

一类飞行器载荷设计的三分段方法研究与应用*

商霖¹, 张海瑞¹, 李璞^{1,2}, 马友林¹

(1. 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076; 2. 国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:为有效解决传统载荷设计方法中存在的诸多不足,提出一种适用于一类飞行器载荷设计的三分段法,即分段刚度、分段质量和分段气动。该方法能够很好地逼近飞行器的真实质量分布和气动载荷分布。针对简化飞行器,分别利用三分段法、理论计算法和质量分站法计算其模态参数和截面载荷。结果表明,三分段法和理论计算法在模型参数、计算原理上是一致的,基本可以认为是一种方法,因而它们的模态参数和截面载荷完全吻合;质量分站法所得左、右截面载荷不一致,且相差很大,还不符合真实载荷情况。总之,采用三分段法能够得到较为真实、合理的飞行器截面载荷分布,且工程应用简便,方法合理、可信,同时还可以在很大程度上降低飞行器载荷设计和结构设计的难度。

关键词:飞行器;载荷设计;三分段法;质量分站法;理论计算法

中图分类号: V19 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2019)02-063-06

Research and application of three-section method of load design for a kind of aircraft

SHANG Lin¹, ZHANG Hairui¹, LI Pu^{1,2}, MA Youlin¹

(1. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China;

2. College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In order to solve effectively many shortcoming of traditional load design, a three-section method, namely segment stiffness, segment mass and segment aerodynamics, for the load design of aircraft was presented. The method approximates the actual mass distribution and aerodynamic load distribution of the aircraft. For a simplified aircraft, the modal parameters and the section load were calculated by using the three-section method, the theoretical method and the mass-partition method. The results show, the three-section method and the theoretical method are consistent with the model parameters and the calculation principle, which largely can be considered as a method, so their modal parameters and the section load are identical. The load of the left and right section of the mass-partition method is pretty inconsistent, and it is not in accordance with the actual load condition. In a word, the three-section method can get a more real and reasonable section load distribution, and the engineering application is simple, reasonable and reliable. At the same time, the method can reduce the design difficulty of missile load and structure.

Keywords: aircraft; load design; three-section method; mass-partition method; theoretical calculation method

载荷设计是飞行器研制的基础工作之一,其主要目的是通过对飞行器任务剖面的分析,选取载荷工况,进行载荷计算,为飞行器结构设计和各部段的强度(包括稳定性)计算提供依据^[1-5]。一般情况下,飞行器结构设计主要是依据飞行时所需的载荷进行的,其他工况载荷可用来对结构强度进行检查、校对。

当前,在国内的航天院所里,载荷计算通常由载荷专业根据飞行器专业提供的质量分站数据和气动专业提供的分布气动系数进行计算,计算原理如图1所示。首先,飞行器专业根据分站原则在飞行器的舱段连接端面、大质量安装位置、关心

截面等处设定分站,并采用静力等距原则将分站间的分段质量等效分配到分站上,称其为“质量分站”;随后,气动专业依据质量分站计算全弹分布的气动载荷数据,计算原则是某一分站的气动载荷等于其前半站压力积分与其后半站压力积分之和,若分站位于飞行器前/后端,则分站气动载荷等于其后/前半站压力积分,进而得到分站气动系数;最后,载荷专业依照飞行器飞行弹道将气动载荷、发动机推力和操纵力等添加到相应的质量分站上,由此利用 MATLAB 编程或 ANSYS 的惯性释放来计算飞行器各质量分站截面的载荷。因此,本文将这一传统的载荷设计方法称之为“质

* 收稿日期:2017-12-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11602306)

作者简介:商霖(1977—),男,山西阳泉人,研究员,博士, E-mail:shang_lin30@126.com

量分站法”。

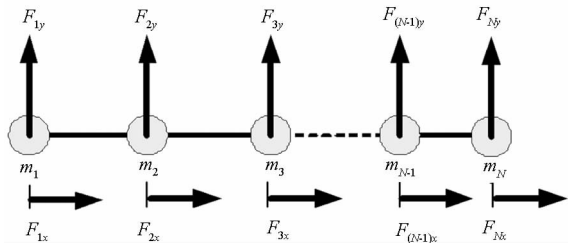


图 1 质量分站法计算原理

Fig. 1 Principle of the mass-partition method

质量分站法在 60 多年的飞行器载荷设计中发挥了重要的作用,但在长期的型号设计中也发现了其存在着诸多的不足。

其一,飞行器质量分站方面:分段质量被人为分配到分段端面站点会引发不合理的现象,如发动机后裙与尾段连接端面处分站的质量经常随时间变化;大质量部件未单独考虑而归属到分段总质量并进行端面站点分配造成分站质量的不合理,影响大质量部件安装截面位置载荷的计算;质量分站只包括集中质量和分站位置,未提供转动惯量,影响飞行器上关心截面位置振型斜率的计算^[6]。

其二,分布气动系数方面:分站前、后半站的压力积分所得气动载荷被人为放置到质量分站,与实际压心位置不符而存在一个偏离质量分站的偏距,进而遗漏一个因偏距产生的矩,影响截面分布载荷的计算。

其三,飞行器分布质量和分布压力都人为地集中分配到质量分站位置,将在该分站左右截面引起严重的集中载荷突变,这与舱段连接端面左右截面载荷应该一致的直观认识完全不符;同时,将在大质量部件安装位置引起惯性载荷与气动载荷的相互抵消,从而导致截面载荷设计的极度不合理。

为了解决上述不足,改进载荷设计方法、统一载荷设计形式,本文提出了“三分段法”。首先,对三分段法的基本原理进行了简要说明,并提出了飞行器应当遵从的分段原则和计算步骤。随后,根据三分段法推导得到了飞行器横向载荷的计算公式。最后,针对简化飞行器,分别采用三分段法和质量分站法进行了计算,并与理论计算结果相比较。结果表明:本文所提三分段法与理论计算结果一致,质量分站法则存在了诸多不足且误差较大。由此说明,三分段法合理、可信,具有较高的工程应用价值。

1 三分段法

1.1 基本原理

三分段法,即分段刚度、分段质量和分段气动

的统称。第一重分段,飞行器专业在飞行器的舱段连接端面、截面尺寸突变位置、截面材料改变位置、结构构型改变位置和关心截面位置等处进行第一次分割得到刚度分段;第二重分段,飞行器专业根据刚度分段得到其质量、质心和转动惯量等,并利用分段质心和大质量部件安装位置对飞行器进行第二次分割得到质量分段;第三重分段,气动专业根据质量分段进行分段压力积分得到气动载荷和压心,并利用分段压心对飞行器进行第三次分割得到气动分段。

1.2 分段原则

飞行器应当遵从的基本分段原则如下:

- 1) 要求每个分段长度不大于其所属舱段长度的 1/5 (发动机舱段不大于 1/10);
- 2) 要求舱段内部大质量部件(如杀伤体、惯组大梁、伺服系统等)在安装位置分配质量站点(多支点位置需说明);
- 3) 要求质量秒点的变化能体现出发动机推力特性的变化趋势或规律,如快速上升段、平台段、快速下降段等均要有秒点并细化;
- 4) 要求操纵力(摆动喷管、空气舵或燃气舵等)作用轴或转动轴位置分配载荷站点,提供载荷作用点,用以计算局部力矩。

1.3 计算步骤

飞行器采用三分段法进行载荷设计的基本步骤如下:

Step 1:按三分段法沿飞行器轴向进行刚度分段、质量分段和气动分段,进而确定飞行器的刚度站点、质量站点和气动站点以及载荷站点。

Step 2:计算飞行器在发动机推力、气动载荷和操纵载荷作用下的总加速度和分站当地加速度(考虑转动加速度的影响),根据分站当地加速度计算各分站惯性载荷。

Step 3:从前到后或从后到前依次“切开”各站,根据力和力矩平衡计算各分站的载荷,主要包括轴压、轴拉、横向剪力和横向弯矩以及外压等。

上述步骤表明,飞行器载荷计算的基本思路是:先求加速度得到惯性载荷,然后施加其他合外力载荷,最后求解得到各个站点或截面的载荷。

2 横向载荷

飞行器截面的横向载荷主要包括横向剪力和横向弯矩,其主要受沿飞行器轴向分布的横向气动力、操纵力和惯性力等的影响。

由横向气动力引起的第 j 个质量站点的过

载为

$$\begin{cases} n_j = n_1 + n_2^j \\ n_1 = \frac{qS\alpha \sum_i C_\alpha^i}{mg} \\ n_2^j = \frac{qS\alpha \sum_i C_\alpha^i (x_T - x_g)}{Jg} (x_T - x_j) \end{cases} \quad (1)$$

其中, n_1 为横向气动力引起的线加速度对应的过载, n_2^j 为横向气动力压心与导弹质心偏离产生的矩引起第 j 个质量站点绕质心附加角加速度对应的过载, C_α^i 为第 i 个气动站点的横向气动力系数, q 为飞行动压, S 为气动参考面积, α 为飞行攻角, x_T 为质心坐标, x_g 为压心坐标, x_j 为第 j 个质量站点的坐标, m 和 J 分别为飞行器的质量和绕质心的转动惯量。

由于飞行器的气动力与惯性力平衡, 由此气动力引起的横向截面剪力和弯矩分别为

$$Q_k = qS\alpha \sum_i C_\alpha^i \Delta(x_k - x_i) - g \sum_j n_j m_j \Delta(x_k - x_j) \quad (2)$$

$$M_k = M_{k-1} + Q_{k-1} (x_k - x_{k-1}) \quad (3)$$

其中: Q_k 和 M_k 分别为第 k 个截面的横向剪力和弯矩; m_j 为第 j 个质量站点的集中质量; x_k 为第 k 个截面的坐标; $\Delta(x_k - x_i)$ 和 $\Delta(x_k - x_j)$ 为狄拉克 - δ 函数, 即

$$\Delta(x_k - x_A) = \begin{cases} 0 & x_k < x_A \\ 1 & x_k \geq x_A \end{cases} \quad A = i, j \quad (4)$$

如果飞行器需要采用燃气舵、空气舵或柔性喷管等操纵机构进行姿态控制, 那么应设置载荷站点, 并在这些站点位置施加集中力载荷。由操纵力集中载荷引起的过载、截面剪力和弯矩可参考式(1) ~ (3)相应计算。将气动力和操纵力产生的截面剪力和弯矩相叠加, 即可得到飞行器截面的最终剪力和弯矩。

载荷设计中, 还特别需要考虑飞行器在外界干扰(如高空风^[7])作用下引起的风攻角、风舵偏角或柔性喷管风摆角所产生的气动力和操纵力^[8], 具体做法就是在式(1)和式(2)中的飞行攻角 α 上叠加风攻角, 相应的舵偏角或柔性喷管摆角类同处理。研究风对飞行器的干扰只考虑水平风, 产生的附加攻角和附加侧滑角分别为

$$\alpha_w = \arctan \frac{w \sin \theta}{v + w \cos \theta} \quad (5)$$

$$\beta_w = \arctan \frac{w}{v} \quad (6)$$

其中: w 是风速, θ 是弹道倾角, v 是飞行速度。根据型号需求可选取按纵风/俯仰设计(取式(5))

或按横风/侧滑设计(取式(6)), 再结合飞行器刚体运动方程和控制方程即可解算得到用于载荷计算的风攻角、风舵偏或柔性喷管风摆角等, 具体解算过程可参见文献[1, 9]。

根据上述公式利用 MATLAB、Python 等编程语言编写计算程序, 就可以很方便地计算得到飞行器截面的载荷。此外, 还可以利用 ANSYS、NASTRAN 等仿真软件构建有限元模型直接计算, 计算时直接施加气动力和操纵力等外力载荷, 并采用惯性释放来平衡惯性载荷。

3 载荷计算

一般飞行器主要由弹头、仪器舱、发动机和尾段 4 个壳段组成。实际飞行时, 受飞行器外形、飞行工况和飞行姿态等影响, 沿其轴向分布的气动压力变化是相当复杂的。考虑本文的重点仅在于讨论三段法的优越性和合理性, 因此将飞行状态下的飞行器简化为质量均匀分布、压力线性分布的自由 - 自由弹性梁。采用 ANSYS 有限元软件构建飞行器有限元模型、施加外边界载荷及设置惯性释放开关。图 2(a) 采用均布的质量和刚度, 飞行器刚度和质量均由梁单元 BEAM188 来模拟; 施加线性分布压力, 向下箭头代表了压力分布, 因其计算原理与理论计算一致, 所以本文称之为“理论计算法”。图 2(b) 和图 2(c) 将飞行器离散化为一系列质量单元和连接这些质量单元的梁单元, 故可称之为“弹簧 - 质量法”。其中飞行器刚度由梁单元 BEAM188 来模拟(图示实线), 飞行器质量由质量单元 MASS21 来模拟(图示星点);

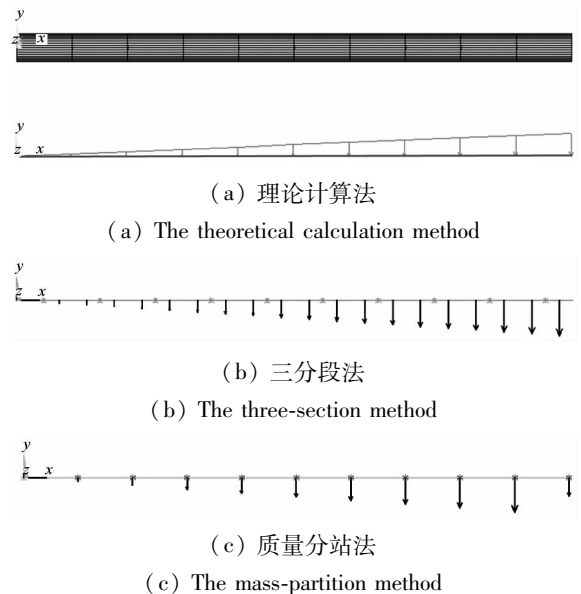


图2 飞行器有限元模型

Fig. 2 Finite element model of aircraft

同时将压力离散化并集中到梁单元的节点上,向下箭头代表了集中气动载荷。

3.1 模型参数

图 2 所示飞行器有限元模型主要的模型参数有三个:质量、刚度和载荷。其中,刚度均由 BEAM188 梁单元模拟,对理论计算法、三分段法和质量分站法来说均是一样的。图 2(a) 理论计算法的质量由材料密度确定,利用文献[10]质量矩阵提取方法可以得到一致质量矩阵或集中质量矩阵。图 2(b) 三分段法的质量由质量单元 MASS21 确定,MASS21 点单元的质量、转惯和位置通过计算图 2(a) 中的单个梁单元来得到。图 2(c) 质量分站法的质量由质量单元 MASS21 确定,MASS21 单元的质量直接采用理论计算法提取的集中质量阵,转惯则利用空心正圆柱公式^[11]计算得到,位置人为指定在单元节点上。

表 1 为依据理论计算法、三分段法和质量分站法构建有限元模型计算所得的质量特性和载荷数据。结果表明:理论计算法和三分段法的模型参数一致,基本可以认为是一种方法;质量分站法相对来说有误差,虽然误差不大,但对于质量不均布和气动分布复杂的真实飞行器飞行工况,其误差的影响是难以估量的。需要说明的是,三分段法只使用了 10 个集中质量,却比质量分站法的 11 个集中质量更接近真实模型。

表 1 三种方法的质量和载荷数据

Tab. 1 Mass and load data of three methods

	质量/ kg	质心/ m	转惯/ (kg·m ²)	扭惯/ (kg·m ²)	载荷/ N	压心/ m
理论 计算	606.48	5.0	5072.6	37.15	5.0E+7	6.667
三分 段法	606.48	5.0	5072.6	37.15	5.0E+7	6.667
质量 分站	606.75	5.0	5226.0	36.24	5.0E+7	6.675
误差/%	0.04	0	3.0	2.45	0	0.12

3.2 模态特性

有限元模型是否合理,其有效的检验方法就是进行模态特性的分析。表 2 为依据理论计算法、三分段法和质量分站法构建有限元模型进行模态分析所得的模态参数。结果表明:理论计算法和三分段法的模态参数相差极小,固有频率最大相对误差不超过 3.52%,振型均值最大相对误

差不超过 1.44%;质量分站法和理论计算法的模态参数相差还是比较明显的,固有频率相对误差范围在 2.1%~12.2%,振型均值相对误差范围在 0.1%~7.5%。

表 2 三种方法的模态参数

Tab. 2 Modal parameters of three methods

	固有频率 f/Hz				振型均值 U			
	横一 阶	横二 阶	横三 阶	扭一 阶	横一 阶	横二 阶	横三 阶	扭一 阶
理论 计算	31.8	84.8	158.9	160.9	0.174 3	0.178 3	0.182 9	0.222 7
三分 段法	31.6	83.3	153.5	160.2	0.173 9	0.177 1	0.180 3	0.222 7
质量 分站	30.3	78.0	141.6	164.3	0.174 5	0.183 2	0.197 8	0.224 9

表 2 中,为了便于比较,引入了振型均值的概念^[12]。将飞行器振型相对实际顶点的模态位移做归一化,并按式(7)处理。

$$U = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{u_1^2}} \quad (7)$$

式中: U 定义为飞行器的振型均值; N 是飞行器分站数目; u_i 是飞行器第 i 个分站的振型。

已有文献[13-14]研究结果表明,在采用数目相同的有限单元的情况下,一致质量法的结果优于集中质量法,即理论计算法的计算精度要高于质量分站法,但一致质量法所得固有频率要大于真实值(接近真实值的上界),而集中质量法所得固有频率要小于真实值。表 2 中,三分段法所得固有频率正好位于理论计算法和质量分站法之间,从认识上来讲应该更接近于真实值。需要指明的是,三分段法作为一种“拟一致质量法”,尽量用较少的质量站点逼近飞行器分布质量的形态,在单元划分较为细密、结构包含的集中质量(如内部设备或部件)较多时,其计算结果将更为合理、可靠。

3.3 截面载荷

下面分别采用理论计算法、三分段法和质量分站法计算此弹性梁在惯性释放模式下的截面载荷。表 3 为依据理论计算法、三分段法和质量分站法构建有限元模型计算所得的飞行器截面载荷。图 3 和图 4 分别为根据飞行器截面载荷所绘制的剪力图和弯矩图。结果均表明:理论计算法和三分段法的截面载荷相差极小,截面剪力最大相对误差不超过 0.28%,截面弯矩最大相对误差不超过 0.65%;质量分站法左、右截面载荷相差

极大,符号也不完全一致,截面剪力最大相对误差达到了152%,截面弯矩最大相对误差达到了191%;质量分站法和理论计算法的截面载荷相差也极大,截面剪力最大相对误差达到了402%,截面弯矩最大相对误差达到了1055%。

需要指出的是,质量分站法所得左右截面载荷不一致甚至相差很大且不符合真实载荷情

况的根本原因就是人为在截面位置布置了实际上并不存在的集中质量和集中气动载荷。三分段法很好地解决了这一问题,并明确了大质量部件要处理为集中质量、分段转惯要按设计值输入、气动载荷压心要按计算值分配站点等,由此可以计算得到更为真实、合理的飞行器各截面的分布载荷。

表3 三种方法的截面载荷
Tab.3 Section load of three methods

截面编号	剪力/N				弯矩/(N·m)			
	理论 计算法	三分 段法	质量分站法 左截面	质量分站法 右截面	理论 计算法	三分 段法	质量分站法 左截面	质量分站法 右截面
1	0	0		55 908	0	0		-55 381
2	-16 480	-16 527	55 908	-54 743	-21 943	-22 048	-111 289	-222 105
3	-29 298	-29 381	-54 743	-137 794	-29 268	-29 393	-167 361	-278 177
4	-38 454	-38 563	-137 794	-193 243	-25 605	-25 771	-140 384	-251 200
5	-43 947	-44 072	-193 243	-221 091	-14 619	-14 703	-57 957	-168 773
6	-45 779	-45 908	-221 091	-221 338	0	0.6	52 317.8	-58 498
7	-43 947	-44 072	-221 338	-193 984	14 679.6	14 691.3	162 840	52 023.9
8	-38 454	-38 563	-193 984	-139 030	25 666.5	25 634.3	246 008	135 192
9	-29 298	-29 381	-139 030	-56 474	29 328.7	29 393.3	274 222	163 406
10	-16 480	-16 527	-56 474	53 683.1	22 004.2	22 010.7	219 880	109 064
11	0	0	53 683.1		0	0	55 380.6	

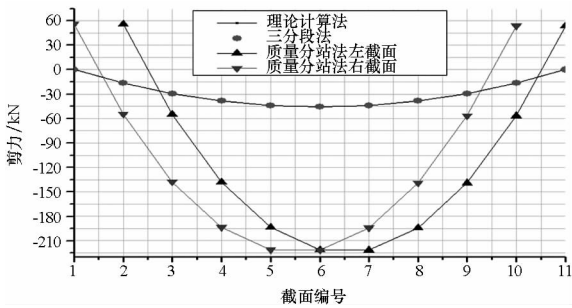


图3 飞行器各截面的剪力分布

Fig.3 Shear distribution of each section of the aircraft

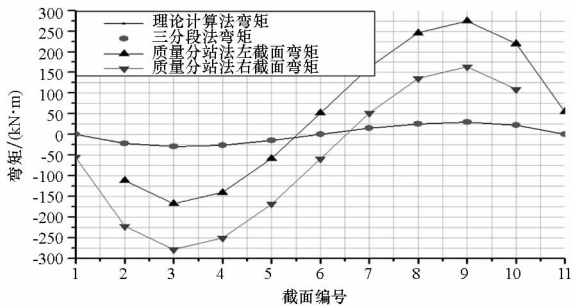


图4 飞行器各截面的弯矩分布

Fig.4 Moment distribution of each section of the aircraft

4 结论与建议

针对工程上传统载荷设计方法存在的诸多不足,提出了一种适用于一类飞行器载荷设计的三分段法。同时,结合简化飞行器,利用理论计算法、三分段法和质量分站法分别计算了飞行器的模态参数和截面载荷。结果表明:

1)三分段法能够很好地逼近飞行器的真实质量分布和气动载荷分布,有效地避免质量和载荷的双重集中;

2)理论计算法和三分段法构建的有限元模型所得模态参数基本一致,基本可以认为是一种方法;

3)采用三分段法进行飞行器载荷设计,能够得到较为真实、合理的截面载荷分布,且工程应用简便、方法合理、可信,同时在很大程度上降低了飞行器结构设计的难度。

三分段法从本质上来讲仍然是一种集中质量法,因此质量分站法具有的缺点,其仍未完全规避,例如其质量单元左、右截面的载荷仍然不

一致。

为了得到真实、合理的飞行器分布载荷,给出以下建议:

1) 根据飞行器系统的特殊组成形式,即一致分布的结构质量和推进剂质量、集中布置的大质量部件和设备等,采用一致分布的飞行器质量部件尽量采用一致质量法,实在不行局部应尽量细化,该集中布置的大质量部件要采用集中质量法并放置在其正确的安装位置;

2) 给出沿飞行器轴向分布的线密度质量和线密度气动载荷,那么飞行器载荷设计和结构设计的难度将大为降低。

此外,有关影响飞行器载荷设计的其他因素,如发动机推力作用点位置的选取、大风区风攻角的计算和气动偏差引起的载荷偏差等问题,建议后续开展相关研究。

参考文献 (References)

[1] 龙乐豪. 总体设计(上)[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
LONG Lehao. Overall design (top) [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1989. (in Chinese)

[2] 成楚之. 火箭与导弹的静动力载荷设计[M]. 北京: 宇航出版社, 1994.
CHENG Chuzhi. Static dynamic load design of rocket and missile [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1994. (in Chinese)

[3] 严德, 杨超. 基于试验气动力的纵向机动飞行载荷分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(3): 253-256.
YAN De, YANG Chao. Flight loads analysis of longitudinal maneuver using experimental aerodynamic forces [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(3): 253-256. (in Chinese)

[4] 邓立东, 许春生, 董秀荣. 飞行载荷分析计算研究[J]. 航空学报, 1994, 15(1): 32-35.
DENG Lidong, XU Chunsheng, DONG Xiurong. Analytical investigation of the aircraft flight loads [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(1): 32-35. (in Chinese)

[5] 李书敏. 在轴内压作用下网格结构的优化设计[J]. 国防科技大学学报, 1985(4): 21-30.
LI Shumin. Optimum design for the stiffened waffle structure under the action of high axial compressive load and internal pressure [J]. Journal of National University of Defense

Technology, 1985(4): 21-30. (in Chinese)

[6] 潘忠文. 运载火箭动力学建模及振型斜率预示技术[J]. 中国科学: 技术科学, 2009, 39(3): 469-473.
PAN Zhongwen. Dynamic modeling and slope prediction technique of carrier rocket [J]. Scientia Sinica: Technologica, 2009, 39(3): 469-473. (in Chinese)

[7] 孙丕忠, 夏智勋, 张育林. 变化风场对气象火箭射高的影响[J]. 国防科技大学学报, 2000, 22(3): 57-59.
SUN Pizhong, XIA Zhixun, ZHANG Yulin. The effect of variable wind field on the overall height of meteorological rocket [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2000, 22(3): 57-59. (in Chinese)

[8] 尹云玉. 固体火箭载荷设计基础[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2007.
YIN Yunyu. Solid rocket load design foundation [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2007. (in Chinese)

[9] 黄寿康. 流体动力·弹道·载荷·环境[M]. 北京: 宇航出版社, 1991.
HUANG Shoukang. Fluid power · ballistic · load · environment [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1991. (in Chinese)

[10] 商霖. 基于 ANSYS 有限元分析的模态质量计算方法的研究[J]. 导弹与航天运载技术, 2011(3): 55-57.
SHANG Lin. Modal mass computation based on ANSYS finite element analysis [J]. Missiles and Space Vehicles, 2011(3): 55-57. (in Chinese)

[11] Piersol A G, Paez T L. Harris' shock and vibration handbook[M]. 6th ed. USA: McGraw-Hill Education, 2009.

[12] 商霖, 王亮, 金晶. 随机有限元法在导弹模态分析中的应用[J]. 导弹与航天运载技术, 2015(4): 42-45.
SHANG Lin, WANG Liang, JIN Jing. Application of stochastic finite element method in missile modal analysis [J]. Missiles and Space Vehicles, 2015(4): 42-45. (in Chinese)

[13] 杨亚平, 沈海宁. 集中质量矩阵替代一致质量矩阵的合理性与局限性[J]. 青海大学学报(自然科学版), 2010, 28(1): 35-39.
YANG Yaping, SHEN Haining. The rationality and limitation on the substitution of the concentrated mass matrix for the consistent mass matrix [J]. Journal of Qinghai University (Nature Science), 2010, 28(1): 35-39. (in Chinese)

[14] 刘相. 一致质量法和集中质量法的比较分析[J]. 辽东学院学报(自然科学版), 2010, 17(3): 207-210.
LIU Xiang. Consistent mass method and lumped mass method: comparison in natural frequency analysis of cross-section cantilever beam [J]. Journal of Eastern Liaoning University (Natural Science), 2010, 17(3): 207-210. (in Chinese)