doi:10.11887/j.cn.202002013 http://journal.nudt.edu.cn

空间双体系绳系统展开阶段末端星姿态动力学分析*

陈书敏[1,2],王长青[1,2],扎伯罗特诺夫·尤里[2,3],李爱军[1,2]

(1. 西北工业大学 自动化学院,陕西 西安 710129;2. 中俄国际空间系绳系统研究中心,陕西 西安 710129;
3. 萨马拉国家研究型大学 空间与火箭技术学院,俄罗斯 萨马拉 443082)

摘　要:为了研究空间系绳系统展开过程中末端星的姿态运动,采用第二类拉格朗日方程建立系统展开及末端星角运动的数学模型,分析展开阶段末端星的姿态动力学特性。建模时将系绳末端连接的母星与子星视为尺寸不可忽略的刚体,且母星质量远大于子星质量,系绳视为有质量的刚性杆。利用该数学模型可以分析系绳系统的展开过程,研究影响末端星姿态运动的主要因素,包括姿态角初始扰动以及末端星动/静不对称性。仿真结果表明,系绳展开时末端星姿态角初始扰动及动静不对称性可能会导致姿态角失稳,出现系绳缠绕星体的情况。仿真结果可以为展开阶段末端星姿态控制提供参考。

关键词:空间系绳系统;展开过程;第二类拉格朗日方程;末端星姿态;动态及静态不对称性

中图分类号:V448.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-2486(2020)02-098-09

Attitude dynamic analysis of the end-bodies of space tether system in deployment

CHEN Shumin[1,2], *WANG Changqing*[1,2], *Zabolotnov Yuriy*[2,3], *LI Aijun*[1,2]

(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;
2. China-Russia International Research Center of Space Tether System, Xi'an 710129, China;
3. School of Space and Rocket Technology, Samara National Research University, Samara 443086, Russia)

Abstract: In order to analyze the attitude motion of end-bodies in deployment of STS (space tether system), based on the Lagrangian equations of the second kind, the mathematical model of deployment of the system and the angular motion of end-bodies were developed, to analyze the attitude dynamics of end-bodies in deployment. Since the sizes of satellites are not negligible in actual space missions, the mother-satellite and sub-satellite connected by tether were regarded as rigid bodies with certain sizes, and the mass of the mother-satellite is much larger than the sub-satellite in modeling. Besides, the tether is regarded as a rigid rod with a certain mass. The mathematical model was used to analyze the deployment process of STS, and to analyze the main influence factors to the attitude motions of end-bodies including the initial disturbance of attitude angles, and the dynamic or static asymmetry of end-bodies. Simulation results demonstrate that either the initial disturbance or the dynamic and static asymmetry of end-bodies in deployment can cause the attitude angles instability, or even cause the tether enwinding satellites. The simulation results can provide reference for the attitude control of satellites in deployment.

Keywords: space tether system; deployment; Lagrangian equations of the second kind; attitude of the end-bodies; dynamic and static asymmetry

空间系绳系统(Space Tether System, STS)是一种可延展数十乃至上百千米的复杂动力学系统。作为一种新型航天器组合体,该系统具有广阔的应用前景。例如:利用长系绳系统可探测地球大气、重力场及磁场等[1-2];利用系绳代替传统的刚体机械臂所构成的空间绳系机器人可执行太空垃圾捕获、拖曳离轨等太空任务[3-4]。

空间系绳系统的动力学建模是研究的重难点。建立精确的动力学模型是一个亟待解决的问题[5]。一般而言,系绳展开是执行太空任务的第一步,也是任务成败的关键[6]。展开运动的复杂性要求对其动力学模型进行更深入细致的研究。

目前在系绳系统动力学研究领域,计入末端星姿态的系统动力学分析及控制问题研究尚不成熟。典型的系绳系统模型有连续体模型、离散模型以及刚性杆模型:连续体模型是基于偏微分方

* **收稿日期**:2018-10-10
基金项目:中央高校基本科研业务费资助项目(3102017JC06002);陕西省重点研发计划资助项目(2017KW-ZD-04)
作者简介:陈书敏(1993—),女,河南驻马店人,博士研究生,E-mail:chenshumin@mail.nwpu.edu.cn;
王长青(通信作者),男,副教授,博士,博士生导师,E-mail:wangcq@nwpu.edu.cn

程的分布参数式模型,这类模型结果精确,但方程求解较为复杂;离散模型假设系绳由一系列离散点通过无质量弹性杆连接构成,刘壮壮等[7]建立了一种改进的离散珠式模型,具有可变自由度等特点,但是当选取的离散点足够多时,同样面临计算量过大的问题[8];刚性杆模型可以降低模型复杂度,缩短计算时间,并能体现系绳系统的基本特性,得到了广泛应用,学者们基于刚性杆模型设计了多种系绳展开控制律[9]。总结而言,上述模型多侧重于对系统中的绳子进行建模分析,多将系绳末端连接的星体视为质点,忽略其尺寸及姿态运动。对于实际的太空任务,末端星姿态往往不可忽略。例如利用系绳系统执行近距离空间抓捕任务时,需要对系绳末端的抓捕机构及目标进行姿态分析及控制[10]。

计入末端星体姿态运动时,系绳系统的动力学与控制问题变得较为复杂。此时,系统为快-慢时变自由度动力学系统[11]。Zabolotnov[12]采用积分流形法对这类系统的快、慢变量进行了分离处理。余本嵩等[13]将释放机构视为质点,研究了系绳释放对主星姿态的影响。Pang 等[14]指出在一定的参数条件下,系统中的主星姿态将产生混沌运动。朱仁璋等[15]研究了状态保持阶段的子星振荡与姿态运动。Liu 等[16]针对短系绳建立了考虑子星姿态的动力学模型,并利用推力对子星姿态进行稳定控制。Gou 等[17]针对展开过程子星姿态不稳定问题,采用分数阶控制设计了姿态稳定控制器。上述研究对系绳一端星体(母星或子星)的姿态进行了分析,但未将母星及子星的姿态进行综合考虑,且忽略了系绳展开与末端星姿态之间的耦合作用,而这种耦合作用可能导致系绳展开时缠绕卫星,因此有必要对此加以研究。

研究末端星的姿态运动时,需要考虑星体动/静不对称性所造成的影响。静不对称性是指系绳连接点与星体惯性轴之间的偏差,动不对称性则是衡量刚体质量惯性特性不均匀性的指标。王长青等[18]采用欧拉-牛顿方法建立了考虑子星姿态的系绳系统数学模型,并基于该模型研究了子星静不对称的影响,但采用欧拉方程建立的姿态模型存在章动角奇异的情况。在卫星制造过程中,通常存在动/静不对称性;且在系绳系统运行过程中,若产生质量损耗或突变(如捕获),星体不对称性将发生变化,因此需要研究星体不对称性对系绳系统运动的影响。

本文研究空间双体系绳系统展开过程中末端星体姿态的动力学问题,贡献在于:①将系统中母星及子星视为尺寸不可忽略的刚体,推导出计入末端星姿态的系统展开数学模型,并考虑了系绳展开与末端星姿态运动之间的耦合作用;②利用所得模型研究了系绳系统展开过程中末端星的角运动,以及存在初始扰动及动/静不对称性时的动力学特性。

1　动力学建模

本文研究的空间系绳系统由系绳连接母星和子星构成,如图 1 所示。为描述系统的展开运动,需要用到下列坐标系:①$OXYZ$,地心赤道坐标系;②$OX_0Y_0Z_0$,地心轨道坐标系;③$cx_0y_0z_0$,轨道运动坐标系,原点位于系统质心,初始时刻各轴与 $OX_0Y_0Z_0$ 平行;④$cx_ty_tz_t$,系绳坐标系,cx_t 轴沿系绳方向,指向母星,cx_ty_t 平面与母星及子星矢径 R_a 和 R_b 所张成的平面共面;⑤$c_ix_iy_iz_i(i=1,2)$,末端星本体坐标系,原点固连于末端星质心处,各坐标轴沿星体惯性主轴方向。由系绳坐标系通过"$x-z-x$"顺序旋转可得到本体坐标系,相应的旋转角分别为末端星姿态角:进动角 ψ_i、章动角 α_i 以及自旋角 φ_i。

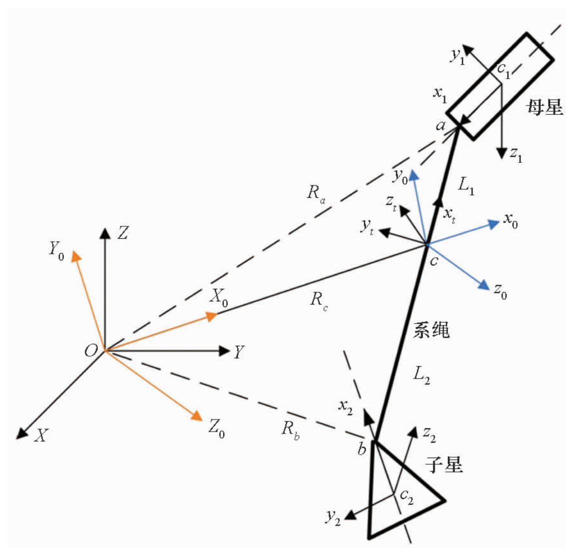


图 1　空间双体系绳系统示意图

Fig. 1　Diagram of STS

为简化模型推导过程,假设:

1)系统运行轨道为圆轨道,且运行轨道升交点赤经 Ω 及轨道倾角 i 不变。

2)仅考虑万有引力力矩与系绳张力力矩作用,忽略重力梯度及外部干扰作用影响。

3)系绳视为轴向不可承受压力的刚性杆。

由于系绳展开多在一个或几个轨道周期内完成,时间相对较短,因此质心轨道参数的变化幅度及外部干扰力矩的影响很小,可忽略不计。此外,

展开过程中系绳保持张紧，张力始终为正值，不会出现系绳压缩的情况，故可将系绳视为刚性杆。

根据第二类拉格朗日方程，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+Q_i \tag{1}$$

其中，T 表示系统动能，Π 表示系统势能，q_i、$\dot{q}_i$ 及 Q_i 分别为广义坐标、广义速度及无势力。

系统动能为：

$$T=T_1+T_2 \tag{2}$$

其中，T_1 表示母星动能，T_2 表示子星动能。

建模时，假设系绳展开速度与展开方向平行，即 $\boldsymbol{V}_{L_1}$ 与 $\boldsymbol{L}_1$ 共线，则母星动能 T_1 为：

$$\begin{aligned}T_1=&\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_1)^2m_1+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_1})^2m_1]+\\&\boldsymbol{V}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_1})m_1+\boldsymbol{V}_{L_1}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_1})m_1+\\&\boldsymbol{V}_c\cdot\boldsymbol{V}_{L_1}m_1+(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_1)\cdot(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_1})m_1+\\&\frac{1}{2}[\boldsymbol{V}_c^2m_1+\boldsymbol{V}_{L_1}^2m_1+\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1]+\\&\boldsymbol{V}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_1)m_1\end{aligned} \tag{3}$$

子星动能表达式与母星形式一致，因此将下角标 1 均用 2 替换，可得出子星的动能为：

$$\begin{aligned}T_2=&\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_2)^2m_2+(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_{c_2})^2m_2]+\\&\boldsymbol{V}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_{c_2})m_2+\boldsymbol{V}_{L_2}(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_{c_2})m_2+\\&\boldsymbol{V}_c\cdot\boldsymbol{V}_{L_2}m_2+(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_2)\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_{c_2})m_2+\\&\frac{1}{2}[\boldsymbol{V}_c^2m_2+\boldsymbol{V}_{L_2}^2m_2+\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_2]+\\&\boldsymbol{V}_c\cdot(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_2)m_2\end{aligned} \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{L}_1$ 表示从系统质心 c 指向母星连接点 a 的矢量，$\boldsymbol{L}_2$ 表示从 c 点指向子星连接点 b 的矢量，且假设 $\boldsymbol{L}_1$ 与 $\boldsymbol{L}_2$ 共线；$\boldsymbol{V}_c$ 表示系统质心速度，$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{V}_{L_1}=-\boldsymbol{V}_{L_2}$ 表示系绳展开速度；$\boldsymbol{\omega}_t$ 为系绳坐标系的旋转角速度，$\boldsymbol{\omega}_i(i=1,2)$ 表示星体本体坐标系的旋转角速度；$\boldsymbol{R}_{c_i}(i=1,2)$ 分别表示从母星及子星连接点指向相应星体坐标系原点的矢量；$\boldsymbol{J}_i(i=1,2)$ 为星体的惯性张量矩阵。

于是有：

$$\begin{aligned}2T_1+2T_2=&\boldsymbol{V}_c^2(m_1+m_2)+\boldsymbol{V}_{L_1}^2m_1+\boldsymbol{V}_{L_2}^2m_2+\\&(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_1)^2m_1+(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_2)^2m_2+\\&(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_1})^2m_1+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_2})^2m_2+\\&\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_2+2\boldsymbol{V}_{L_1}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1\times\\&\boldsymbol{R}_{c_1})m_1+2\boldsymbol{V}_{L_2}(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_{c_2})m_2+2(\boldsymbol{\omega}_t\times\\&\boldsymbol{L}_1)\cdot(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_{c_1})m_1+2(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_2)\cdot\\&(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_{c_2})m_2\end{aligned} \tag{5}$$

其中，

$$(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_1)^2m_1+(\boldsymbol{\omega}_t\times\boldsymbol{L}_2)^2m_2=\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_t\cdot\boldsymbol{\omega}_t \tag{6}$$

这里，J_t 为系绳系统的惯性张量矩阵，形式为：$\boldsymbol{J}_t=\mathrm{diag}(0,J_{ty},J_{tz})$。

计入系绳质量：$m_t=\rho L$，其中，ρ 表示系绳线密度，L 为系绳展开长度，$L=L_1+L_2$。则系绳系统的主惯性矩为：

$$J_{tz}=J_{ty}=J_t=m_1L_1^2+m_2L_2^2+\int_{m_t}(L_1^2+L_2^2)\mathrm{d}m_t \tag{7}$$

其中，$m_1L_1^2$ 与 $m_2L_2^2$ 表示星体质心相对于系统质心的惯性矩，$\int_{m_t}(L_1^2+L_2^2)\mathrm{d}m_t$ 表示系绳相对于系统质心的惯性矩。进行积分运算后可得：

$$\int_{m_t}(L_1^2+L_2^2)\mathrm{d}m_t=\frac{m_tL^2}{3}\left[\left(\frac{m_2+\dfrac{m_t}{2}}{m_1^0+m_2}\right)^3+\left(\frac{m_1+\dfrac{m_t}{2}}{m_1^0+m_2}\right)^3\right] \tag{8}$$

这里，m_1^0 表示母星初始质量，$m_1^0=m_1+\rho L$。

分析动能表达式发现，$V_{L_1}^2m_1+V_{L_2}^2m_2$ 表示系绳系统的展开动能，可写成如下形式：

$$V_{L_1}^2m_1+V_{L_2}^2m_2=m^*V_L^2 \tag{9}$$

其中，$m^*=\dfrac{(m_1^0-\rho L)(m_2+\rho L)}{m_\Sigma}$（$m_\Sigma$ 表示系统总质量）。

相对于系绳长度而言，$\boldsymbol{R}_{c_i}(i=1,2)$ 均为小量，因此可忽略 $\boldsymbol{R}_{c_i}(i=1,2)$ 及其比例项，以简化系统动能表达式。最终可得系统动能为：

$$\begin{aligned}T=&\frac{1}{2}(m_\Sigma V_c^2+m^*V_L^2+\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_t\cdot\boldsymbol{\omega}_t+\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1+\\&\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_2)\end{aligned} \tag{10}$$

这里，$V_c=R_c\Omega$（R_c 表示系统质心距地心的距离）。

系统势能表达式为：

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_t \tag{11}$$

其中，Π_t 表示将末端星体视为质点时的系统势能（即末端星质心的位置势能），Π_1、Π_2 分别表示将母星、子星视为有限尺寸刚体时的空间姿态势能。

作用在系绳系统上的万有引力为：

$$G=-\left(\int_{m_a}\frac{K_g}{r_1}\mathrm{d}m_a+\int_{m_b}\frac{K_g}{r_2}\mathrm{d}m_b\right) \tag{12}$$

其中，$m_a=m_1+m_{L_1}$ 为母星与系绳段 L_1 的总质量，$m_b=m_2+m_{L_2}$ 为子星与系绳段 L_2 的总质量，K_g 为地球的万有引力常数，$r_i(i=1,2)$ 表示地心到末端星质心的距离，可由几何关系求出：

$$r_i=R_c\sqrt{1+\left(\frac{L_i}{R_c}\right)^2+\left(\frac{R_{c_i}}{R_c}\right)^2+2\frac{L_i}{R_c}\cos\theta\cos\beta+\frac{R_{c_i}}{R_c}\cos\gamma_i+2\frac{L_iR_{c_i}}{R_c^2}\cos\delta_i} \tag{13}$$

式中，θ、β 分别表示系绳的面内角与面外角，γ_i 为

矢量 $\boldsymbol{R}_c$ 与 $\boldsymbol{R}_{c_i}$的夹角,δ_i 为 $\boldsymbol{L}_i$ 与 $\boldsymbol{R}_{c_i}$的夹角。

将$\frac{1}{r_i}$对小量$\frac{L_i}{R_c}$和$\frac{R_{c_i}}{R_c}$做级数展开,保留到二阶项,并代入式(12)化简可得:

$$G = -K_g \cdot \int_{m_a} \frac{1}{R_c}\left[1 + \frac{L_1^2}{2R_c^2}(3\cos^2\theta\cos^2\beta - 1)\right]\mathrm{d}m_1 - K_g \cdot \int_{m_b} \frac{1}{R_c}\left[1 + \frac{L_2^2}{2R_c^2 2}(3\cos^2\theta\cos^2\beta - 1)\right]\mathrm{d}m_2 \tag{14}$$

积分后可得母星及子星质心的位置势能为:

$$\Pi_t = -\frac{K_g M}{R_c} + \frac{K_g m' L^2}{2R_c^3}(1 - 3\cos^2\theta\cos^2\beta) \tag{15}$$

其中,$m' = \frac{m_1}{m_\Sigma^2}\left(m_2 + \frac{m_t}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{m_\Sigma^2}\left(m_1 + \frac{m_t}{2}\right)^2 + \frac{\rho L}{3m_\Sigma^3}\left[\left(m_2 + \frac{m_t}{2}\right)^3 + \left(m_1 + \frac{m_t}{2}\right)^3\right]$。

末端星在引力场中的姿态势能为 $\int_{m_i} \frac{R_{c_i}^2}{2R_c^2}(3\cos^2\gamma_i - 1)\mathrm{d}m_i$,积分后可得:

$$\Pi_i = \frac{3K_g}{2R_c^3}\left[J_{x_i}\cos^2\xi_{1_i} + J_{y_i}\cos^2\xi_{2_i} + J_{z_i}\cos^2\xi_{3_i} - \frac{1}{3}(J_{x_i} + J_{y_i} + J_{z_i})\right] \tag{16}$$

其中,ξ_{1_i}、ξ_{2_i}、ξ_{3_i}表示星体坐标系各轴偏离地垂线的角度,$\xi_{1_i} = \arccos(\boldsymbol{D}_{\Sigma_{i_{1,1}}})$,$\xi_{2_i} = \arccos(\boldsymbol{D}_{\Sigma_{i_{1,2}}})$,$\xi_{3_i} = \arccos(\boldsymbol{D}_{\Sigma_{i_{1,3}}})$。这里,矩阵 $\boldsymbol{D}_{\Sigma_i}$ 为坐标系 $c_i x_i y_i z_i$ 与惯性系之间的转换矩阵。

将上述各分项代入方程式(1)中,可得:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{J}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{q}_i} + \boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{J}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{q}_i} + \\ &\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial q_i} - \\ &\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial q_i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{J}_t \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_t}{\partial \dot{q}_i} + \boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_t}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_t}{\partial \dot{q}_i} + \\ &\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_t}{\partial \dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J}_t \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_t}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i\end{aligned} \tag{17}$$

式中:$i = 1,2,\cdots,8$;$q = (\alpha_{1,2}, \psi_{1,2}, \varphi_{1,2}, \theta, \beta)$。

同理,还可得出系绳展开时绳长 L 满足:

$$m_\Sigma \frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_t^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{J}_t}{\partial L} \cdot \boldsymbol{\omega}_t = -\frac{\partial \Pi}{\partial L} + F_c \tag{18}$$

其中,F_c 表示系绳张力。

根据各坐标系间转换关系,还可得末端星及系绳的角速度满足下列运动学方程:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\psi}_i \\ \dot{\varphi}_i \end{pmatrix} + \boldsymbol{D}_i \cdot \boldsymbol{B} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{u} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\omega}_t = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\sin\theta - \Omega\sin\beta \\ \dot{\beta}\cos\theta \\ \dot{\theta} + \Omega\cos\beta \end{pmatrix} \tag{20}$$

其中,矩阵 $\boldsymbol{D}_i$ 表示坐标系 $cx_t y_t z_t$ 与 $c_i x_i y_i z_i$ 间的转换矩阵,$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha_i & 1 \\ \sin\varphi_i & -\sin\alpha_i\cos\varphi_i & 0 \\ \cos\varphi_i & \sin\alpha_i\sin\varphi_i & 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta\sin\beta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\sin\beta \\ 1 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$。

综上,联立式(17)~(20),即得计入末端星姿态的空间双体系绳系统展开阶段数学模型。

2　系绳系统展开控制律

本文在忽略展开控制机构工作误差的情况下,通过参数优化得出标称展开控制力[19]:

$$F_c = \begin{cases} m^* \Omega^2\left(aL + b\dfrac{V_L}{\Omega} - cl_k\right) & t < t_1 \\ (T_{\min} - T_1)\sin^2[k(t - t_1)] + T_1 & t_1 \leqslant t < t_2 \\ T_{\min} & t_2 \leqslant t < t_1 + \delta_1 \\ \Delta T\sin^2[k(t - t_1 - \delta_1)] + T_{\min} & t_1 + \delta_1 \leqslant t < t_2 + \delta_1 \\ T_{\max} & t \geqslant t_2 + \delta_1 \end{cases}$$

在该控制律作用下,系绳进行两阶段展开,其中,$[0, t_1]$时间段内系绳展开速度较慢,该阶段展开长度 $l_k = 3$ km;$[t_1, t_2 + \delta_1]$时间段内系绳快速展开,完全展开后的长度为 30 km。a、b、c、ΔT、$T_{\min}$、$T_{\max}$、T_1、δ_1、k 为控制律参数,且存在关系:$t_1 = \delta_1 - \frac{\pi}{4k}$,$t_2 = \delta_1 + \frac{\pi}{4k}$,$\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$。

利用粒子群优化算法得出各参数取值为:$a = 4.6$,$b = 3.5$,$c = 1.6$,$T_{\min} = 0.02$ N,$T_{\max} = 2.1$ N,$T_1 = 0.243$ N,$\delta_1 = 6000$ s,$k = 0.002$。

3　数值仿真分析

3.1　仿真条件

基于上述数学模型进行数值仿真,假设轨道高度为 300 km,母星质量为 6000 kg,子星质量为 20 kg,系绳密度为 0.2 kg/km。仿真初始条件为:绳长$L(0) = 1$ m,释放速度 $\dot{L}(0) = 2.5$ m/s;初始面内角及面外角均为 0.01 rad,初始角速度均为

0.001 rad/s;母星的初始章动角、进动角及自旋角分别为 0.05 rad,0.21 rad,0.61 rad,初始角速度均为 0.000 01 rad/s;子星的初始姿态角分别为 0.132 rad,0.61 rad,0.01 rad,初始角速度均为 0。

考虑到母星及子星的质量与尺寸,设母星和子星与系绳连接点位置分别为 $\boldsymbol{\Delta}_1$ = (2 m,0 m,0 m),$\boldsymbol{\Delta}_2$ = (0.2 m,0 m,0 m);惯性张量矩阵(单位为 kg · m^2)分别为 $\boldsymbol{J}_1$ = diag(15 000,35 000,35 000),$\boldsymbol{J}_2$ = diag(0.256,0.32,0.32)。

3.2 仿真结果及分析

3.2.1 模型校验

为验证所得数学模型的正确性,与文献[17]中所采用的简化模型进行对比。在相同控制律作用下,得到系绳展开结果如图 2、图 3 所示。

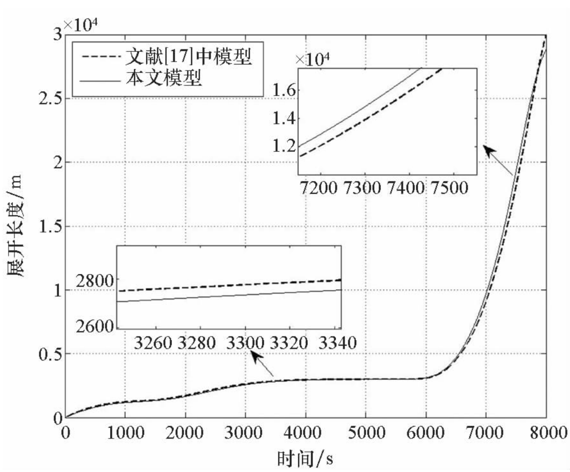


图 2　展开绳长对比曲线

Fig. 2　Comparison curves of deployed lengths

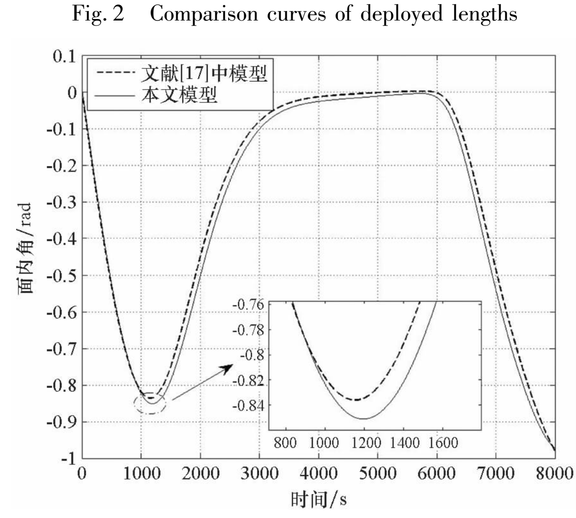


图 3　展开时面内角对比曲线

Fig. 3　Comparison curves of in-plane angles in deployment

由图 2 ~ 3 可知,根据参考模型及本文模型所得到的展开过程绳长及面内角变化曲线均基本吻合。相较于文献[17]中的模型,利用本文模型计算的绳长偏差约为 0.05 km,面内角偏差约 0.01 rad,存在小量偏差的原因在于本文模型计入了星体姿态,这会对展开过程造成影响。据此可证明本文所建立的数学模型的有效性。

3.2.2 初始姿态角扰动的影响

下面利用所建立的模型研究展开过程中末端星的姿态运动。根据姿态角的定义,在系绳系统的展开过程中,章动角的大小能作为衡量系绳是否缠绕星体的重要依据,因此下面将重点研究章动角的运动特性。首先研究初始扰动近似为 0 的情形。图 4 为初始章动角 α_0 = 0.000 1 rad 时子星章动角的变化曲线,由图可知,这种情况下,展开过程中子星章动角始终近似为 0。

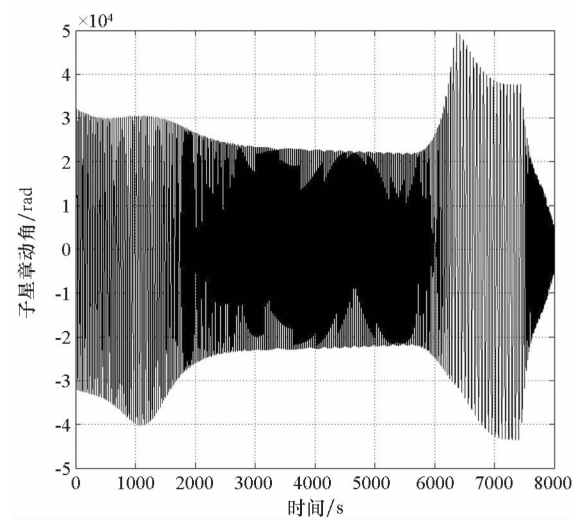
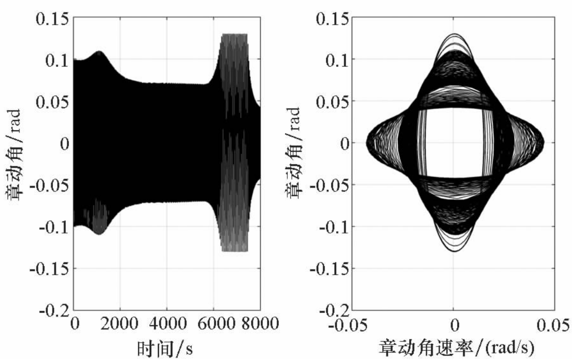


图 4　子星章动角变化曲线

Fig. 4　Curve of nutation angle of sub-satellite

接下来研究初始姿态角扰动增加的影响。图 5所示为 α_0 = 0.1 rad 时子星章动角及其相轨迹曲线。由图 5 可知,子星章动角在系绳快速展开阶段达到最大值 0.129 rad。与图 4 对比可知,随着初始扰动的增加,展开过程中章动角及其峰值随之增加。由图 5 可知,此时章动角相轨迹近似呈稳定的极限环,子星姿态未失稳。总结而言,当初始姿态角为小扰动时,子星相对系绳的摆动呈现小振幅高频性质,子星姿态保持稳定。这是由于子星的质量惯性特性较小,因此影响其姿态运动的主要力矩为系绳张力力矩。如图 6 所示,章动角的变化与系绳张力变化具有同步性,子星姿态有沿系绳张紧方向稳定的趋势。

然而,继续增加初始扰动将破坏这种稳定性。图 7 所示为 α_0 = 0.8 rad 时的章动角曲线。此时,展开过程中的章动角变化剧烈,最大值为 1.38 rad,接近所允许的章动角临界值(π/2 rad)。考虑到子星为有尺寸的刚体,这会使得系绳与子星表面接触并发生缠绕,导致展开失败。

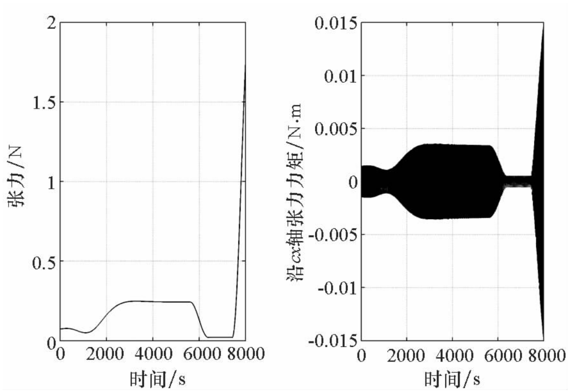


（a）章动的变化曲线　　（b）相位图

（a）Curve of nutation angle　　（b）Phase diagram

图 5　子星章动角曲线及其相位图

Fig. 5　Curve of nutation angle and phase diagram of sub-satellite



（a）张力变化曲线　　（b）张力力矩变化曲线

（a）Curve of tension　　（b）Curve of tension torque

图 6　系绳张力及张力力矩变化曲线

Fig. 6　Curves of tether tension and tension torque

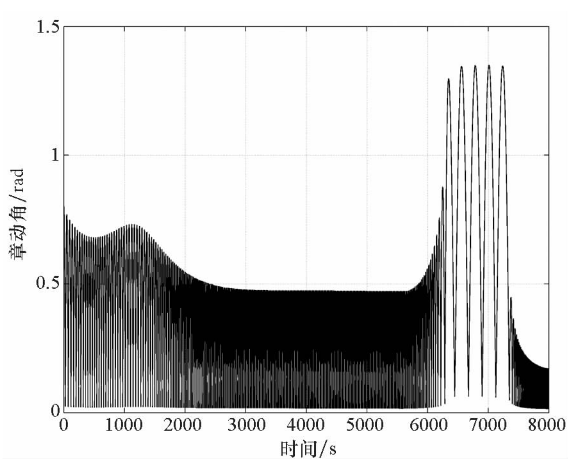


图 7　子星章动角变化曲线

Fig. 7　Curve of nutation angle of sub-satellite

3.2.3　动/静不对称性影响研究

上述结果是基于子星为动力学对称体，且与系绳连接点位于本体坐标系 c_2x_2 轴上的假设得到的。然而，实际的航天器并不是理想的对称旋转体，与系绳的连接点位置也存在偏差。

如图 8 所示，不对称性可分为两类：①静不对称性：即系绳连接点不在星体纵向对称轴上。这种不对称性可由静态误差 $\Delta=\sqrt{\Delta y^2+\Delta z^2}$ 来衡量；②动不对称性，又称惯性不对称性，这种不对称性可由子星惯量矩阵中离心惯性积来衡量，此时，离心惯性积不为 0。下面将针对这两种不对称性分别进行分析，研究其影响效果。

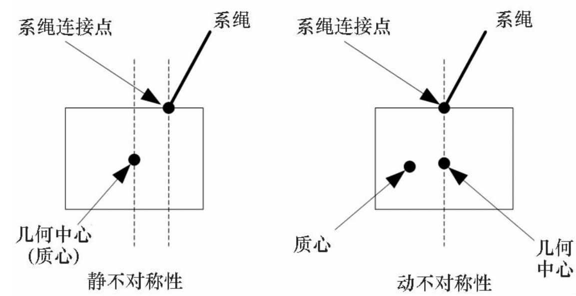
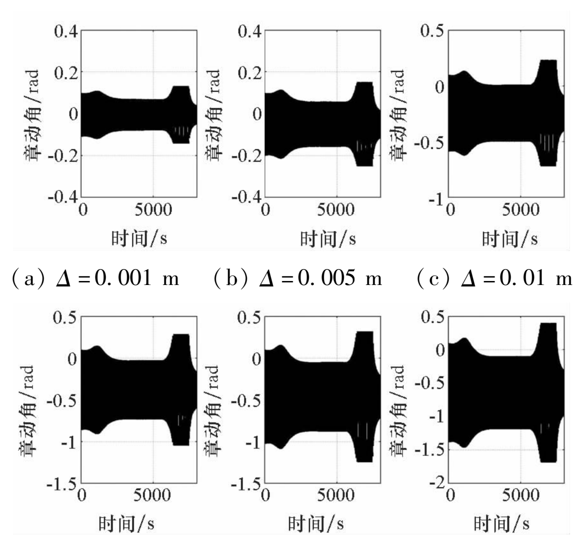


图 8　末端星体静/动不对称性示意图

Fig. 8　Static/dynamic asymmetry of end-bodies

首先研究静不对称性的影响。设初始章动角为 0，取六组数据表征静不对称性大小，静态误差 Δ 分别为 0.001 m、0.005 m、0.01 m、0.05 m、0.08 m、0.1 m，其余初始条件不变，对比分析子星章动角变化曲线，如图 9 所示（图中静不对称性从左至右、从上至下依次增大）。



（a）$\Delta=0.001$ m　（b）$\Delta=0.005$ m　（c）$\Delta=0.01$ m

（d）$\Delta=0.05$ m　（e）$\Delta=0.08$ m　（f）$\Delta=0.1$ m

图 9　子星章动角对比图

Fig. 9　Comparison of the nutation angles of the sub-satellite

仿真发现，当存在上述静态误差时，系统均能顺利展开，且系绳展开特性变化不大，绳长及面内角的变化参见图 2～3。末端星章动角幅值随静不对称性增加变化明显，呈增加趋势，如图 9 所示。表 1 给出了上述六组仿真条件分别对应的章动角及张力力矩最大值。对于给定的初始条件，

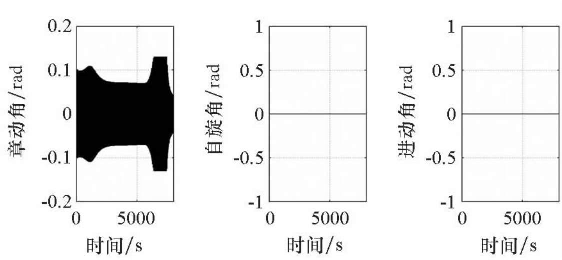
当 $\Delta = 0.09$ m 时，最大章动角即已达 90°。此外，张力力矩沿 cz 轴的分量也随之增加。

表 1　章动角及张力力矩最大值

Tab. 1　The maximum of nutation angle and tension torque

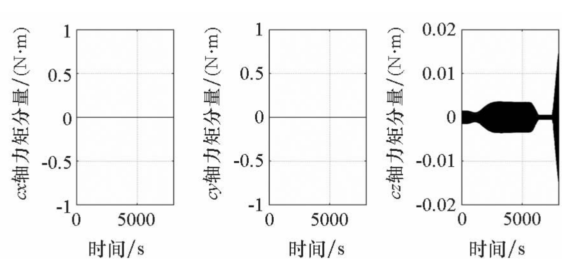
Δ/m	最大章动角/rad	最大张力矩/N · m
0.001	0.142	0.013
0.005	0.251	0.018
0.01	0.714	0.021
0.05	1.048	0.050
0.08	1.246	0.076
0.1	1.687	0.094

接下来研究动不对称性的影响。子星惯性张量为 $\boldsymbol{J}_2 = \begin{pmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$，其中 $J_y = J - \Delta J$，$J_z = J + \Delta J$。分别取 $\Delta J = 0.01\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，$0.1\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，$0.2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，且 $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$，其余初始条件不变，结果发现子星章动角变化不明显，幅值约为 0.13 rad。而当 $J_{xy} \neq 0$，$J_{yz} \neq 0$，$J_{xz} \neq 0$ 时，子星各变量曲线变化较大。下面以 $\Delta J = 0.01\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ 为例，分别取 $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$，$0.001\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，$0.01\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，观察离心惯性积对星体角运动的影响，如图 10 ~ 12 所示。



(a) 子星姿态

(a) Attitude of sub-satellite

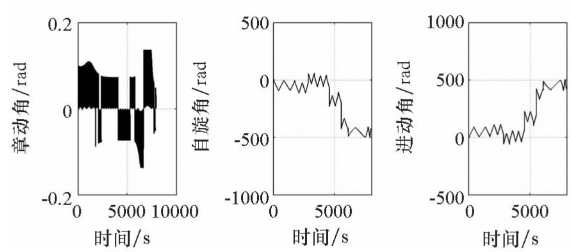


(b) 张力力矩

(b) Tension torque

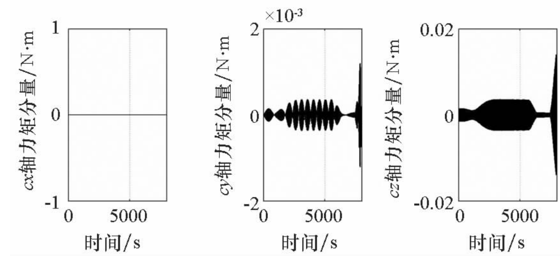
图 10　惯性积为 0 时子星姿态和张力力矩

Fig. 10　Attitude of sub-satellite and tension torque when its inertia product is 0



(a) 子星姿态

(a) Attitude of sub-satellite

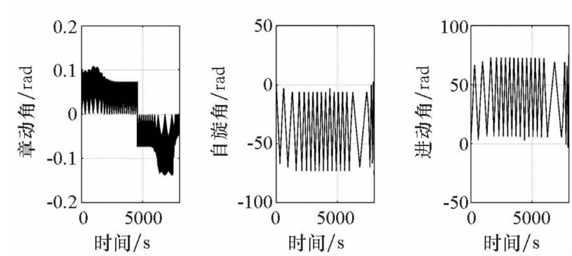


(b) 张力力矩

(b) Tension torque

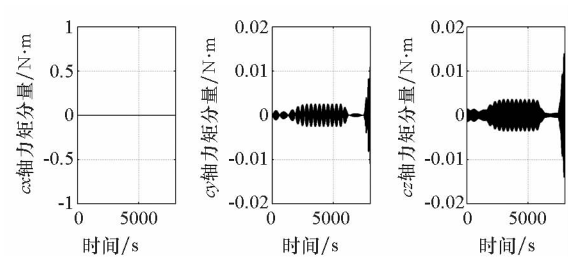
图 11　惯性积为 $0.001\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ 时的子星姿态和张力力矩

Fig. 11 The attitude of sub-satellite and tension torque when its inertia product is $0.001\ \mathrm{kg \cdot m^2}$



(a) 子星姿态

(a) Attitude of sub-satellite



(b) 张力力矩

(b) Tension torque

图 12　惯性积为 $0.01\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ 时的子星姿态和张力力矩

Fig. 12　Attitude of sub-satellite and tension torque when its inertia product is $0.01\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

接着增加动不对称性，设 $\Delta J = 0.05$，$J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0.05$，子星初始章动角 $\alpha_0 = 0.1$ rad，子星章动角变化如图 13 所示。由图可知，当子星不是对称旋转体，具有动不对称性时，姿态运动较为复杂，章动角除了高频振荡外，还出现类似标准摆运动的低频振荡，即章动角振荡振幅呈周期性变

化,且随着不对称性增加,展开过程中章动角幅值可超过 90°,导致系绳缠绕末端星。

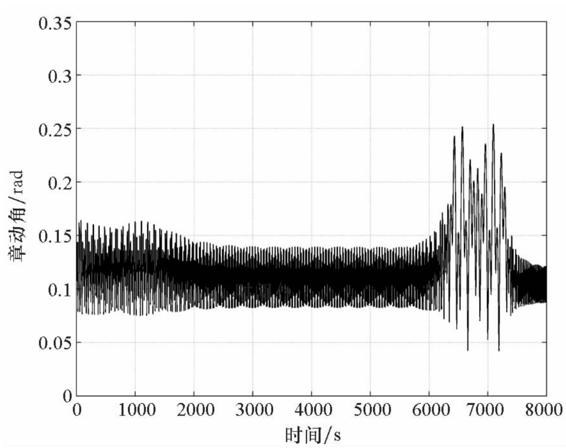
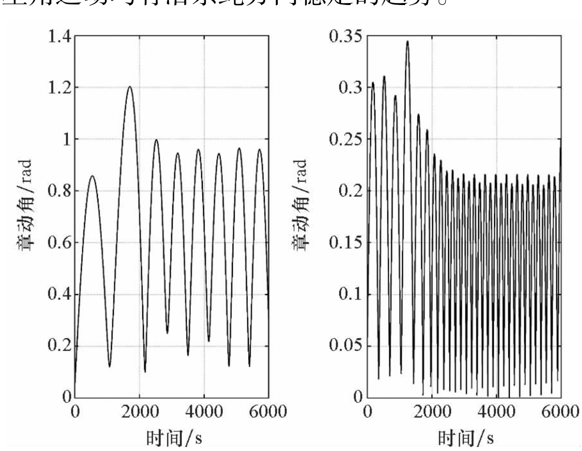


图 13　子星章动角变化曲线

Fig. 13　Curve of nutation angle of sub-satellite

需要指出的是,上述仿真中子星的不对称性对母星姿态影响不大。与子星相比,母星姿态角变化缓慢但幅值较大。这是由于母星质量惯性远大于子星,子星的不对称性所产生的力矩不足以对母星运动特性产生实质性影响。随着母星惯性特性减小,系绳张力力矩对母星角运动的影响作用将会增加。图 14 为母星章动角变化曲线对比图,其中图 14(a)所对应的母星惯性是图 14(b)的 10 倍。对比表明,随着惯性减小,母星最终将同子星一样沿系绳方向稳定,并做小振幅高频振荡。这表明,当末端星质量相近时(如系绳连接纳卫星所构成的系统),在合适的张力控制律作用下,系统中所有末端星角运动均有沿系绳方向稳定的趋势。



(a) $J_1 = \mathrm{diag}(0.256, 0.32, 0.32)\ \mathrm{kg \cdot m^2}$　　(b) $J_1' = 0.1 J_1$

图 14　母星章动角变化曲线对比图

Fig. 14　Comparison of nutation angle of mother-satellite

4　结论

本文研究结果表明,对于大质量比空间系绳系统,当子星对称时,其姿态角变化趋势与系绳张力同步,且子星最终沿系绳方向稳定。当子星存在静不对称性时,姿态角幅值增加,且随着静不对称性增加而增加,张力力矩增大,章动角曲线剧烈振荡,在受到扰动时,章动角可能超过 90°,引起子星与系绳缠绕。当子星具有动不对称性时,会引起类似标准摆形式的低频振荡。由于在实际的空间系绳系统中,燃料消耗等因素会使得卫星质心及转动惯量等发生变化,因此开展空间试验时需要考虑动/静不对称性对子星姿态的影响,并对其姿态运动进行振荡抑制。此外,随着母星质量惯性减小,母星的姿态运动趋势与子星趋同,章动角变化曲线的幅值减小,振动频率增加,并有沿系绳方向稳定的趋势。

参考文献(References)

[1] Chen Y, Huang R, He L, et al. Dynamical modeling and control of space tethers: a review of space tether research[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(4): 1077 - 1099.

[2] Kumar K D. Review on dynamics and control of nonelectrodynamic tethered satellite systems[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2006, 43(4): 705 - 720.

[3] 刘海涛, 张青斌, 杨乐平, 等. 绳系拖曳离轨过程中的摆动抑制策略[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(6): 164 - 170.
LIU Haitao, ZHANG Qingbin, YANG Leping, et al. Oscillation suppression strategy during tether-tugging reorbiting[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36(6): 164 - 170. (in Chinese)

[4] Huang P, Zhang F, Cai J, et al. Dexterous tethered space robot: design measurement, control and experiment[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(3): 1452 - 1468.

[5] 刘付成, 朱东方, 黄静. 空间飞行器动力学与控制研究综述[J]. 上海航天, 2017, 34(2): 1 - 29.
LIU Fucheng, ZHU Dongfang, HUANG Jing. Review of dynamics and control study of spacecraft[J]. Aerospace Shanghai, 2017, 34(2): 1 - 29. (in Chinese)

[6] Yu B S, Wen H, Jin D P. Review of deployment technology for tethered satellite systems[J]. Acta Mechanica Sinica, 2018, 34(4): 754 - 768.

[7] 刘壮壮, 宝音贺西. 基于非线性单元模型的绳系卫星系统动力学[J]. 动力学与控制学报, 2012, 10(1): 21 - 26.
LIU Zhuangzhuang, BAOYIN Hexi. Dynamics of tethered satellite system based on nonlinear unit model[J]. Journal of Dynamics and Control, 2012, 10(1): 21 - 26. (in Chinese)

[8] Dong Z, Zabolotnov Y M, Wang C. Motion modeling and deployment control of a long tethered spacecraft system with an atmospheric sounder[J]. Engineering Letters, 2018, 26(4): 478 - 488.

[9] Aslanov V S, Ledkov A S. Swing principle in tether-assisted return mission from an elliptical orbit[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 71: 156 - 162.

[10] 张帆，黄攀峰. 空间绳系机器人抓捕非合作目标的质量特性参数辨识[J]. 宇航学报，2015，36(6)：630 – 639.
ZHANG Fan, HUANG Panfeng. Inertia parameter estimation for an noncooperative target captured by a space tethered system[J]. Journal of Astronautics, 2015, 36(6): 630 – 639. (in Chinese)

[11] 王晓宇，金栋平. 计入姿态的绳系卫星概周期振动[J]. 振动工程学报，2010，23(4)：361 – 365.
WANG Xiaoyu, JIN Dongping. Quasi-periodic oscillation of a tethered subsatellite with attitude[J]. Journal of Vibration Engineering, 2010, 23(4): 361 – 365. (in Chinese)

[12] Zabolotnov Y M. Application of the integral manifold method to the analysis of the spatial motion of a rigid body fixed to a cable[J]. Mechanics of Solids, 2016, 51(4): 371 – 384.

[13] 余本嵩，金栋平，庞兆君. 绳系释放时的航天器耦合动力学分析[J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2014，44(8)：858 – 864.
YU Bensong, JIN Dongping, PANG Zhaojun. Coupling dynamics of spacecraft with deployment of a tether[J]. Scientia Sinica(Physica, Mechanica & Astronomica), 2014, 44(8): 858 – 864. (in Chinese)

[14] Pang Z J, Yu B S, Jin D P. Chaotic motion analysis of a rigid spacecraft dragging a satellite by an elastic tether[J]. Acta Mechanica, 2015, 226(8): 2761 – 2771.

[15] 朱仁璋，雷达，林华宝. 绳系卫星系统复杂模型研究[J]. 宇航学报，1999，20(3)：7 – 12.
ZHU Renzhang, LEI Da, LIN Huabao. A sophisticated dynamics model of tethered satellite systems[J]. Journal of Astronautics, 1999, 20(3): 7 – 12. (in Chinese)

[16] Liu Y, Zhou J. Attitude dynamics and thrust control for short tethered sub-satellite in deployment[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2015, 229(8): 1407 – 1422.

[17] Gou X W, Li A J, Ge Y Y, et al. Fractional order attitude stability control for sub-satellite of tethered satellite system during deployment[J]. Applied Mathematical Modeling, 2018, 62: 272 – 286.

[18] 王长青，杜崇刚，李爱军，等. 绳系卫星释放阶段的空间姿态非线性稳定控制[J]. 西北工业大学学报，2016，34(1)：60 – 66.
WANG Changqing, DU Chonggang, LI Aijun, et al. Nonlinear stability control of tethered sub-satellite attitude in deployment [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2016, 34(1): 60 – 66. (in Chinese)

[19] 扎伯罗特诺夫·尤里. 空间系绳系统运动动力学与控制导论[M]. 王长青，译. 北京：科学出版社，2013.
Zabolotnov Yuriy. Introduction to dynamics and control in space tether system[M]. Translated by WANG Changqing. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)