

## 基于不完全测量数据的飞行器轨迹参数估计\*

李冬, 刘学

(中国人民解放军91550部队, 辽宁大连 116023)

**摘要:**提出基于稀疏优化的轨迹参数估计新方法,通过降低参数空间的维数改善模型的病态性。利用B样条函数实现轨迹参数的稀疏表示,根据轨迹参数与测量数据的关系建立估计轨迹参数的稀疏表示寻优模型,采用高斯牛顿法获得模型的解。寻优模型中待估参数的数量取决于样条节点数,利用样条函数的高阶导数在节点处的不连续性建立了选取样条节点的稀疏优化模型,采用凸优化方法求解该模型,实现样条节点数的最小化。仿真结果表明,稀疏优化方法能够大幅度提高不完全测量段落轨迹参数的估计精度。

**关键词:**不完全测量;轨迹参数估计;样条;稀疏优化

**中图分类号:**TP274 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2020)01-117-08

## Trajectory estimation for aircraft with incomplete measurements

LI Dong, LIU Xue

(The PLA Unit 91550, Dalian 116023, China)

**Abstract:** A new estimation method based on sparse optimization was proposed. This method alleviated the ill-posedness by decreasing the dimension of parameter space. The sparse representation of the trajectory was achieved by using the B-spline function. An optimization model for trajectory estimation was constructed according to the relationship between the measurement data and the trajectory, and was solved by using the Gauss-Newton method. In this model, the number of the parameters to be estimated was determined by the number of the spline knots. A sparse optimization model for optimal knot selection was established by using the discontinuity of high order derivative of spline at the knots. This model was solved by using a convex optimization approach, and the number of knots was minimized. Simulation results showed that the sparse optimization method can dramatically improve the estimation accuracy of trajectory during the incomplete measured interval.

**Keywords:** incomplete measurements; trajectory estimation; spline; sparse optimization

在航天测控领域,通常利用光学、雷达等多个测量设备对飞行器跟踪测量,再由采集到的测量数据给出飞行器高精度的轨迹参数估计。在此跟踪测量过程中经常出现不完全测量的情况,即测量设备由于工作状态不理想或受到环境干扰,在某些时段丢失大量测量数据,导致无法解算完整的轨迹参数,直接影响了后续的精度评估工作。如何利用不完全测量数据获得精度尽量高的轨迹参数是测控数据处理亟须解决的难题。

飞行器轨迹参数估计通常采用基于样条函数表示的数据融合方法<sup>[1-3]</sup>,在不完全测量情况下,该方法的估计模型呈现病态性,难以有效确定轨迹参数。文献[4]利用误差诊断方法,在完全测量段落获取辅助测量设备低精度测元的系统误差,扣除系统误差后融合其他设备少量的高精度测元用于估计不完全测量段落的轨迹参数,获得

较高精度的估计结果,但该方法的前提是具有辅助测量设备并且该设备的测元完好,在实际应用中受到限制。文献[5]利用飞行器轨迹的动力特性优化轨迹的表示样条,在丢失部分测量数据的情况下,仍然能够获得较高精度的轨迹参数,但是该方法只适用于不完全测量段落较短的情况,当丢失数据的时间较长时,估计模型依然呈现病态性,估计结果并不理想。不完全测量问题本质上是病态逆问题,信号处理领域的稀疏优化方法被大量应用于病态逆问题的研究<sup>[6-9]</sup>,该方法充分利用先验知识进行信号优化建模,得到信号的稀疏表示,通过确定少量参数即可实现真实信号的重构,从而缩小参数空间维数,将病态问题转变为良态问题。值得注意的是,信号稀疏优化问题求解困难的根源在于信号的稀疏结构或支撑未知,很多方法的出发点都是要解决这一问题。而对于

\* 收稿日期:2018-09-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61703408,61801482)

作者简介:李冬(1983—),男,新疆奎屯人,工程师,博士,E-mail:nudtlidong@163.com

飞行器来说,其轨迹参数的稀疏结构在一定程度上是可建模的,可用样条模型表示<sup>[2-3,10]</sup>。国内外一些学者将稀疏优化方法应用于样条拟合问题的研究中。文献[11]通过求解  $l_1$  范数稀疏优化问题使拟合样条的待求参数最小化,提高了拟合性能。文献[12]建立了多分辨率样条基函数集合,采用稀疏优化方法从集合中挑选出少量基函数,用其表示函数曲线能够有效减少待求参数的数量。文献[13]由插值样条函数的  $l_0$  范数稀疏优化获得函数曲线的稀疏表示。

本文针对不完全测量条件下的飞行器轨迹参数估计问题,提出了一种基于稀疏优化的轨迹参数估计新方法。该方法将轨迹参数用 B 样条函数表示,结合不完全测量数据建立轨迹参数估计的稀疏表示寻优模型,通过样条节点的稀疏优化最大限度压缩样条节点数,从而降低参数空间的维数,缓解模型的病态性。

## 1 飞行器轨迹参数的稀疏表示寻优模型

飞行器的轨迹参数包括发射系下的位置参数和速度参数,  $t$  时刻的位置参数记为  $\mathbf{r}_f(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ , 速度参数记为  $\mathbf{v}_f(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T$ , 则  $t$  时刻的轨迹参数表示为  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T$ 。轨迹测量数据包括飞行器相对测量设备的方位角、俯仰角、距离和径向速度,它们是以设备的测量坐标系为基准定义的。 $t$  时刻飞行器在测量系下的位置和速度分别记为  $\mathbf{r}_s(t) = (x_s(t), y_s(t), z_s(t))^T$  和  $\mathbf{v}_s(t) = (\dot{x}_s(t), \dot{y}_s(t), \dot{z}_s(t))^T$ , 发射系向地心系的旋转矩阵记为  $\mathbf{S}$ , 地心系向测量系的旋转矩阵记为  $\mathbf{G}$ , 地心系下的站址坐标和发射原点坐标分别记为  $\mathbf{r}_{s0} = (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})^T$  和  $\mathbf{r}_{f0} = (x_{f0}, y_{f0}, z_{f0})^T$ , 则有

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s(t) = \mathbf{G}(\mathbf{S}\mathbf{r}_f(t) + \mathbf{r}_{f0} - \mathbf{r}_{s0}) \\ \mathbf{v}_s(t) = \mathbf{G}\mathbf{S}\mathbf{v}_f(t) \end{cases} \quad (1)$$

本文中,向量  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$  的  $l_p$  范数定义为  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_p = (\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p)^{1/p}$ , 当  $p = 0$  时,  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0$  为  $\boldsymbol{\alpha}$  中非零元素的个数; 当  $p = \infty$  时,  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \{|\alpha_i|\}$ 。方位角、俯仰角、距离和径向速度测量分别记为  $A(t)$ 、 $E(t)$ 、 $R(t)$  和  $\dot{R}(t)$ , 有如下关系式:

$$\begin{cases} A(t) = \arctan[z_s(t)/x_s(t)] + \varepsilon_A(t) \\ E(t) = \arctan[y_s(t)/\sqrt{x_s^2(t) + z_s^2(t)}] + \varepsilon_E(t) \\ R(t) = \|\mathbf{r}_s(t)\|_2 + \varepsilon_R(t) \\ \dot{R}(t) = \mathbf{v}_s^T(t)\mathbf{r}_s(t)/\|\mathbf{r}_s(t)\|_2 + \varepsilon_{\dot{R}}(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\varepsilon_A(t)$ 、 $\varepsilon_E(t)$ 、 $\varepsilon_R(t)$  和  $\varepsilon_{\dot{R}}(t)$  为测量随机误差, 假设服从零均值正态分布, 本文暂不考虑测量系统误差。将  $t$  时刻所有测量组成的向量记为  $\mathbf{y}(t)$ , 根据式(1)和式(2),  $\mathbf{y}(t)$  可表示为轨迹参数  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_f(t), \mathbf{v}_f(t))^T$  的非线性函数:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

其中,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  为测量真值,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  为服从零均值多维正态分布的随机误差, 其协方差矩阵记为  $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ 。

测量数据的全部采样时刻记为  $t_1, t_2, \dots, t_M$ , 对应的轨迹参数记为  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_M))^T$ 。轨迹参数估计就是融合所有时刻的测量数据  $\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_M)$  给出  $\mathbf{X}$  的高精度估计, 从而确定飞行器完整的运动轨迹。对测量数据作归一化处理, 令

$$\mathbf{Y} = (\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_1)\mathbf{y}(t_1), \boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_2)\mathbf{y}(t_2), \dots, \boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_M)\mathbf{y}(t_M))^T$$

$$\mathbf{E} = (\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_1)\boldsymbol{\varepsilon}(t_1), \boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_2)\boldsymbol{\varepsilon}(t_2), \dots, \boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_M)\boldsymbol{\varepsilon}(t_M))^T$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_1)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_1)), \boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_2)), \dots, \boldsymbol{\Gamma}^{-1/2}(t_M)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_M)))^T$$

则有

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{E} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{E}$  服从多维标准正态分布。对  $\mathbf{X}$  的准确估计采用如下非线性最小二乘估计:

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{F}(\mathbf{X})\|_2^2$$

在某些时刻点如果没有足够多的测量(3 个位置测元和 3 个速度测元)解算 6 个轨迹参数, 就出现了不完全测量的情况, 由于测量的数量少于待估参数的数量, 上述最小二乘估计模型是病态的, 其解可能不唯一, 即使能确定唯一解, 但由于误差传播过大而使得求解结果在数值上不稳定, 难以给出有效的轨迹参数估计。解决不完全测量问题一个重要途径是通过物理机理分析、从历史数据挖掘先验信息等, 寻求待估参数的稀疏表示, 以降低模型解空间的维数, 改善问题的病态性。通过对飞行器运动特性和大量实际轨迹数据的分析发现, 采用 B 样条函数表示轨迹参数能够在保证精度的前提下大幅度减少待估参数。

将轨迹参数表示为如下  $n + 1$  阶 B 样条函数:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i^x B_{i,n+1}^x(t, T^x) \\ \dot{x}(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i^x \dot{B}_{i,n+1}^x(t, T^x) \\ y(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i^y B_{i,n+1}^y(t, T^y) \\ \dot{y}(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i^y \dot{B}_{i,n+1}^y(t, T^y) \\ z(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i^z B_{i,n+1}^z(t, T^z) \\ \dot{z}(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i^z \dot{B}_{i,n+1}^z(t, T^z) \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $B_{i,n+1}^j(t, T^j)$  ( $j=x, y, z$ ) 为 B 样条基函数,  $\dot{B}_{i,n+1}^j(t, T^j)$  为 B 样条基的导数, 样条节点  $T^j = (\tau_{-n}^j, \tau_{-n+1}^j, \dots, \tau_{N_j+n}^j)$  为轨迹时间区间  $[t_1, t_M]$  的扩张分划:  $\tau_{-n}^j < \dots < t_1 = \tau_0^j < \tau_1^j < \dots < \tau_{N_j}^j = t_M < \dots < \tau_{N_j+n}^j$ 。令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= (b_{-n:N_x-1}^x, b_{-n:N_y-1}^y, b_{-n:N_z-1}^z)^T \\ \boldsymbol{T} &= (\tau_{-n:N_x+n}^x, \tau_{-n:N_y+n}^y, \tau_{-n:N_z+n}^z)^T \\ \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{T}) &= \begin{pmatrix} B_{-n:N_x-1,n+1}^x & 0 & 0 \\ 0 & B_{-n:N_y-1,n+1}^y & 0 \\ 0 & 0 & B_{-n:N_z-1,n+1}^z \\ \dot{B}_{-n:N_x-1,n+1}^x & 0 & 0 \\ 0 & \dot{B}_{-n:N_y-1,n+1}^y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{B}_{-n:N_z-1,n+1}^z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则式(4)表示为:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{T})\boldsymbol{\beta}$$

令  $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{B}(t_1, \boldsymbol{T}), \boldsymbol{B}(t_2, \boldsymbol{T}), \dots, \boldsymbol{B}(t_M, \boldsymbol{T}))^T$ , 于是, 式(3)变换为:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{E}$$

这样轨迹参数  $\boldsymbol{X}$  的估计转化为样条节点  $\boldsymbol{T}$  和样条系数  $\boldsymbol{\beta}$  的估计:

$$\arg \min_{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\beta})\|_2^2 \quad (5)$$

待估参数  $\boldsymbol{T}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  的数量显著小于  $\boldsymbol{X}$  的数量。

为进一步减少待估参数的数量, 可将稀疏性约束(非零待估参数的数量最少)加入优化模型(5)中, 构造如下稀疏表示寻优模型:

$$\arg \min_{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\beta}} (\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\beta})\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_0) \quad (6)$$

其中:  $\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\beta})\|_2^2$  反映了模型与数据的拟合程度;  $\|\boldsymbol{\beta}\|_0$  反映了参数的稀疏程度;  $\lambda$  为权系数, 用于平衡拟合程度和参数的稀疏程度。

模型(6)在估计样条系数  $\boldsymbol{\beta}$  的同时, 需确定样条节点序列  $\boldsymbol{T}$ , 模型的非线性程度非常高, 计算量太大, 难以获得全局最优解。可以先由粗略的轨迹参数预先确定样条节点  $\boldsymbol{T}^*$ , 然后再估计样条系数。事实上, 样条节点数决定了样条系数的数

量, 从而决定了待估参数的数量, 因此,  $\boldsymbol{T}^*$  的选取应在保证较小的拟合误差的前提下, 尽量压缩其数量, 以改善估计模型的病态性。第2节将给出一种基于稀疏优化的样条节点选取方法, 能够大幅度减少样条节点数。确定  $\boldsymbol{T}^*$  后, 只需估计样条系数, 即求解优化问题:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}^*)\boldsymbol{\beta})\|_2^2$$

上述问题可利用高斯牛顿法求解, 获得样条系数的估计  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  后, 即可得到轨迹参数的估计  $\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}^*)\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 。高斯牛顿法的迭代公式为:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} + \omega (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1} \boldsymbol{\Theta}^T [\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}^*)\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})] \quad (7)$$

其中,  $\omega > 0$  为收敛因子,  $\boldsymbol{\Theta} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}^*)\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}}$  为梯度矩阵。令  $\rho(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}^*)\boldsymbol{\beta})\|_2^2$ , 设置最大迭代次数  $L$ , 高斯牛顿法的迭代步骤如下:

**步骤1:** 令  $i=0, \omega=1$ , 利用 B 样条函数拟合粗略轨迹参数, 获得迭代初值  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$ 。

**步骤2:** 由式(7)求  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}$ , 并计算  $\rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)})$ 。

**步骤3:** 若  $|\rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}) - \rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})| < \delta$  或  $i+1 > L$ , 迭代终止, 输出结果 ( $\delta$  为给定的小量,  $\delta > 0$ ); 若  $\rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}) \leq \rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})$ , 令  $i=i+1, \omega=1$ , 转到步骤2; 若  $\rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}) > \rho(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})$ , 令  $\omega=\omega/2$ , 转到步骤2。

## 2 基于稀疏优化的样条节点选取

样条节点的选取应依据轨迹参数的动力学特性, 在变化剧烈、可微性较差的轨迹段落(例如级间段)节点分布较为密集, 在变化平缓的段落节点分布较为稀疏。遥测轨迹参数源于飞行器平台系统的加速度表测量, 其动力特征与飞行器的实际运动轨迹具有很好的一致性<sup>[5]</sup>, 可作为确定样条节点的粗略轨迹参数。下面只给出  $x$  方向的样条节点确定方法,  $y$  和  $z$  方向的方法相同。

### 2.1 样条节点的稀疏优化模型

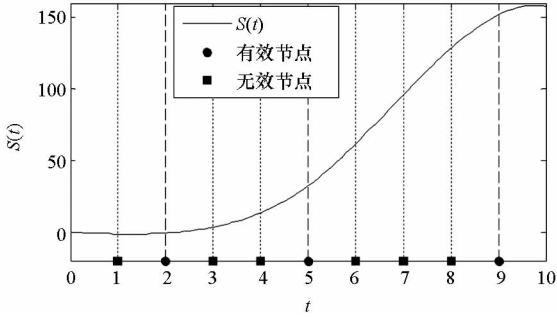
给定区间  $[a, b]$  上的扩充分划  $\eta: \tau_{-n} < \tau_{-n+1} < a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b < \dots < \tau_{N+n}$ , 其  $n+1$  阶 B 样条基函数记为  $B_{i,n+1}(t)$ ,  $i = -n, -n+1, \dots, N-1$ ,  $[a, b]$  上的  $n+1$  阶 B 样条函数表示为:

$$S(t) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i B_{i,n+1}(t) \quad (8)$$

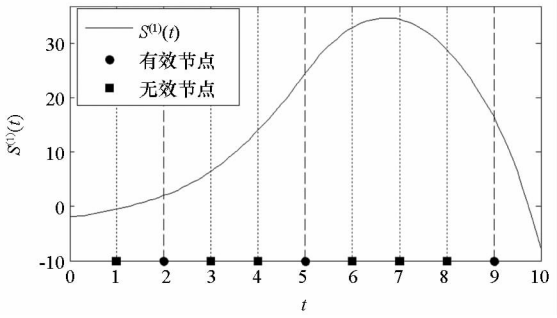
其中,  $b_i$  为常值样条系数,  $\tau_i$  ( $i=1, 2, \dots, N-1$ ) 称为内节点序列。  $S(t)$  是  $[a, b]$  上的  $n-1$  阶连续可微函数,  $n$  阶导函数  $S^{(n)}(t)$  为分段常值函数, 其不连续点全部位于内节点序列中。关于  $S^{(n)}(t)$  不连续的内节点称为有效节点, 连续的内

节点称为无效节点。无效节点是冗余的,即删除无效节点后,不会改变样条函数值。为减少样条节点的数量,应去除无效节点,并且最大限度压缩有效节点的数量。图 1 为一个包含 9 个内节点的

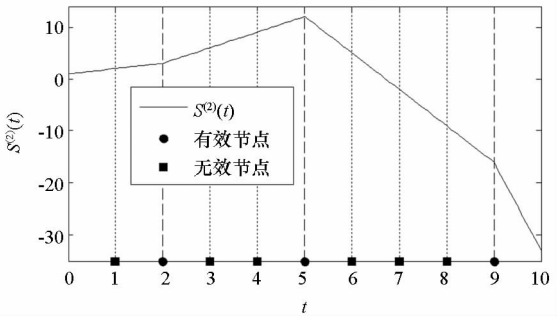
四阶 B 样条函数及其前三阶导数的曲线图,内节点中包括 6 个无效节点和 3 个有效节点,可以看出,三阶导数为阶梯函数,其不连续点位于 3 个有效节点处。



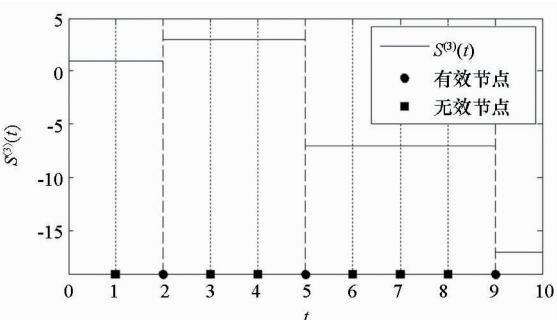
(a) 四阶 B 样条函数  $S(t)$   
(a) Four order B-spline  $S(t)$



(b) 一阶导数  $S^{(1)}(t)$   
(b) The first order derivative  $S^{(1)}(t)$



(c) 二阶导数  $S^{(2)}(t)$   
(c) The second order derivative  $S^{(2)}(t)$



(d) 三阶导数  $S^{(3)}(t)$   
(d) The third order derivative  $S^{(3)}(t)$

图 1 四阶 B 样条函数及其前三阶导数

Fig. 1 A four order B-spline and its first three derivatives

$t$  时刻遥测轨迹  $x$  方向的位置和速度分别记为  $r(t)$  和  $v(t)$ ,所有采样时刻的位置和速度分别为  $\mathbf{r} = (r(t_1), r(t_2), \dots, r(t_M))^T$  和  $\mathbf{v} = (v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_M))^T$ 。利用式 (8) 所表示的样条函数  $S(t)$  拟合  $\mathbf{r}$ ,并用其导数  $\dot{S}(t)$  拟合  $\mathbf{v}$ ,令

$$\boldsymbol{\theta} = (b_{-n}, b_{-n+1}, \dots, b_{N-1})^T$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} B_{-n,n+1}(t_1) & B_{-n+1,n+1}(t_1) & \dots & B_{N-1,n+1}(t_1) \\ B_{-n,n+1}(t_2) & B_{-n+1,n+1}(t_2) & \dots & B_{N-1,n+1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-n,n+1}(t_M) & B_{-n+1,n+1}(t_M) & \dots & B_{N-1,n+1}(t_M) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \dot{B}_{-n,n+1}(t_1) & \dot{B}_{-n+1,n+1}(t_1) & \dots & \dot{B}_{N-1,n+1}(t_1) \\ \dot{B}_{-n,n+1}(t_2) & \dot{B}_{-n+1,n+1}(t_2) & \dots & \dot{B}_{N-1,n+1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{B}_{-n,n+1}(t_M) & \dot{B}_{-n+1,n+1}(t_M) & \dots & \dot{B}_{N-1,n+1}(t_M) \end{pmatrix}$$

$S^{(n)}(t)$  在  $\tau_i (1 \leq i \leq N-1)$  处的左极限和右极限分别记为  $S^{(n)}(\tau_i^-)$  和  $S^{(n)}(\tau_i^+)$ ,令

$$\mathbf{D} = (S^{(n)}(\tau_1^+) - S^{(n)}(\tau_1^-), S^{(n)}(\tau_2^+) - S^{(n)}(\tau_2^-), \dots, S^{(n)}(\tau_{N-1}^+) - S^{(n)}(\tau_{N-1}^-))^T$$

则  $\mathbf{D}$  中的非零元对应于  $S^{(n)}(t)$  的不连续点,即有效节点。为压缩有效节点数,应在保证  $S(t)$  对  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  的拟合误差不超过允许值的条件下,使  $\mathbf{D}$  中的非零元素尽量少,即建立如下稀疏优化模型:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{D}\|_0$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \|\mathbf{r} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}\|_{\infty} \leq \delta_1 \\ \|\mathbf{v} - \dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\theta}\|_{\infty} \leq \delta_2 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\delta_1$  和  $\delta_2$  为设定的位置和速度拟合误差门限,  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 。

为保证模型 (9) 存在可行解并且  $\mathbf{D}$  具有稀疏性,应选取密集的初始样条节点  $\boldsymbol{\eta}$ ,求解模型后,将无效节点从  $\boldsymbol{\eta}$  中删除,剩余的有效节点即为所需的优化样条节点。本文采用节点加密方法确定初始样条节点,步骤为:

**步骤 1:** 取较为密集的等距样条节点序列  $\boldsymbol{\eta}$ 。

**步骤 2:** 用  $\boldsymbol{\eta}$  确定的样条基函数拟合  $x$  方向遥测轨迹的位置  $\mathbf{r}$  和速度  $\mathbf{v}$ ,即求解优化问题  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} (\rho \|\mathbf{r} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + (1 - \rho) \|\mathbf{v} - \dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2)$ ,其中,  $0 < \rho < 1$  为归一化系数,由遥测数据位置和速度参数的精度确定其取值。设置误差门限  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ,

要求  $0 < \sigma_1 \leq \delta_1, 0 < \sigma_2 \leq \delta_2$ , 将拟合误差  $\mathbf{r} - \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\theta}}$  与  $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{K}}\hat{\boldsymbol{\theta}}$  中超出  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的时间点集合记为  $T'$ , 如果  $T'$  为空集则结束, 输出节点序列  $\boldsymbol{\eta}$ ; 否则, 从  $\boldsymbol{\eta}$  中提取接近于  $T'$  的所有节点  $\boldsymbol{\eta}'$ .

**步骤 3:** 对  $\boldsymbol{\eta}'$  按距离聚类, 把每一类各节点间的中点加入节点序列  $\boldsymbol{\eta}$  中, 转到步骤 2。

下面给出模型 (9) 的凸优化求解方法。

### 2.2 稀疏优化模型的求解方法

为求解模型 (9), 需要获得  $\mathbf{D}$  关于  $\boldsymbol{\theta}$  的函数表达式。事实上,  $\mathbf{D}$  是关于  $\boldsymbol{\theta}$  的线性函数, 可将模型 (9) 转化为线性凸优化问题, 便能够利用多项复杂度的凸优化方法完成模型求解。为确定  $\mathbf{D}$  关于  $\boldsymbol{\theta}$  的函数表达式, 给出如下定理:

**定理**  $n+1$  阶 B 样条函数  $S(t)$  的  $k$  阶导数  $S^{(k)}(t) (1 \leq k \leq n)$  在  $[a, b]$  上满足:

$$S^{(k)}(t) = \prod_{i=1}^k (n+1-i) \sum_{i=-n+k}^{N-1} b_i^{(k)} B_{i, n+1-k}(t) \quad (10)$$

其中,

$$\begin{cases} b_i^{(k)} = \frac{b_i^{(k-1)} - b_{i-1}^{(k-1)}}{t_{i+n+1-k} - t_i} & 1 \leq k \leq N \\ b_i^{(0)} = b_i \end{cases} \quad (11)$$

下面采用数学归纳法完成该定理的证明。

证明:  $B_{i, n+1}(t)$  满足如下微分关系<sup>[2]</sup>:

$$\frac{dB_{i, n+1}(t)}{dt} = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} B_{i, n}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} B_{i+1, n}(t) \quad (12)$$

当  $k=1$  时, 由式 (8) 和式 (12) 得:

$$\begin{aligned} S^{(1)}(t) &= \sum_{i=-n}^{N-1} b_i B_{i, n+1}^{(1)}(t) \\ &= \sum_{i=-n}^{N-1} b_i \left[ \frac{n}{t_{i+n} - t_i} B_{i, n}(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} B_{i+1, n}(t) \right] \\ &= (n+1-1) \sum_{i=-n+1}^{N-1} \frac{b_i - b_{i-1}}{t_{i+n} - t_i} B_{i, n}(t) + \\ &\quad b_{-n} \frac{n}{t_0 - t_{-n}} B_{-n, n}(t) - b_{N-1} \frac{n}{t_{N+n} - t_N} B_{N, n}(t) \end{aligned}$$

当  $t \in [a, b]$  时,  $B_{-n, n}(t) \equiv 0, B_{N, n}(t) \equiv 0$ , 于是

$$\begin{aligned} S^{(1)}(t) &= (n+1-1) \sum_{i=-n+1}^{N-1} \frac{b_i - b_{i-1}}{t_{i+n} - t_i} B_{i, n}(t) \\ &= (n+1-1) \sum_{i=-n+1}^{N-1} b_i^{(1)} B_{i, n}(t) \end{aligned}$$

定理成立。假设当  $k=j$  时定理成立, 当  $k=j+1$  时, 由式 (10) 和式 (12) 得:

$$S^{(j+1)}(t) = \prod_{i=1}^{j+1} (n+1-i) \sum_{i=-n+j}^{N-1} b_i^{(j+1)} B_{i, n+1-j}(t)$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^j (n+1-i) \sum_{i=-n+j}^{N-1} b_i^{(j)} \left[ \frac{n-j}{t_{i+n-j} - t_i} B_{i, n-j}(t) - \right. \\ &\quad \left. \frac{n-j}{t_{i+n-j+1} - t_{i+1}} B_{i+1, n-j}(t) \right] \\ &= \prod_{i=1}^j (n+1-i) \left[ \sum_{i=-n+j+1}^{N-1} \frac{(n-j)(b_i^{(j)} - b_{i-1}^{(j)})}{t_{i+n-j} - t_i} B_{i, n-j}(t) + \right. \\ &\quad \left. b_{-n+j}^{(j)} \frac{n-j}{t_0 - t_{-n+j}} B_{-n+j, n-j}(t) - b_{N-1}^{(j)} \frac{n-j}{t_{N+n-j} - t_N} B_{N, n-j}(t) \right] \\ &\quad \text{当 } t \in [a, b] \text{ 时, } B_{-n+j, n-j}(t) \equiv 0, B_{N, n-j}(t) \equiv 0, \text{ 式 (11) 成立, 则有:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{(j+1)}(t) &= \prod_{i=1}^{j+1} (n+1-i) \sum_{i=-n+j+1}^{N-1} \frac{b_i^{(j)} - b_{i-1}^{(j)}}{t_{i+n+1-(j+1)} - t_i} \times \\ &\quad B_{i, n+1-(j+1)}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{j+1} (n+1-i) \sum_{i=-n+j+1}^{N-1} b_i^{(j+1)} B_{i, n+1-(j+1)}(t) \end{aligned}$$

定理得证。 □

由定理得知:

$$S^{(n)}(t) = n! \sum_{i=0}^{N-1} b_i^{(n)} B_{i, 1}(t)$$

而

$$B_{i, 1}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ 0 & t \notin [\tau_i, \tau_{i+1}) \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, N-1$$

于是对于  $i=1, \dots, N-1$ , 有:

$$\begin{cases} S^{(n)}(\tau_i^-) = n! b_{i-1}^{(n)} \\ S^{(n)}(\tau_i^+) = n! b_i^{(n)} \end{cases} \quad (13)$$

由式 (11) 和式 (13) 知,  $\mathbf{D}$  与  $\boldsymbol{\theta}$  存在线性关系  $\mathbf{D} = \mathbf{C}\boldsymbol{\theta}$ , 其中  $\mathbf{C}$  为  $(N-1) \times (N+n)$  阶的矩阵。这样, 模型 (9) 转化为约束优化问题:

$$\begin{aligned} &\min \|\mathbf{C}\boldsymbol{\theta}\|_0 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \|\mathbf{r} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}\|_\infty \leq \delta_1 \\ \|\mathbf{v} - \dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\theta}\|_\infty \leq \delta_2 \end{cases} \end{aligned}$$

但上述最小化  $l_0$  范数为 NP 难解问题, 可用  $l_1$  范数代替  $l_0$  范数, 转化为线性凸优化问题:

$$\begin{aligned} &\min \|\mathbf{C}\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \|\mathbf{r} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}\|_\infty \leq \delta_1 \\ \|\mathbf{v} - \dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\theta}\|_\infty \leq \delta_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

可利用具有多项式复杂度的凸优化方法<sup>[14]</sup>求解。

模型 (14) 的最优解记为  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , 令  $\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}} = (d_1, d_2, \dots, d_{N-1})^T$ , 设置小量  $\varepsilon$ , 将  $|d_i| < \varepsilon$  对应的  $\tau_i$  (无效节点) 从分划  $\boldsymbol{\eta}$  中删除, 使得  $\boldsymbol{\eta}$  中仅包含有效节点, 这样就完成了  $x$  方向样条节点的优化选取。

### 3 仿真实验与结果分析

飞行器的真实轨迹参数由动力学方程<sup>[15]</sup>积

分产生,时长为 94 s,轨迹中含有一个级间段,位于 33.4 s 附近。由 9 台连续波雷达(测元为距离和径向速度)和 4 台光学设备(测元为方位角和俯仰角)对飞行器跟踪测量,仿真测量数据由测量真值加随机误差构成,其中,连续波雷达的测距精度为 8.3 m,测速精度为 0.05 m/s,光学设备方位角和俯仰角的测量精度都为 5"。设置两个不完全测量场景:场景 1 的不完全测量段落为 45 s—75 s 的轨迹平稳段,该时间段只有 2 台连续波雷达的 2 个距离和 2 个径向速度测元,其余时间所有设备的测量数据完好;场景 2 的不完全测量段落也是 45 s—75 s,该时间段只有 1 台光学设备的 1 个俯仰角和 1 个方位角测元。

采用 5 阶 B 样条函数表示轨迹参数,利用 2.1 节中的节点加密方法确定  $x$ 、 $y$  和  $z$  三个方向遥测轨迹的初始样条节点,拟合误差门限取为  $\sigma_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $\sigma_2 = 0.05 \text{ m/s}$ ,不完全测量段落的初始节点距取为 0.2 s,其余段落的初始节点距取为 1 s。经过 3~4 次节点加密即可使拟合误差小于门限值, $x$ 、 $y$  和  $z$  三个方向加密后的内节点数分别为 237、239 和 213。图 2 和图 3 给出了  $x$  方向初始样条节点的分布以及位置、速度的拟合误差,可见,节点加密部分主要位于级间段,节点加密后的拟合误差满足门限设置要求。

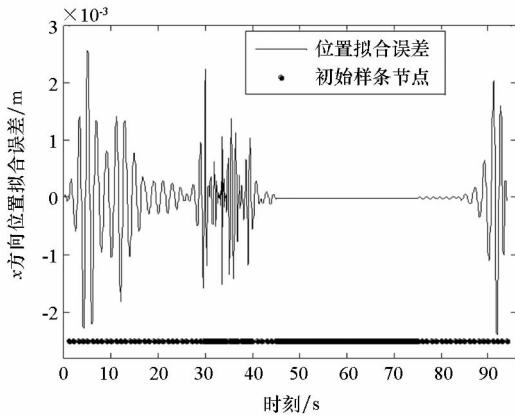


图 2  $x$  方向的初始样条节点和位置拟合误差  
Fig. 2 Initial knots of spline and fitting errors of position for  $x$ -coordinate

由不完全测量段落(45 s—75 s)的初始样条节点建立稀疏优化模型,模型中的拟合误差门限取为  $\delta_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $\delta_2 = 0.05 \text{ m/s}$ ,利用 CVX 凸优化程序包<sup>[16]</sup>对模型进行求解, $x$ 、 $y$  和  $z$  三个方向剔除节点的  $|\mathbf{C}\theta|$  阈值都取为  $1\text{E}-5$ ,三个方向上优化后的样条内节点数分别为 95、96 和 62,明显少于初始内节点数。图 4 和图 5 为  $x$  方向稀疏优化后的样条节点分布以及位置、速度的拟合误差,可

以看出,不完全测量段落的样条节点分布稀疏,拟合误差未超出门限。

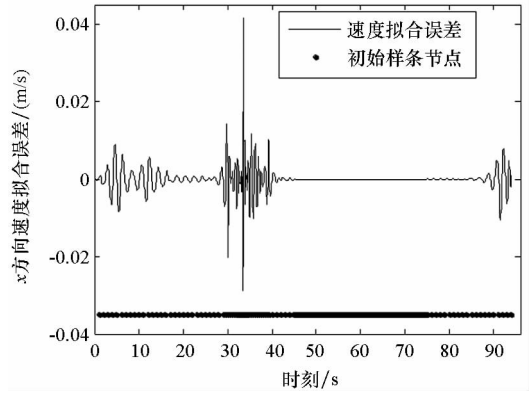


图 3  $x$  方向的初始样条节点和速度拟合误差  
Fig. 3 Initial knots of spline and fitting errors of velocity for  $x$ -coordinate

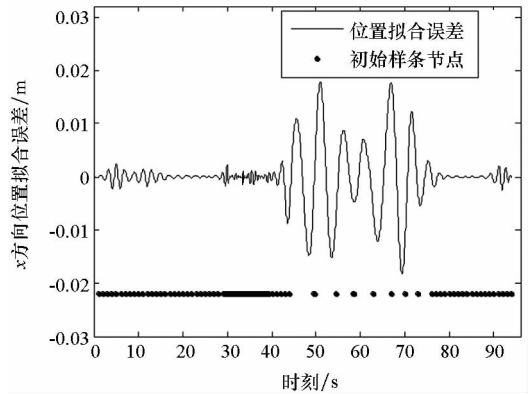


图 4  $x$  方向的优化样条节点和位置拟合误差  
Fig. 4 Optimized knots of spline and fitting errors of position for  $x$ -coordinate

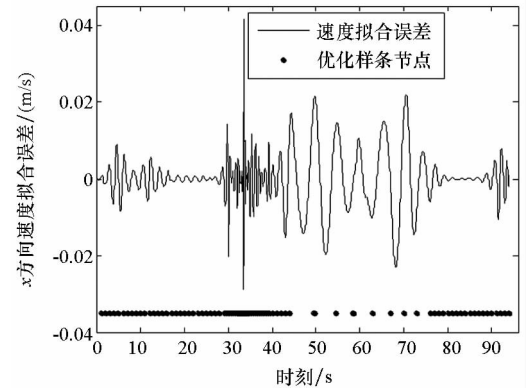


图 5  $x$  方向的优化样条节点和速度拟合误差  
Fig. 5 Optimized knots of spline and fitting errors of velocity for  $x$ -coordinate

利用上述稀疏优化后的样条节点结合测量数据估计轨迹参数。将本文方法的估计结果与文献[5]提出的基于轨迹动力特征的估计方法(方法 1)、基于多项式模型的估计方法(方法 2)进行

比较,其中,方法2采用三个多项式表示 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 三个方向的轨迹参数,由测量数据优化求解多项式系数,用以确定不完全测量段落的轨迹参数,方法2在完全测量段落的估计方法与方法1相同。

图6和图7分别是场景1位置和速度估计误差的对比图,可以看出,本文方法在不完全测量段落对轨迹参数的估计精度相对方法1和方法2都有大幅度的提高,方法1在不完全测量段落的位置和速度平均误差分别为1.33 m和0.240 m/s,方法2的平均误差为3.91 m和0.573 m/s,而本文方法的平均误差只有0.38 m和0.067 m/s。场景2位置和速度估计误差的对比见图8和图9,可见,本文方法相对方法1和方法2仍然能够大幅度提高不完全测量段落的轨迹参数估计精度,本文方法在不完全测量段落的位置和速度平均误差为0.74 m和0.117 m/s,而方法1的平均误差达到了2.73 m和0.471 m/s,方法2的平均误差达到了5.74 m和0.823 m/s。本文方法、方法1和方法2在不完全测量段落待估参数的数量分别为17、29和20。本文方法相对方法1能够提高估计精度,是因为通过样条节点的稀疏优化大幅

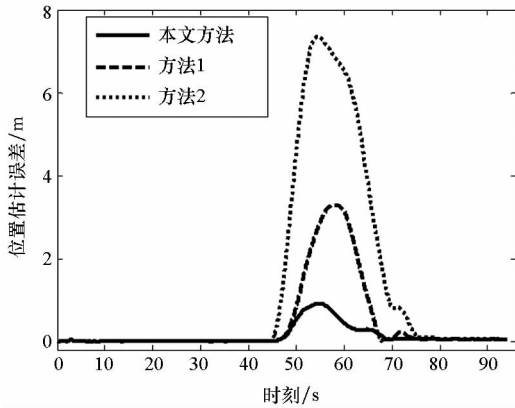


图6 场景1位置估计误差

Fig. 6 Errors of position estimates in scenario 1

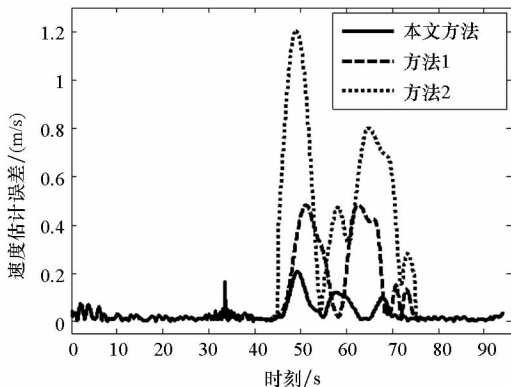


图7 场景1速度估计误差

Fig. 7 Errors of velocity estimates in scenario 1

度减少了待估参数的数量,缓解了模型的病态性;方法2待估参数的数量虽然也较少,但用多项式表示轨迹参数引入了较大的截断误差,估计精度低。场景2的估计误差相对场景1较大,这是由于场景2在不完全测量段落的测量数据数量比场景1更少。

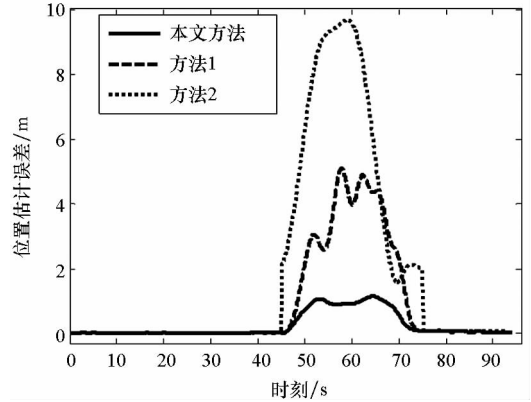


图8 场景2位置估计误差

Fig. 8 Errors of position estimates in scenario 2

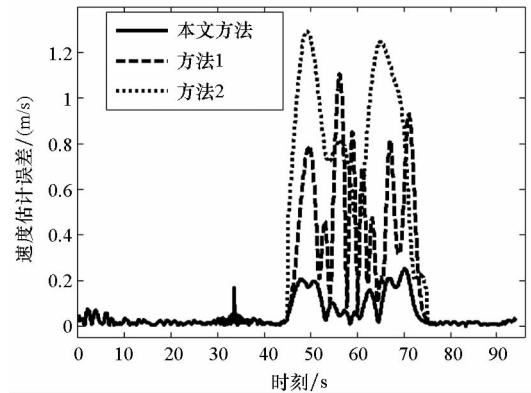


图9 场景2速度估计误差

Fig. 9 Errors of velocity estimates in scenario 2

## 4 结论

研究不完全测量条件下的飞行器轨迹参数估计问题,提出了一种基于稀疏优化的轨迹参数估计新方法。利用B样条函数给出轨迹参数的稀疏表示,建立了估计轨迹参数的寻优模型;依据样条函数高阶导数在节点处的不连续性,将表示样条的节点划分为有效节点和无效节点两类,模型待估参数的数量取决于有效节点的数量;采用稀疏优化方法最大限度压缩样条的有效节点数,从而减少待估参数的数量,改善模型的病态性。仿真结果表明,在不完全测量段落,稀疏优化方法相对已有的基于轨迹动力特征的估计方法能够大幅度提高轨迹参数的估计精度。本文的方法没有考虑测量设备的系统误差,下一步将研究不完全测

量条件下的轨迹参数和系统误差的联合估计方法,实现系统误差自校准。

## 参考文献 (References)

- [1] Liu J, Zhu J, Xie M. Trajectory estimation with multi-range-rate system based on sparse representation and spline model optimization [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2010, 23(1): 84–90.
- [2] 官志华, 周海银, 郭文胜, 等. 基于样条函数表征目标运动轨迹事后数据融合方法研究 [J]. 兵工学报, 2014, 35(1): 120–127.  
GONG Zhihua, ZHOU Haiyin, GUO Wensheng, et al. Data fusion algorithm for target trajectory determination based on spline function representation [J]. Acta Armamentarii, 2014, 35(1): 120–127. (in Chinese)
- [3] 郭军海, 赵华. 一种运载火箭上升段轨迹的高精度确定方法 [J]. 宇航学报, 2015, 36(9): 1018–1023.  
GUO Junhai, ZHAO Hua. Accurate algorithm for trajectory determination of launch vehicle in ascent phase [J]. Journal of Astronautics, 2015, 36(9): 1018–1023. (in Chinese)
- [4] Zhu J. Data fusion techniques for incomplete measurement of trajectory [J]. Chinese Science Bulletin, 2001, 46(8): 627–629.
- [5] 赵文策, 潘建平, 陈伟利. 基于弹道动力特性考虑的不完全测量数据处理方法 [J]. 飞行器测控学报, 2006, 25(6): 64–68.  
ZHAO Wence, PAN Jianping, CHEN Weili. The processing method of incomplete instrumentation data based on consideration of trajectory dynamic characteristics [J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology, 2006, 25(6): 64–68. (in Chinese)
- [6] Zhang Y, Gulliksson M, Hernandez-Bennetts V M, et al. Reconstructing gas distribution maps via an adaptive sparse regularization algorithm [J]. Inverse Problem in Science and Engineering, 2016, 24(7): 1186–1204.
- [7] Zhang Z, Xu Y, Yang J, et al. A survey of sparse representation: algorithms and applications [J]. IEEE Access, 2017, 3: 490–530.
- [8] Hase N, Miller S M, Maaß P, et al. Atmospheric inverse modeling via sparse reconstruction [J]. Geoscientific Model Development, 2017, 10(10): 3695–3713.
- [9] Wallis C G R, Wiaux Y, McEwen J D. Sparse image reconstruction on the sphere: analysis and synthesis [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2017, 26(11): 5176–5187.
- [10] 张涛, 樊士伟, 薛永宏, 等. 基于最优样条节点的导弹主动段弹道估计方法 [J]. 航空学报, 2015, 36(9): 3027–3033.  
ZHANG Tao, FAN Shiwei, XUE Yonghong, et al. Trajectory estimation algorithm of missile in boost phase using optimal knots spline [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(9): 3027–3033. (in Chinese)
- [11] Kang H, Chen F, Li Y, et al. Knot calculation for spline fitting via sparse optimization [J]. Computer-Aided Design, 2015, 58: 179–188.
- [12] Yuan Y, Chen N, Zhou S. Adaptive B-spline knot selection using multi-resolution basis set [J]. IIE Transactions, 2013, 45(12): 1263–1277.
- [13] Brandt C, Seidel H P, Hildebrandt K. Optimal spline approximation via  $\ell_0$ -minimization [J]. Computer Graphics Forum, 2015, 34(2): 617–626.
- [14] Polyak R. Lagrangian transformation and interior ellipsoid methods in convex optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2015, 164(3): 966–992.
- [15] Hough M E. Nonlinear recursive filter for boost trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(5): 991–997.
- [16] Michael C G, Stephen P B. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1. [EB/OL]. [2017–12–01]. <http://cvxr.com/cvx>.