

应用抗差无迹卡尔曼滤波的再入弹道处理技术*

李 蝉,张士峰,张力军

(国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘要:针对现有无迹卡尔曼滤波在再入弹道处理中可能出现的异常观测、观测随机误差模型不准确以及动力学模型不合理等问题,在无迹卡尔曼滤波中引入自适应与抗差估计理论,研究适用于再入弹道处理的自适应抗差滤波方法。该方法可以自适应地估计测量噪声等价协方差阵和状态噪声等价协方差阵,并可实现异常值的分离和维纳模型方差的自适应调整。数值仿真结果表明:该方法计算简单,并能有效减弱测量误差和动力学模型误差对弹道处理精度的影响。

关键词:再入弹道;无迹卡尔曼滤波;自适应;抗差估计

中图分类号:V448.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)01-001-05

Robust unscented Kalman filter for calculating reentry vehicle trajectory

LI Chan, ZHANG Shifeng, ZHANG Lijun

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The difficulties that unscented Kalman filter encounters when it is introduced in reentry vehicle trajectory were investigated. These difficulties include abnormal measurement, the inaccuracy of measurement random error model and dynamic model. The current study uses an adaptive robust filter that can produce the estimation of equivalent weight flexibly according to measurement noise and state noise, can distinguish abnormal measurement from normal measurement, and can estimate the variance of Wiener model self-adaptively. The simulated results testified that the filter is easy to implement and can reduce the bad influences derived from inaccuracy of measurement random error model and dynamic model.

Key words: reentry vehicle trajectory; unscented Kalman filter; self-adaptation; robust estimation

目前,针对导弹再入弹道跟踪测量问题,通常有脉冲雷达、光学观测设备和全球定位系统(Global Positioning System, GPS)观测等测量手段。在再入弹道处理方面,Kalman滤波等统计处理方法得到了广泛的应用,其计算精度依赖于构造准确的弹道运动方程、可靠的观测随机误差模型及合理的测量方程线性化模型。再入运动大气模型复杂,特别是弹头采用机动策略飞行时,利用精确的函数模型构造弹道运动方程十分困难。然而,随机误差模型的构造一般都基于验前信息,实际的测量却可能存在失真。因此,如何利用地面设备的观测数据和运动状态估值更新测量状态信息和补偿运动方程,成为提高再入实时弹道处理精度和可靠性的重要手段。与此同时,由于导弹飞行的复杂性和设备自身的问题,难免存在一定的异常观测值。传统的粗差别除方法并未考虑观

测数据与弹道运动模型的吻合情况,只能剔除比较明显的异常观测值,仍有相当一部分异常观测值被保留下来,从而影响了弹道估计的精度。

针对不同的应用背景,国内外学者提出了多种自适应Kalman滤波,有观测协方差阵及状态向量协方差阵自适应于观测误差和状态方程离散程度的Sage滤波^[1-2]、抗差估计和膨胀模型结合的自适应滤波^[3-5]等。随着非线性滤波方法的深入研究,无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)^[6]在实时弹道的处理中得到广泛关注和推广。本文将UKF与自适应估计、抗差估计及动力学模型补偿相结合,提出适用于再入弹道处理的自适应抗差滤波方法,并通过异常值检验、测量信息更新和运动补偿等抗差估计手段,减弱测量误差和动力学模型误差对弹道处理精度的影响。

* 收稿日期:2015-09-21

基金项目:国家863计划资助项目(2014AA7042018)

作者简介:李蝉(1982—),男,湖北黄石人,博士研究生,E-mail:lepku@163.com;

张士峰(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:zhang_shifeng@hotmail.com

1 再入弹道 UKF 模型

设再入弹道的状态方程为:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \Phi_{k+1,k}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{W}_k \quad (1)$$

式中: \mathbf{X}_k 为 t_k 时刻的状态向量; $\Phi_{k+1,k}$ 为状态转移函数(再入段主要考虑地球二体问题作用力、地球非球形引力 J_2 项、空气阻力和地球自转这几个方面的影响); \mathbf{W}_k 为状态噪声向量, 其协方差矩阵为 \mathbf{P}_k 。

t_k 时刻的观测模型为:

$$\mathbf{Y}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + \eta_k + \epsilon_k \quad (2)$$

式中: \mathbf{Y}_k 为 t_k 时刻的 n 维观测向量; η_k, ϵ_k 分别为观测向量的系统误差和随机误差, ϵ_k 的协方差矩阵为 \mathbf{R}_k 。

采用 UKF^[6], 设 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 为 t_k 时刻的状态向量估值, $\mathbf{P}(k|k)$ 为对应的协方差阵。现对状态向量 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 进行 sigma 点采样, 采样后的向量为 $\chi(k)$ 。

$$\chi(k) = [\hat{\mathbf{X}}_k \quad \hat{\mathbf{X}}_k \pm \sqrt{(n_x + \lambda)\mathbf{P}(k|k)}] \quad (3)$$

对应的权值为 W_i 。

$$W_i^{(m)} = \kappa / (n_x + \kappa) \quad (4)$$

$$\begin{cases} W_i^{(c)} = \kappa / (n_x + \kappa) + (1 - \alpha_1^2 + \beta) & i=0 \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1 / \{2(n_x + \kappa)\} & i=1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (5)$$

其中: 尺度参数 $\lambda = \alpha_1^2(n_x + \kappa) - n_x$, n_x 为状态向量维数, κ 为比例参数, 用于调节 sigma 点和 \bar{x} 的距离, 仅影响二阶之后的高阶矩带来的偏差, 一般取 $\kappa = 0$; $\sqrt{(n_x + \lambda)\mathbf{P}(k|k)}$ 表示正定矩阵 $(n_x + \lambda)\mathbf{P}(k|k)$ 的均方根矩阵(取为 $(n_x + \lambda)\mathbf{P}(k|k)$ 的 Cholesky 分解的上三角阵或下三角阵); α_1 为比例缩放因子, 控制 sigma 点的散布程度, 通常取区间 $(0, 1)$ 中一个较小的值; β 为引入 $f(\cdot)$ 高阶项信息的参数, 通常取 $\beta = 2$ 。

状态预测向量为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \chi_i(k+1|k) \\ &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \Phi(\chi(k)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{Q}_k + \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_i(k+1|k) - \\ &\quad \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}] [\chi_i(k+1|k) - \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}]^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \mathbf{Y}_i(k+1|k) \\ &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} h_k[\chi_i(k+1|k)] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\mathbf{Y}_i(k+1|k) - \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k}] \cdot \\ &\quad [\mathbf{Y}_i(k+1|k) - \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k}]^T \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xy} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} [\chi_i(k+1|k) - \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}] \cdot \\ &\quad [\mathbf{Y}_i(k+1|k) - \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k}]^T \end{aligned} \quad (10)$$

状态更新为:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{xy} [\mathbf{P}_{yy} + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1|k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{Y}_{k+1} - \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k}] \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{P}_{yy} + \mathbf{R}_k] \mathbf{K}_{k+1}^T \quad (13)$$

那么, 残差向量为:

$$\mathbf{V}_{k+1} = h(\hat{\mathbf{X}}_{k+1}) - \mathbf{Y}_{k+1} \quad (14)$$

新息向量为:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_{k+1} &= \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k} - \mathbf{Y}_{k+1} \\ &= h[\bar{\mathbf{X}}_{k+1|k}] - \mathbf{Y}_{k+1} \end{aligned} \quad (15)$$

状态误差向量为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{X}}_{k+1}} &= \hat{\mathbf{X}}_{k+1} - \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \\ &= \hat{\mathbf{X}}_{k+1} - \Phi_{k+1,k}(\hat{\mathbf{X}}_k) \end{aligned} \quad (16)$$

在 Sage 自适应滤波中自适应估计观测噪声和状态噪声均采用开窗法求解, 但该方法用于轨道求解时存在诸多问题, 在再入弹道的求解中也不适用。

2 应用 UKF 的抗差 M 估计

利用抗差估计原理实现 UKF 的自适应滤波, 基于观测误差方程(14)和状态误差方程(16)可构造如式(17)所示的准则函数式。

$$\Omega_{\min} = \mathbf{V}_k^T \bar{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{V}_k + \mathbf{V}_{\hat{\mathbf{X}}_k}^T \bar{\mathbf{P}}_k^{-1} \mathbf{V}_{\hat{\mathbf{X}}_k} \quad (17)$$

其中, $\bar{\mathbf{R}}_k$ 表示 \mathbf{Y}_k 的等价准协方差矩阵, $\bar{\mathbf{P}}_k$ 表示 \mathbf{X}_k 的等价准协方差矩阵。

式(17)称为 M-M 估计准则, 其意义是对观测值和参数先验值均采用 M 估计准则。利用式(17)可求得:

$$\bar{\mathbf{K}}_{k+1} = \mathbf{P}_{xy} [\mathbf{P}_{yy} + \bar{\mathbf{R}}_k]^{-1} \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1|k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1|k} + \bar{\mathbf{K}}_{k+1} [\mathbf{Y}_{k+1} - \bar{\mathbf{Y}}_{k+1|k}] \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k} - \bar{\mathbf{K}}_{k+1} [\mathbf{P}_{yy} + \bar{\mathbf{R}}_k] \bar{\mathbf{K}}_{k+1}^T \quad (20)$$

这就是基于 UKF 的 M-M 抗差滤波技术。

2.1 观测向量等价协方差阵

为了提高观测噪声统计的准确性, 首先利用抗差估计理论实现观测异常值的检验和分离, 再利用 N 个新息向量对观测残差的协方差矩阵自适应估计。

2.1.1 异常值分离

为了提高测量值随机误差模型自适应估计的

准确性,采用 IGGI 估计^[7]实现测量值的异常值分离,提高估计的精度。根据等价权原理,其抗差权为:

$$\psi(v_i) = \begin{cases} \bar{v}_i & |\bar{v}_i| \leq k_0 \\ k_0 \text{sign}(\bar{v}_i) & k_0 < |\bar{v}_i| \leq k_1 \\ 0 & |\bar{v}_i| > k_1 \end{cases} \quad (21)$$

$$w(v_i) = \begin{cases} 1 & |\bar{v}_i| \leq k_0 \\ k_0/|\bar{v}_i| & k_0 < |\bar{v}_i| \leq k_1 \\ 0 & |\bar{v}_i| > k_1 \end{cases} \quad (22)$$

其中: w 表示抗差权因子, $w(v_i) = \psi(v_i)/\bar{v}_i$, $v_i = Y_k(i) - \bar{Y}_{k|k-1}(i)$, $\bar{v}_i = v_i/\sigma_i$, σ_i 为测元 Y_i 的方差; k_0 和 k_1 可分别取1.5~3.0和2.5~5.0。IGGI方案属于有淘汰区的M估计,权因子之间变化较平缓,因此 k_0 和 k_1 的取值对残差小的观测值影响不大。为了避免抗差权带来的观测矩阵维数的变化,一般将淘汰区的 $w(v_i)$ 用较小的常值(取 10^{-3})代替0。

迭代等价权为:

$$\bar{r}_{ij} = r_{ij}/w(v_j) \quad (23)$$

式中, r_{ij} 为噪声方差权阵 R_k 的 i 行 j 列的参数。

2.1.2 观测向量协方差阵自适应估计

通过对滤波过程中新息序列统计分析,自适应估计出测量随机误差和系统误差低频项的方差。

积累一组长度为 N 的新息序列,其中:

$$\begin{aligned} V_k &= Y(k+1) - \bar{Y}(k+1|k) \\ &= [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \\ &\quad (k=1,2,\dots,N) \end{aligned} \quad (24)$$

为降低异常观测的影响,加入抗差权函数的影响。

$$\begin{aligned} \bar{V}_k &= W^T V_k \\ &= [w(v_1)v_1 \quad w(v_2)v_2 \quad \cdots \quad w(v_n)v_n] \end{aligned} \quad (25)$$

在 t_k 时刻,利用式(26)自适应计算测量值噪声协方差值。

$$\bar{R}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{V}_{k-i} \bar{V}_{k-i}^T \quad (26)$$

在 t_{k+1} 时刻,采用移动弧方法在新息序列 $[\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k, \dots, \bar{V}_N]$ 中每增加一个时刻的新息数据 \bar{V}_{N+1} ,则去掉最旧的新息数据 \bar{V}_1 。

2.2 状态向量等价协方差阵

对于 \bar{P} ,在单独测量值解析求解的基础上,整体控制状态噪声协方差矩阵,当状态预报值 \bar{X}_k 与设备解析解 \tilde{X}_k 相差较小时,采用开窗法估计,利用前 N 个时刻的状态预报残差,得到状态噪声等

价协方差矩阵。

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{V}_{\bar{X}_i} \bar{V}_{\bar{X}_i}^T \quad (27)$$

而当状态预报值 \bar{X}_k 与解析解 \tilde{X}_k 相差较大时,利用其残差 $|\Delta \tilde{X}_k|$ 构造自适应因子^[8]。

$$\alpha = \begin{cases} 1 & |\Delta \tilde{X}_k| \leq c \\ \frac{c}{|\Delta \tilde{X}_k|} & |\Delta \tilde{X}_k| > c \end{cases} \quad (28)$$

式中, c 可取为2.5。

$$|\Delta \tilde{X}_k| = \|\bar{X}_k - \tilde{X}_k\|/\sqrt{\text{tr}(P_{\bar{X}_k}^{-1})}$$

那么,状态噪声的等价协方差矩阵可表示为:

$$\bar{P}_k = \begin{cases} P_k & |\Delta \tilde{X}_k| \leq c \\ P_k/\alpha & |\Delta \tilde{X}_k| > c \end{cases} \quad (29)$$

2.3 动力学模型补偿

由于采用动力学模型描述再入弹道状态时,许多参数比如攻角、侧滑角、阻力系数等均未知,或者会根据弹道参数进行实时调整。因此,在实际任务中,单纯采用动力学模型作为跟踪滤波器的状态方程一般精度较差。在动力学模型的基础上,考虑弹头的各类参数的变化,将其不确定性部分补偿建模为一个维纳随机过程 $\dot{\gamma} = \omega_\gamma(t)$,其中 $\omega_\gamma(t)$ 是一个零均值白噪声,并通过其状态噪声的改变自适应地估计其方差。

$$\sigma_\gamma = \begin{cases} c_1 & |\Delta \tilde{X}_k| \leq c \\ c_2/\alpha & |\Delta \tilde{X}_k| > c \end{cases} \quad (30)$$

式中: σ_γ 为 $\omega_\gamma(t)$ 的方差;根据大量的试算结果, c_1 和 c_2 可分别取0~0.01和0.05~0.1。

综上所述,通过引入观测噪声的等价权矩阵、状态噪声等价权矩阵和维纳模型,并基于UKF法求解这些等价协方差矩阵和维纳模型方差的参考值,构成能够综合实现异常值分离、测量信息更新和运动补偿的实时抗差滤波方法。它不仅对观测值采用抗差估计,抵制观测异常的影响,并且通过采用自适应因子 α 适时调整状态噪声矩阵和预报模型,灵活控制动力学噪声异常的影响。

3 算例分析

为验证弹道解算抗差滤波算法的精度和可靠性(自由段和再入段弹道的稳步衔接),以一段被

动段弹道(含自由段和再入段)为例,假设其跟踪设备为 1 台脉冲雷达和 3 台光学设备,设备的数据采样周期 $T = 0.05 \text{ s}$, 雷达随机误差 $\sigma_R = 5 \text{ m}$, $\sigma_{A,E} = 50''$ (指标 $30''$), 系统误差 $\Delta_R = 7 \text{ m}$, $\Delta_{A,E} = 80''$; 光学设备随机误差 $\sigma_{A,E} = 40''$ (指标 $30''$), 系统误差 $\Delta_{A,E} = 30''$ 。根据设备的实际测量数据的特点,分别在脉冲雷达测量数据 6 处和光学测量数据 7 处增加 $15 \sim 100 \text{ m}$, $150'' \sim 1000''$ 的观测异常值。下面分别就异常观测、随机误差和动力学模型不准对弹道收敛速度和解算精度的影响进行仿真分析。图 1 为含有异常观测动力学模型的滤波结果,图 2 为考虑修正测量噪声协方差阵的滤波结果,图 3 为综合考虑修正预报模型、测量噪声和状态噪声协方差阵的滤波结果。

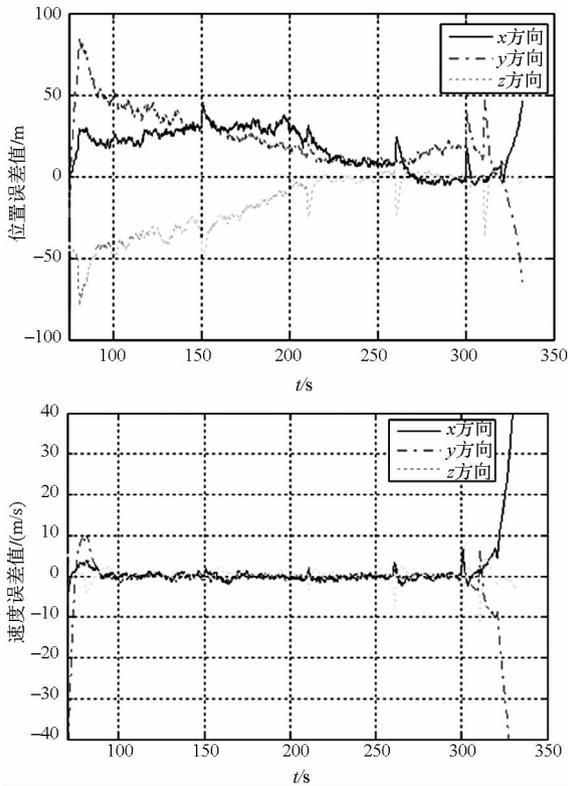


图 1 含有异常观测动力学模型的滤波结果
Fig. 1 Filtering results including exceptional measurement dynamics model

从计算的结果中可以发现:①基于动力学模型 UKF 滤波定轨受异常观测、测量噪声和状态噪声模型不准的影响较大,再入段甚至出现发散现象。②修正测量噪声协方差阵后,由于采用了抗差估计,当观测出现大量异常时,通过降低观测值的权值,有效地减弱异常观测的影响。通过自适应的估计噪声协方差,减弱随机噪声不准确对弹道解算精度的影响。③综合采用观测噪声和状态噪声等价协方差阵并修正预报模型后,通过自适

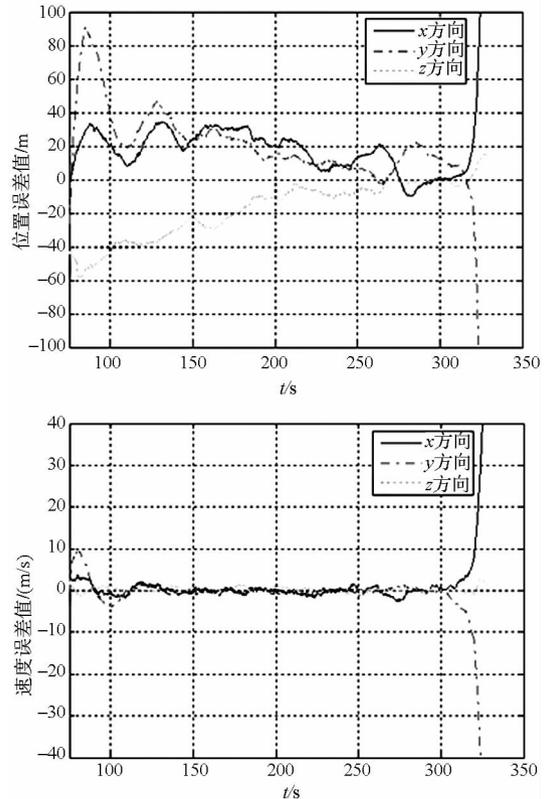


图 2 修正测量噪声协方差阵的滤波结果
Fig. 2 Filtering results including measurement error covariance matrix

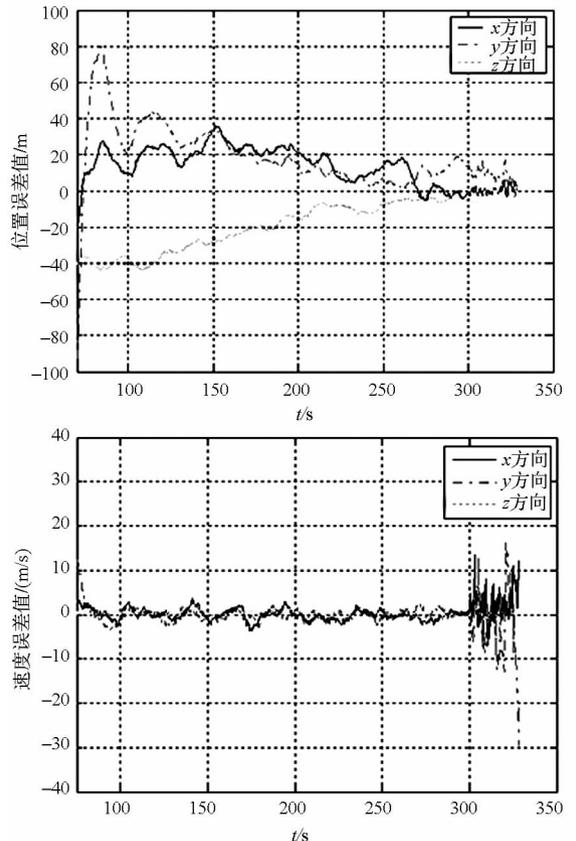


图 3 修正预报模型、测量噪声和状态噪声协方差阵的滤波结果
Fig. 3 Filtering results including predictive model, measurement noise and state covariance matrix

应的扩大状态噪声的方差和调整维纳模型的方差,有效地减弱状态模型噪声异常对弹道解算精度的影响,明显提高了再入段弹道的解算精度。

4 结论

基于UKF的自适应抗差滤波充分利用了非线性估计、自适应估计和抗差滤波的优点。当导弹自由段飞行时,利用抗差权函数和开窗估计,实现测量值异常值分离和观测噪声方差阵自适应估计;当导弹再入飞行其状态噪声模型描述不准确时,能够自适应地扩大状态噪声的方差和调整维纳模型的方差,实现再入飞行导弹的运动补偿,削弱状态噪声的变化对目标状态的影响。数值仿真验证了算法的有效性和可行性。

参考文献 (References)

- [1] Mohamd A H, Schutz K P. Adaptive Kalman filtering for INS/GPS [J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(4): 193 - 203.
- [2] Wang J, Steward M P, Tsakiri M. Adaptive Kalman filtering for intergration of GPS with GLONASS and INS [C]// *Proceedings of the Challenges of the First Decade IAG General Assembly Birmingham*, Springer, 1999: 325 - 330.
- [3] 杨元喜,文援兰. 卫星精密轨道综合自适应抗差滤波技术[J]. *中国科学 D 辑*, 2003, 33(11): 1112 - 1119.
- [4] 吴富梅,杨元喜,田育民. GPS/DR 组合导航自适应 Kalman 滤波算法[J]. *测绘科学技术学报*, 2008, 25(3): 206 - 208.
- [5] WU Fumei, YANG Yuanxi, TIAN Yumin. Adaptive filtering algorithm in GPS/DR integrated navigation [J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2008, 25(3): 206 - 208. (in Chinese)
- [6] Yang Y, He H, Xu G. Adaptively robust filtering for kinematic geodetic positioning[J]. *Journal of Geodesy*, 2001, 75(2): 109 - 116.
- [7] 周凤歧,孙东,周军. 基于非线性滤波技术的多航天器编队飞行相对导航[J]. *宇航学报*, 2005, 26(2): 212 - 216. ZHOU Fengqi, SUN Dong, ZHOU Jun. Relative navigation based on nonlinear filtering for multiple spacecraft formation flying[J]. *Journal of Astronautics*, 2005, 26(2): 212 - 216. (in Chinese)
- [8] 周江文,黄幼才,杨元喜,等. 抗差最小二乘法[M]. 武昌:华中理工大学出版社,1995. ZHOU Jiangwen, HUANG Youcai, YANG Yuanxi, et al. Robust least mean square error method [M]. Wuchang: Publishing House of Huazhong University of Science and Technology, 1995. (in Chinese)
- [9] Cui X Q, Yang Y X. Adaptively robust filtering with classified adaptive factors [J]. *Progress in Natural Science: Materials International*, 2006, 16(8): 846 - 851.