

粒子滤波匹配追踪重构算法*

刘玉磊¹, 梁俊¹, 肖楠¹, 胡猛¹, 杨萌²

(1. 空军工程大学信息与导航学院, 陕西西安 710077; 2. 中国人民解放军94755部队, 福建漳州 363000)

摘要:针对现有贪婪迭代类压缩感知重构算法对非高斯量测噪声抵抗性差的问题,提出一种盲稀疏度下粒子滤波匹配追踪稀疏信号重构算法。该算法将鲁棒性更高的 Huber 损失函数替代常规的二次损失函数,用来增加对非高斯噪声的抵抗能力;并引入粒子滤波实现对原始信号的最优估计,以削弱量测噪声的影响;在信号稀疏度未知的条件下,结合稀疏度自适应匹配追踪算法实现盲稀疏度下的原信号重构。理论分析和仿真结果表明,所提算法可以有效抵抗因非高斯噪声干扰或稀疏度未知导致的重构精度降低,且重构性能优于现有典型贪婪迭代类算法。

关键词:压缩感知;粒子滤波;非高斯噪声;盲稀疏度;重构

中图分类号:TN95 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)05-108-07

Particle filtered matching pursuit for signal reconstruction

LIU Yulei¹, LIANG Jun¹, XIAO Nan¹, HU Meng¹, YANG Meng²

(1. College of Information and Navigation, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;

2. The PLA Unit 94755, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: A particle filtered matching pursuit for compressive sensing of blind sparsity signal polluted by non-Gaussian noise was proposed, while the conventional detectors (e. g. least-squares estimates) were known to be sensitive to the non-Gaussian nature of noise. The proposed algorithm which combined the Huber cost (loss) function with an l_1 -norm did not need the sparse prior while it eliminated the interference of measuring noise by particle filter estimation. Meanwhile, sparsity adaptive matching pursuit was used to sift the effective support set so as to inverse the original states. Simulation results indicate that the proposed algorithm outperforms the existing greedy iterative inversions in the same condition, especially in the non-Gaussian noise situation.

Key words: compressive sensing; particle filter; non-Gaussian noise; blind sparsity; reconstruction

与传统的奈奎斯特采样理论相比,压缩感知技术利用信号在某一特定域的稀疏特性,可通过更少的样本数量来重构信号,是近些年来一种新兴的获得和处理稀疏信号的技术。正是由于压缩感知实现了样本采集与压缩同步进行,完成了信号采样到信息采样的转变,从而大大减轻了硬件的处理负担,被广泛地应用在生物医学、图像处理、信号处理等众多领域^[1-2]。

对于压缩感知技术而言,信号稀疏域和观测矩阵的选取是其前提与基础,而重构算法则是压缩感知研究中最为重要且关键的部分,信号重构的优劣决定了压缩感知理论的实用与否。目前,重构算法可以分为以下几类^[3]:①针对组合优化问题的贪婪迭代算法,通过迭代找出稀疏向量的

支撑集,利用受限支撑最小二乘估计来重构信号,主要包括匹配追踪算法 (Matching Pursuit, MP)、正交匹配追踪算法^[4] (Orthogonal Matching Pursuit, OMP)、分段正交匹配追踪算法^[5] (Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, StOMP)、压缩采样匹配追踪算法^[6] (Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)、稀疏度自适应匹配追踪算法^[7] (Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP)、迭代硬阈值法^[3] (Iterative Hard Thresholding, IHT) 以及稀疏梯度下降法^[3] (Gradient Descent with Sparsification, GraDeS)等;②通过将非凸问题转化为凸问题求解的凸优化算法,其中最常用的方法为基追踪算法^[8] (Basic Pursuit, BP)、梯度投影法^[9]、凸集交替投影法^[10]

* 收稿日期:2016-05-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61501496);陕西省自然科学基金资助项目(2012JM8004);航空科学基金资助项目(2013ZC15008)

作者简介:刘玉磊(1990—),男,河北大名人,博士研究生,E-mail:huapofeixue@sina.com;
梁俊(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:liangjunhja@sina.com

和内点迭代法^[11]等;③其他算法,如链式追踪算法^[12]、贝叶斯追踪算法^[13]等。贪婪算法是压缩重构算法中应用较为广泛的一类算法(主要为OMP及其改进算法),较凸优化算法来说,大大提高了计算效率。

针对稀疏模式未知且缓慢变化的稀疏信号,文献[14]将稀疏重构问题分为两个交错进行的阶段:①利用压缩感知方法获取信号支撑集中的子集元素;②根据获得的子集利用卡尔曼滤波进行降阶重构。该方法性能较好,但是计算复杂度较高。文献[15]利用伪量测方程来约束被估状态的 l_1 范数实现扩展量测方程的线性化;并通过 l_p 范数替代 l_1 范数取得了较好的卡尔曼滤波稀疏重构效果。文献[16]将信号的最小二乘估计作为卡尔曼滤波的初值,利用最小均方差准则对原信号进行稀疏重构。由于采用静态的状态方程,导致其方法具有一定的局限性。针对非线性非高斯系统,文献[17]基于Monte Carlo采样,通过引入递推Bayesian估计减小量测噪声的干扰实现稀疏信号的重构。尽管其递推Bayesian估计采用最小信号估计均方误差为目标,但在整个压缩感知算法迭代过程中仍采用最小误差平方和准则下进行残差的更新,导致噪声被引入到信号估计中,原信号不能被精确重构。

1 非高斯噪声下稀疏信号重构

考虑一个长度为 n 的有用矢量信号 \mathbf{y} ,其在某个已知正交稀疏基 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 下稀疏,则可写为:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{y}, \quad |\text{supp}(\mathbf{x})| \ll n \quad (1)$$

其中, $\text{supp}(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的支撑集。对 \mathbf{y} 通过量测矩阵 \mathbf{H} 进行投影,由于量测受环境因素影响通常含有噪声,因此可以表示为:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{H}'\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2)$$

其中, \mathbf{v} 是量测噪声, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}'\boldsymbol{\psi}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$)。

尽管众多的压缩感知算法被提出用以解决从带噪量测(如式(2)所示)中重构信号,但目前大部分算法假设噪声为高斯噪声。但在实际环境中,量测噪声 \mathbf{v} 常表现出非高斯特征,如通信系统中常见的Rayleigh噪声、雷达目标跟踪过程中遇到的Glint噪声等^[17]。针对这些非高斯噪声或受非高斯噪声污染的情况,迫切地需要可以抵抗噪声高斯性偏差的信号检测器。因此,一种鲁棒的压缩感知策略需要把握住以下几点:①近似稀疏的信号;②受未知噪声影响的信号,该未知噪声视环境情况而定,可以是非高斯的或者存在噪声不确定性(如只有噪声的近似分布)。一种典型的

针对噪声不确定分布的模型为 ε 污染分布^[18]:

$$\mathbf{F}_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\boldsymbol{\Gamma} + \varepsilon\boldsymbol{\Lambda} \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\Gamma}$ 是一个已知的高斯分布, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个未知的污染分布,并且 $0 \leq \varepsilon < 1$ 为已知参数,决定着高斯和非高斯分布的比例。

为了抵抗受 ε 污染的高斯噪声,将常规的二次损失函数替换为鲁棒性更高的Huber损失函数^[18],即:

$$l_H(x) = \begin{cases} x^2/2 & |x| \leq \delta_H \\ \delta_H(|x| - \delta_H/2) & |x| > \delta_H \end{cases} \quad (4)$$

从式(4)可以看出,Huber损失函数是 l_2 范数与 l_1 范数的混合:一方面,对高斯噪声通过较小的残差二次方(l_2 范数)来近似最优估计;另一方面,通过增大绝对偏差(l_1 范数)以确保对异常和重尾噪声分布的鲁棒性。

为了得到稀疏解,这里采用正则化的 l_1 范数形势,则:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min [l_H(\mathbf{z} - \mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}}) + \gamma \|\mathbf{x}\|_{l_1}] \quad (5)$$

其中, γ 为平滑系数,用来平衡Huber损失函数和 l_1 范数(稀疏度)。式(5)为无约束凸优化问题,由于这种非线性优化问题并且其在 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ 处不可积,所以并没有全局最小的封闭解。但是式(5)可以变形为带约束的最优化问题:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min l_H(\mathbf{z} - \mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{s. t.} \quad \|\mathbf{x}\|_{l_1} \leq \tau \quad (6)$$

其中, τ 为 \mathbf{x} 在 l_1 范数下的稀疏度界限。由式(6)可知,随着迭代次数的增加,使得 $l_H(\mathbf{z} - \mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}})$ 趋于某一极小值。考虑一种特殊情况,若该极小值趋于0时,即 $l_H(\mathbf{z} - \mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}}) \rightarrow 0$,则 $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}}$,此时噪声 \mathbf{v} 在一定程度上被引入到 $\mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}}$ 中,使得信号估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 不准,影响稀疏信号重构的精度。因此,需要引入滤波的思想从而削弱噪声对信号估计的影响。

2 粒子滤波

粒子滤波是一种基于递推贝叶斯估计和Monte Carlo方法的统计滤波方法,在解决非线性、非高斯估计问题中表现出了优异的性能。

为了满足滤波方法所需要的状态方程和量测方程,将传统压缩感知数学模型进行相应的变换。假设 \mathbf{x} 的演化方程,即状态方程为:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, \mathbf{w}_{k-1} 方差为 \mathbf{Q} 噪声序列。量测方程为:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}'\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (8)$$

利用最优贝叶斯估计理论,通过量测序列递推估计系统状态的后验概率分布 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k})$ 。

假定系统状态的先验概率分布已知,即 $p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{z}_0) = p(\mathbf{x}_0)$, 则滤波分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ 可以通过预测和更新两步来递推得到:

状态预测

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (9)$$

滤波更新

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \quad (10)$$

其中: $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$ 为 $k-1$ 时刻的滤波分布; $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 是一阶 Markov 过程,可由式(7)获得; $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ 是似然函数,可由量测方程式(8)得到。从式(9)可知,状态后验概率密度是由观测 \mathbf{z}_k 对先验概率密度进行修正而获得的,可式(9)无法得到解析解^[19]。

若可以从 $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$ 中抽取 N 个独立分布的样本 $\{\mathbf{x}_{0:k}^i\}_{i=1}^N$, 则状态的后验概率密度函数 (Posterior Density Function, PDF) 可以用经验分布逼近:

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}_{0:k} - \mathbf{x}_{0:k}^i) \quad (11)$$

2.1 重要性采样

在很多情况下,状态的 PDF 可能是多变量、高维、多峰、非解析、非标准的,若直接从中采样往往非常困难^[19]。针对以上情况,Marshall 引入了重要性采样 (Important Sampling, IS)^[20], 现已广泛地应用在粒子滤波中。重要性采样的基本思路是从易于采样的重要性密度函数 $q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$ 中独立抽取 N 个样本,这就避免了直接从状态的后验密度函数 $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$ 中采样的困难。

用采样得到的样本点的权值和来逼近 $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$:

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^{*i} \delta(\mathbf{x}_{0:k} - \mathbf{x}_{0:k}^i) \quad (12)$$

其中, ω_k^{*i} 为归一化权值,即:

$$\omega_k^{*i} = \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j} \quad (13)$$

式中, $\omega_k^i \propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})}$ 为粒子权值。

为了获得样本权值的递推表达式,先将状态的 PDF 进行如下变换:

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k})} \propto p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \quad (14)$$

其中,式(14)做了如下假设:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{z}_{1:k-1}) = q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})q(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \quad (15)$$

则权值的计算式为:

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{z}_{1:k})} \quad (16)$$

假定 k 时刻的重要性密度函数仅仅依赖于 \mathbf{x}_{k-1} 和 \mathbf{z}_k 。即 $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$, 那么式(16)中的权值更新为:

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{z}_k)} \quad (17)$$

则状态的后验分布就可近似为:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^{*i} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (18)$$

2.2 重采样

在粒子滤波算法中,粒子的退化现象严重影响了其性能。所谓的粒子退化现象就是指样本经过多次迭代计算以后,一般除了极少数粒子外,其他粒子所具有的权值接近零可以忽略不计,这就使得大量计算都浪费在对那些权值极小的粒子的更新过程中,然而这些粒子对 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ 的估计起不到任何作用。为了避免粒子退化,需要引入重采样。

为了有效地衡量粒子的退化程度定义了有效粒子数 $N_{\text{eff}}^{[19]}$ 则:

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{VAR}(\omega_k^i)} \quad (19)$$

其中, $\omega_k^i = \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)}$ 是每个粒子“真正的权值”, $\text{VAR}(\omega_k^i)$ 为 ω_k^i 的方差。由于实际中取值 ω_k^i 的计算较为困难,所以通常情况下利用归一化权值 ω_k^{*i} 来计算得到 N_{eff} 的估计值 \hat{N}_{eff} , 即:

$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^{*i})^2} \quad (20)$$

其中, ω_k^{*i} 可由式(13)计算得到。当 $N_{\text{eff}} \leq N$ 且 N_{eff} 越小时,粒子退化现象越严重。若出现较为明显的退还现象,例如 N_{eff} 远远低于所设定的门限时,则必须进行重采样。同时为了避免仅通过复制大权值粒子丢弃小权值粒子带来的粒子贫化现象,这里采用如下的重采样过程:从式(14)表示的近似离散密度函数进行 N 次采样,获得一组满足 $P_r(\mathbf{x}_k^{*i} = \mathbf{x}_k^j) = \omega_k^j$ 的新样本集合 $\{\mathbf{x}_k^{*i}\}_{i=1}^N$ 。因为根据式(14)采样所得到的粒子均相互独立同分布,所以任何粒子所具有的权值都为 $1/N$ 。

3 盲稀疏度下粒子滤波匹配跟踪算法

在实际应用中,往往面对的是盲稀疏度下的

信号重构,因此本文将采用属于贪婪追踪算法的信号稀疏度自适应的 SAMP 算法,实现在未知信号稀疏度情况下准确地对信号进行重构。盲稀疏度下粒子滤波匹配追踪算法 (Particle Filtered Matching Pursuit, PFMP) 如算法 1 所示。

算法 1 粒子滤波匹配追踪算法

Alg.1 Particle filter matching pursuit

输入: 观测向量 $\mathbf{z}_{M \times 1}$, 观测矩阵 $\mathbf{H}'_{M \times N}$, 稀疏度的自适应步长 $s (s = M/\ln N)$

输出: 重构信号 $\mathbf{x}_{N \times 1}$

- 1) 初始化: $\mathbf{r}^0 = \mathbf{z}, j = 0, \mathbf{T}^0 = \emptyset, L = s$;
- 2) 相关系数: $\lambda = \mathbf{H}'^T \mathbf{r}^j, j = j + 1$;
- 3) 更新候选集: 选择 λ 中最大的 L 个元素的位置, 并保存到集合 $\mathbf{S}_k, \mathbf{T}^j = \mathbf{S}_k \cup \mathbf{T}^{j-1}$;
- 4) 粒子滤波:
 - I 由先验概率 $p(x_0)$ 产生粒子集 $\{x_0^i\}_{i=1}^{N_s}$, 初始权值均为 $1/N_s$;
 - II 通过状态方程更新粒子, 计算重要性权值, 并归一化得到 $\hat{\omega}_n^i$;
 - III 计算有效粒子数 \hat{N}_{eff} , 若 $\hat{N}_{\text{eff}} \leq N$, 则进行重采样执行 I, 得到新的 N_s 个粒子, 否则继续;
 - IV 状态更新 $\hat{\mathbf{x}}_n = \sum_{i=1}^{N_s} \hat{\omega}_n^i \mathbf{x}_n^i$; 协方差更新 $\mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^{N_s} \hat{\omega}_n^i (\mathbf{x}_n^i - \hat{\mathbf{x}}_n) (\mathbf{x}_n^i - \hat{\mathbf{x}}_n)^T$
 - V 判断是否结束: 若 $n \geq L$ 或 $\|\hat{\mathbf{x}}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}\|_2 < \varepsilon$, 则令 $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_n$, 进入步骤 5, 否则 $n = n + 1$, 重复执行 I ~ V;
- 5) 从 $\hat{\mathbf{x}}$ 中选出权值最大的 L 项元素的位置, 记为集合 \mathbf{T}^j ;
- 6) 残差更新: $\mathbf{r}_{\text{new}} = \mathbf{l}_H (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}'^j \mathbf{x}_{\text{new}}^j)$;
- 7) 若 $\mathbf{r}_{\text{new}} = \mathbf{0}$ 则停止迭代进入步骤 8; 若 $\|\mathbf{r}_{\text{new}}\|_2 > \|\mathbf{r}^{j-1}\|_2$, 更新步长 $L = L + s$, 返回步骤 2 继续迭代; 若前面两个条件均不满足, 则令 $\mathbf{T}^j = \mathbf{T}^{j-1}, \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{\text{new}}$, 若 $j \leq M$ 停止迭代进入步骤 8, 否则返回步骤 2 继续迭代;
- 8) 重构所得 $\hat{\mathbf{x}}$ 在 \mathbf{T}^j 处有非零项, 其值分别为最后一次迭代所得 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{new}}^{j-1}$ 。

4 克拉美罗界

对于参数估计问题, 克拉美罗界 (Cramer Rao Bound, CRB) 为任何无偏估计量的方差确定了一个下限, 即不可能求得方差小于下线的无偏估计量, 并为比较无偏估计量的性能提供了一个标准。

由 CRB 得知估计量 $\hat{\mathbf{x}}$ 的下限为:

$$E[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] \geq [\mathbf{I}(\mathbf{x})]^{-1} \quad (21)$$

这里的矩阵不等式可以理解为半正定, $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ 为 Fisher 信息矩阵 (Fisher Information Matrix, FIM)。

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = E\left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^T\right] \quad (22)$$

基于粒子滤波的压缩感知算法的 CRB 可以计算如下。后验概率密度函数 $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ 可以推导为:

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = C \exp\left(-\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{H}'\mathbf{x})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}'\mathbf{x})}{2\sigma_v^2}\right) \quad (23)$$

其中, C 为一个常数。 $\ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ 的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{H}'\mathbf{x})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}'\mathbf{x})}{\sigma_v^2} \right) \\ &= \frac{\mathbf{H}'^T \mathbf{x} - \mathbf{H}'^T \mathbf{H}' \mathbf{x}}{\sigma_v^2} \end{aligned} \quad (24)$$

现在满足

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \\ &= \frac{\mathbf{H}'^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}'\mathbf{x}) (\mathbf{z} - \mathbf{H}'\mathbf{x})^T \mathbf{H}'}{\sigma_v^4} \end{aligned} \quad (25)$$

对式(25)取期望, 则可以解出 FIM 为:

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{H}'^T \mathbf{H}'}{\sigma_v^2} \quad (26)$$

FIM 的倒数可以作为参数 \mathbf{x} 估计误差的下限。

5 仿真结果与分析

5.1 静态稀疏信号重构

取长度为 $N = 256$ 的一维稀疏测试信号向量 \mathbf{x} , \mathbf{x} 的非零项 x_i 的位置和数值通过 $i \sim U_i[1, 256]$ 和 $x_i \sim U_i[-10, 10]$ 均匀采样产生。状态转移矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{256 \times 256}$, 状态噪声方差 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ 。分别考虑在非高斯噪声环境下获得观测值 (假设噪声为高斯-拉普拉斯混合噪声: $\varepsilon = 0.9$, 拉普拉斯噪声参数 $\lambda = 0.2$), 其信噪比从 0 dB 至 30 dB 变化, 量测数 $M = 128$, 量测矩阵 $\mathbf{H}' \in \mathbb{R}^{128 \times 256}$ 采用随机观测矩阵, 其列向量服从 $N(0, 128)$ 分布, 使得其满足有限等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP), 量测噪声方差 $\mathbf{R}_v = 0.001^2 \mathbf{I}_{128 \times 128}$ 。稀疏递增步长 $s = 2$ 。这里认为, 若 $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 < 10^{-5}$, 则重构成功, 对每种重构算法运行 1000 次, 并计算重构成功概率。

图 1 给出了不同粒子数下 PFMP 算法在信号稀疏度为 $K = 20$ 时随信噪比 (Signal Noise Ratio, SNR) 变化的重构成功概率。从图上可以看出随着粒子滤波中粒子数目的增加, PFMP 的性能逐步提升。但是随着粒子数目的不断增加 (如粒子数 $N_s > 1000$ 后), 算法的性能逐步趋于稳定, 进一步增加粒子数目对算法的性能提升不明显。综合考虑算法的计算复杂度和性能, 这里将算法中粒

子滤波过程的样本数目取 $N_s = 500$ 。

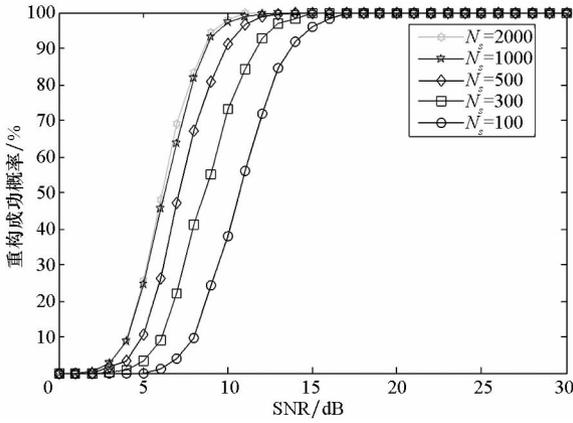


图 1 不同粒子数下 PFMP 随 SNR 变化的重构性能
Fig. 1 Reconstruction performance of PFMP under different samples with the changing of SNR

考察本文的 PFMP 和经典算法如 OMP、CoSaMP、StOMP、SAMP 算法以及文献[14]的卡尔曼滤波压缩感知(Kalman Filtered Compressed Sensing, KFCS)算法,文献[16]的卡尔曼滤波匹配追踪(Kalman Filtered Matching Pursuit, KFMP)算法,文献[17]的蒙特卡洛追踪(Monte Carlo Matching Pursuit, MCMP)算法,文献[21]的基追踪去噪算法(Basis Pursuit De-Noising, BPDN)进行了对比分析。

图 2 ~ 4 给出了不同算法在稀疏度分别为 20, 50, 100 时随着 SNR 变化的重构性能。从图中可知,PFMP 与 MCMP 的重构性能优于其他算法在含非高斯噪声条件下的重构性能。BPDN 虽然采用最小二乘估计来减小噪声的影响,但其并不能对重构性能带来可观的提升。KFCS 与 KFMP 的重构性能最差,这是由于其采用的卡尔曼滤波形式对环境噪声的高斯假设与实际不符所致。随着稀疏度的增加,各算法的重构性能都有所下降。当稀疏度 $K = 20$,在 $2 \text{ dB} < \text{SNR} < 9 \text{ dB}$ 时,PFMP

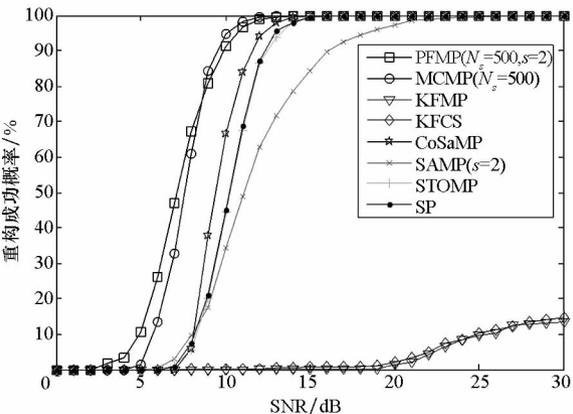


图 2 稀疏度 $K = 20$ 时,各算法随 SNR 变化的重构性能
Fig. 2 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 20$ with the changing of SNR

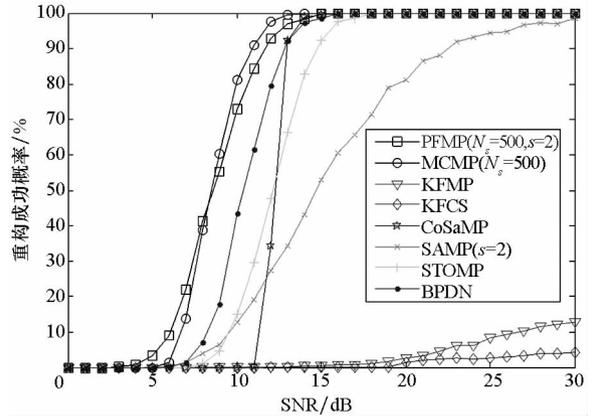


图 3 稀疏度 $K = 50$ 时,各算法随 SNR 变化的重构性能
Fig. 3 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 50$ with the changing of SNR

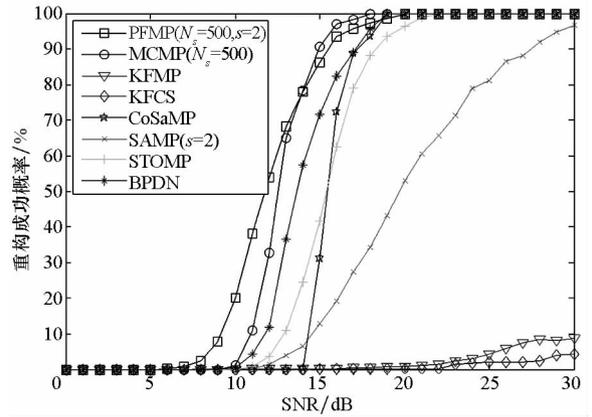


图 4 稀疏度 $K = 100$ 时,各算法随 SNR 变化的重构性能
Fig. 4 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 100$ with the changing of SNR

的重构性能略优于 MCMP;在 $9 \text{ dB} < \text{SNR} < 11 \text{ dB}$ 时,MCMP 的重构性能略优于 PFMP;在 $\text{SNR} > 11 \text{ dB}$ 时,两者重构性能相当。当稀疏度 $K = 50$,在 $4 \text{ dB} < \text{SNR} < 8 \text{ dB}$ 时,PFMP 的重构性能略优于 MCMP;在 $8 \text{ dB} < \text{SNR} < 15 \text{ dB}$ 时,MCMP 的重构性能略优于 PFMP;在 $\text{SNR} > 15 \text{ dB}$ 时,两者重构性能相当。当稀疏度 $K = 100$,在 $7 \text{ dB} < \text{SNR} < 13 \text{ dB}$ 时,PFMP 的重构性能略优于 MCMP;在 $13 \text{ dB} < \text{SNR} < 18 \text{ dB}$ 时,MCMP 的重构性能略优于 PFMP;在 $\text{SNR} > 18 \text{ dB}$ 时,两者重构性能相当。这是由于 MCMP 算法在重构过程中存在弱匹配过程,在信噪比较低时,原子剔除过程由于噪声较大,使其并不能很好地削弱原子扩充带来的盲目性。而 PFMP 则是通过对粒子滤波迭代误差的控制来抵抗噪声的影响。随着信噪比的增加 PFMP 的这一优势逐步丧失。

为了进一步衡量算法的重构性能,图 5 给出了各算法在稀疏度和信噪比固定的情况下,本文所提方法与其他方法重构性能随量测数变化的重

构性能比较。由图中的分值结果可知,随着量测数目的增加,各算法的重构性能逐步提升。在量测数 $M < 85$ 时,PFMP 和 MCMP 算法的重构性能相当,要优于其他算法,在量测数 $M < 75$ 时,PFMP 算法的重构性能要优于 MCMP 算法。

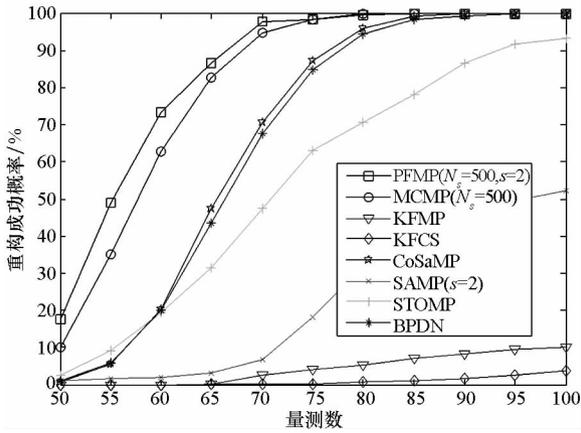


图5 稀疏度 $K = 50$ 、信噪比 $SNR = 15$ dB 时,各算法随量测数变化的重构性能

Fig. 5 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 100$ and $SNR = 15$ dB with the changing of the measurement number

5.2 动态稀疏信号重构

在该实验中,将非零元素视为随机漫步过程,其余参数设置同静态实验。驱动噪声的方差序列设为 $\mathbf{Q} = 10\mathbf{I}$ 。该过程可描述为:

$$\mathbf{x}_i(n+1) = \begin{cases} \mathbf{x}_i(n) + \mathbf{w}_i(n), & \mathbf{x}_i(n) \in \text{supp}(\mathbf{x}_i(n)) \\ \mathbf{0}, & \text{other} \end{cases} \quad (27)$$

动态非高斯噪声环境下,各算法的重构性能随输入观测值 SNR 变化曲线对比如图 6 ~ 8 所示。从图上可以看出,尽管各算法的重构性能较静态环境下有所下降,但是 PFMP 仍优于其他算

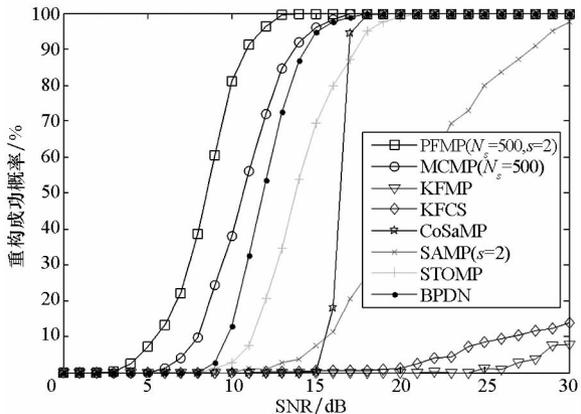


图6 稀疏度 $K = 20$ 时,各算法随 SNR 变化的重构性能
Fig. 6 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 20$ with the changing of SNR

法在含非高斯噪声条件下的重构性能。KFCS 与 KFMP 仍然受非高斯噪声的影响,算法性能几乎失效。MCMP 在动态环境下其性能下降较为明显,与 PFMP 差距较大。

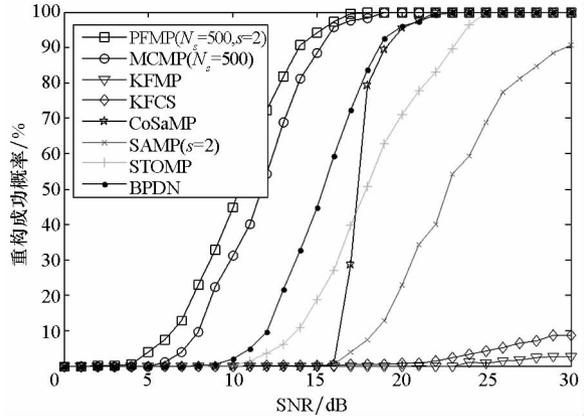


图7 稀疏度 $K = 50$ 时,各算法随 SNR 变化的重构性能
Fig. 7 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 50$ with the changing of SNR

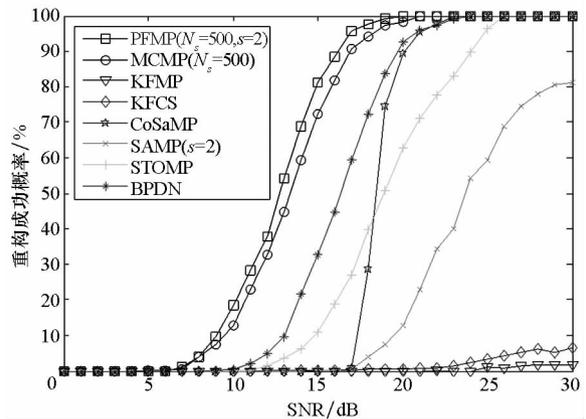


图8 稀疏度 $K = 100$ 时,各算法随 SNR 变化的重构性能
Fig. 8 Reconstruction performance of different algorithms under the sparsity $K = 100$ with the changing of SNR

结合两种环境下的仿真结果,各算法的重构性能随着输入观测值的信噪比增大而增大,随着信号稀疏度的增加而减小。

为了进一步衡量算法的重构性能,图 9 给出了各算法在稀疏度和信噪比固定的情况下,本文所提方法与其他方法重构性能随量测数变化的重构性能比较。由图中的分值结果可知,随着量测数目的增加,各算法的重构性能逐步提升。在量测数 $M < 90$ 时,PFMP 和 MCMP 算法的重构性能相当,要优于其他算法,在量测数 $M < 85$ 时,PFMP 算法的重构性能要优于 MCMP 算法。

6 结论

为了提高现有压缩感知重构算法中对非高斯量测噪声的抵抗性,本文提出了一种基于粒子滤

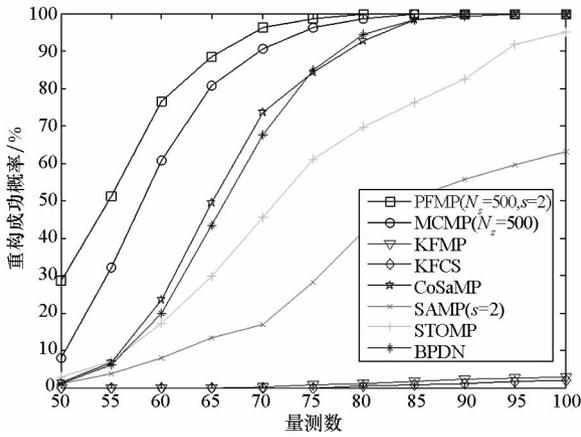


图 9 稀疏度 $K=50$, 信噪比 $SNR=25$ dB 时
各算法随量测数变化的重构性能

Fig. 9 Reconstruction performance of different algorithms
under the sparsity $K=100$ and $SNR=25$ dB with the
changing of number of measurements

波的盲稀疏信号重构算法,为了抵抗非高斯噪声的影响,将常规的二次损失函数替换为鲁棒性更高的 Huber 损失函数,在此基础上引入粒子滤波实现对原信号的最优估计,进一步削弱非高斯噪声的影响,结合 SAMP 实现盲稀疏度下信号精确重构。仿真结果表明,该算法有效提升了抗噪声性能,尤其是抗非高斯噪声的能力较现有的典型贪婪算法有所提高。但是该算法在动态信号重构中较静态环境下重构性能有所下降,针对动态环境下如何进一步提升重构精度将是下一步研究中需要解决的问题。

参考文献 (References)

- [1] 金坚, 谷源涛, 梅顺良. 压缩采样技术及其应用[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(2): 447-475.
JIN Jian, GU Yuantao, MEI Shunliang. An introduction to compressive sampling and its applications[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2010, 32(2): 447-475. (in Chinese)
- [2] Duarte M F, Eldar Y C. Structured compressed sensing: from theory to applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4053-4085.
- [3] 李坤, 马彩文, 李艳, 等. 压缩感知重构算法综述[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(s1): 225-232.
LI Kun, MA Caiwen, LI Yan, et al. Survey on reconstruction algorithm based on compressive sensing[J]. Infrared and Laser Engineering, 2013, 42(s1): 225-232. (in Chinese)
- [4] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [5] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [6] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 301-321.
- [7] Do T T, Gan L, Nguyen N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing[C]// Proceedings of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2008, 10: 581-587.
- [8] Yin W T, Morgan S P, Yang J F, et al. Practical compressive sensing with toeplitz and circulant matrices[C]// Proceedings of Visual Communications and Image Processing, 2010, 7744: 1-10.
- [9] Applebaum L, Howard S D, Searle S, et al. Chirp sensing codes: deterministic compressed sensing measurements for fast recovery[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(2): 283-290.
- [10] Candes E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [11] Romberg J. Compressive sensing by random convolution[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(4): 1098-1128.
- [12] Shi G M, Liu D H, Gao D H, et al. Advances in theory and Application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [13] Ji S H, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346-2356.
- [14] Vaswani N. Kalman filtered compressed sensing[C]// Proceedings of 15th IEEE International Conference on Image Processing, 2008: 893-896.
- [15] Carmi A, Gurfil P, Kanevsky D. A simple method for sparse signal recovery from noisy observation using Kalman filtering, RC24709(W0812-069)[R]. Armonk: IBM, 2008.
- [16] 田文彪, 康健, 张洋, 等. 基于卡尔曼滤波的压缩感知若匹配去噪重构[J]. 电子学报, 2014, 42(6): 1061-1067.
TIAN Wenbiao, KANG Jian, ZHANG Yang, et al. Weakly matching pursuit denoising recovery for compressed sensing based on Kalman filtering[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(6): 1061-1067. (in Chinese)
- [17] 田文彪, 芮国胜, 康健, 等. 基于 Monte Carlo 采样的压缩感知若匹配去噪重构[J]. 电子学报, 2015, 43(9): 1732-1737.
TIAN Wenbiao, BING Guosheng, KANG Jian, et al. Monte Carlo matching pursuit denoising inversion for compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(9): 1732-1737. (in Chinese)
- [18] Huber P J, Ronchetti E. Robust statistics[M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 2009.
- [19] Doucet A, Godsill S, Andrieu C. On sequential Monte Carlo methods for Bayesian filtering[J]. Statistics and Computing, 2000, 10(3): 197-208.
- [20] Marshall A W. The use of multi-stage sampling schemes in Monte Carlo computations[J]. Symposium on Monte Carlo Methods, 1954: 123-140.
- [21] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61.