareto set generation for nonlinear optimal control problems with multiple objectives[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 42(4): 591 - 603.
- [5] Motta R D S, Afonso S M B, Lyra P R M. A modified NBI and NC method for the solution of N-multiobjective optimization problems [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012, 46(2): 239 - 259.
- [6] Jorris T R. Common aero vehicle autonomous reentry trajectory optimization satisfying waypoint and no-fly zone constraints[D]. USA: Air University, 2007.
- [7] Benson D A, Huntington G T, Thorvaldsen T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(6): 1435 - 1440.
- [8] Betts J T. Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming[M]. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.