doi:10.11887/j.cn.202005006　　http://journal.nudt.edu.cn

利用阵列协方差矩阵稀疏性的到达角估计方法*

邱　伟,包长春
(国防科技大学 气象海洋学院, 湖南 长沙　410073)

摘　要:为了解决传统基于阵列协方差矩阵稀疏性到达角估计方法计算复杂度高的问题,提出基于直接二维稀疏重构思想的高效到达角估计方法。该方法利用阵列输出数据的协方差矩阵构造二维稀疏表示模型,对协方差矩阵进行特征值分解以实现噪声功率估计,从而降低噪声对到达角估计的影响。在求解稀疏表示模型时,直接对该二维稀疏重构问题进行求解,避免了矩阵矢量化操作。仿真实验结果表明,该方法运行效率大大提高,并且在低快拍数、低信噪比和稀疏阵元等条件下估计性能优于传统方法。

关键词:到达角估计;协方差矩阵;稀疏表示;二维稀疏重构

中图分类号:TN95　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1001 - 2486(2020)05 - 037 - 09

Directional-of-arrival estimation using the sparse representation of array covariance matrix

QIU Wei, *BAO Changchun*
(College of Meteorology and Oceanography, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In order to improve the efficiency of conventional DOA (directional-of-arrival) estimation methods based on the sparse representation of array covariance, an efficient DOA estimation method relying on the direct 2D sparse reconstruction was proposed. The 2D sparse reconstruction model was constructed by using the array covariance matrix. The noise power can be estimated and the influence of noise on DOA estimation can thus be reduced by applying the eigenvalue decomposition. In solving the 2D sparse reconstruction problem, the 2D - SL0 (2D smoothed L0 norm) algorithm was used, which can deal with the 2D data directly, free of matrix vectorization operation. Simulation results show that the efficiency of the proposed method can be improved significantly, and the performance of the proposed method is better than traditional methods under the conditions of low snapshot, low SNR and sparse array sensors, etc.

Keywords: directional-of-arrival estimation; covariance matrix; sparse representation; 2D sparse reconstruction

信源到达角(Direction-Of-Amival, DOA)估计是阵列信号处理的重要研究方向之一,在雷达、声呐、通信等领域都有广泛的应用[1-2]。传统的DOA 估计方法主要包括常规波束形成算法(Conventional BeamForming, CBF)、Capon 算法、子空间类算法、最大似然估计算法等[2],上述算法适用于均匀线性阵列,当阵列出现坏道时,也就是部分阵元失效时,估计性能会严重下降。

利用信源在整个空域中的分布具有稀疏性的特点,近年来,基于压缩感知的 DOA 估计方法层出不穷。该理论认为,只要信号在某种变换域下具有稀疏性,那么就可以通过求解由该稀疏性约束的最优化问题,以远少于奈奎斯特采样的采样数据中高概率精确重构原信号。将压缩感知理论应用到 DOA 估计问题中,可以提高阵列存在坏道条件下的 DOA 估计性能,并且相对于传统方法具有更好的角度分辨能力。文献[3]提出了一种基于改进正交匹配追踪算法的 DOA 估计方法,利用信源功率谱主副瓣之间的差异设置合理的阈值来确定算法迭代的终止条件,在信源数未知的条件下仍能获得高精度的估计结果。文献[4]采用一种加权迭代最小范数(FOCal Underdetermined System Solver, FOCUSS)方法来求解稀疏约束下的 DOA 估计问题,取得了较好的结果。针对多快拍数据,文献[5]进一步提出了多次快拍 FOCUSS 算法,通过求解多测量稀疏重构问题,实现 DOA 估计。文献[6]提出了 L1-SVD(L1-singular value decomposition)方法,利用奇异值分解降低数据量,并基于 L1 范数进行稀疏重构获得信源的方位估计结果。文献[7]针对在非均匀噪声下 DOA

---

* **收稿日期:**2019 - 03 - 28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61601484)
作者简介:邱伟(1985—),男,浙江杭州人,助理研究员,博士,E-mail:qiuwei08@nudt.edu.cn;
包长春(通信作者),副教授,博士,E-mail:baochangchun1979@163.com

估计精度差以及分辨率低的问题，利用矩阵补全理论引入弹性正则化因子重构无噪条件下的协方差矩阵，然后利用稀疏重构加权 L1 范数实现 DOA 参数估计，该方法能显著抑制非均匀噪声，并具有较好的 DOA 估计性能。针对基于 L1 范数优化的 DOA 估计方法存在正则化参数选取困难、计算复杂度高等问题，文献[8－9]利用稀疏贝叶斯学习提出高效的 DOA 估计方法，通过优化稀疏贝叶斯学习的基消除机制提高算法效率。文献[10]针对有源欺骗干扰环境下的小样本 DOA 估计问题，提出自适应极化滤波和联合块稀疏贝叶斯学习算法的 DOA 估计方法，在有效抑制干扰的同时能够获得高分辨率和高精度的 DOA 估计结果。

不同于上述直接基于阵列接收数据稀疏性进行 DOA 估计的思想，文献[11]提出了一种基于阵列协方差矩阵稀疏表示的 DOA 估计方法 L1-SRACV（L1-sparse representation of array covariance vectors），该方法利用接收阵的协方差矩阵估计误差满足渐近正态分布的特性来实现 DOA 估计，具有更强的抗噪声性能，且无须确定正则化参数，但该方法在快拍数较小时由于协方差矩阵估计误差较大，导致性能严重下降。针对该问题，文献[12]提出一种改进方法，利用快速极大似然算法（Fast Maximum Likelihood, FML）稳定协方差矩阵的小特征值，提升了算法在快拍数较少时的稳定性。虽然基于协方差矩阵稀疏性的 DOA 估计方法通常具有更好的抗噪声性能，但是传统方法在求解过程中需要对矩阵进行矢量化操作，并将二维稀疏重构问题转化为常规稀疏性约束下的一维矢量稀疏优化问题，计算量大大增加，一定程度上限制了其实用性。

针对该问题，本文提出了一种基于协方差矩阵稀疏性的高效 DOA 估计方法。该方法直接利用协方差矩阵的稀疏性，构造二维稀疏表示模型，并通过直接求解二维稀疏性约束的优化问题实现 DOA 估计，避免了矩阵矢量化操作，从而大大提高了算法的效率，同时具有较高的 DOA 估计性能。

1 信号模型

考虑均匀线性阵列构型，设其阵元个数为 M，定义方位角 θ 为来波方向与 x 轴正方向的夹角，因此有 $0° < \theta < 180°$。假设在远场条件下，有 K 个窄带信源入射到该阵列，信源之间相互独立。则第 k 个信源、来波方向为 θ_k，入射到该均匀线性阵列（间距为 d）的阵列响应矢量为：

$$\boldsymbol{a}(\theta_k)=\left[1 \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta_k} \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{(M-1)d}{\lambda}\cos\theta_k}\right]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

定义导向矢量矩阵为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= [\boldsymbol{a}(\theta_1) \quad \boldsymbol{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}(\theta_K)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta_1} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta_2} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{(M-1)d}{\lambda}\cos\theta_1} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{(M-1)d}{\lambda}\cos\theta_2} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{(M-1)d}{\lambda}\cos\theta_K} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2}$$

此时，阵列第 m 个阵元的接收信号可表示为：

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{K} s_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau_m(k)} + n_m(t) \tag{3}$$

其中：$s_k(t)$ 为入射到阵列的第 k 个信源信号；$n_m(t)$ 为第 m 个阵元的加性白噪声；$\tau_m(k)$ 为第 k 个信源入射到第 m 个阵元时，相对于参考阵元的时延。若选取第一个阵元为参考阵元，则有 $\tau_m(k)=\dfrac{(m-1)d}{c}\cos\theta_k$。

$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_M(t)]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{N}(t)=[n_1(t) \quad n_2(t) \quad \cdots \quad n_M(t)]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{S}(t)=[s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_K(t)]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

此时，阵列的接收信号可以写成以下的矢量模型：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{AS}(t)+\boldsymbol{N}(t) \tag{7}$$

这里，导向矢量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与阵列的形状以及信源的方位有关，而在一般的实际应用中，阵列的形状一般是固定的，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任一列总是和某个信源的方位紧密联系。

在实际处理中，阵列接收到的数据是在有限时间范围内的有限次快拍数据。在这段时间内假定信源的方向不发生变化，信源信号的包络虽然随时间变化，但通常认为它是一个平稳随机的过程，其统计特性不随时间变化，这样就可以定义阵列输出信号 $\boldsymbol{x}(t)$ 的协方差矩阵为：

$$\boldsymbol{R}=E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)]=\boldsymbol{AR}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\sigma^2\boldsymbol{I}_M \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{R}_s=E[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}(t)]$ 表示信源的协方差矩阵，σ^2 表示均匀噪声功率，$\boldsymbol{I}_M$ 表示大小为 $M\times M$ 的单位矩阵。对于非相干信源，$\boldsymbol{R}_s=\mathrm{diag}(P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_K)$ 为对角非奇异阵，其中 $P_k=E[\boldsymbol{s}_k(t)\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{H}}(t)]$ 表示第 k 个信源的功率。

2 本文所提 DOA 估计方法

由于信源在空域中的分布是稀疏的，也就是

说，所有信源的来波方向只占角域空间的少数部分，因此可以以此稀疏性为约束条件，通过求解优化问题来估计信源的方位角。首先将空间角度离散化为网格点集合 $\theta' = [\theta'_1 \quad \theta'_2 \quad \cdots \quad \theta'_Q]$，代表所有可能的信源入射角度集合，通常选取 $Q \gg K$，同时对应的过完备导向矢量矩阵可表示为 $\boldsymbol{A}(\theta') \triangleq \boldsymbol{A}_1$，在稀疏重构框架下，该矩阵又被称为过完备字典矩阵。同时，将信源对应的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_s$ 划分为 $Q \times Q$ 个网格，表示为 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$，则 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 是稀疏度为 K 的矩阵。此时，阵列接收信号协方差矩阵可转化为：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_1 \bar{\boldsymbol{R}}_s \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} + \sigma^2 \boldsymbol{I}_M \tag{9}$$

则 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R} - \sigma^2 \boldsymbol{I}_M = \boldsymbol{A}_1 \bar{\boldsymbol{R}}_s \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}$，若已知噪声的功率 σ^2，由于 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 是一个稀疏度为 K 的矩阵，矩阵中非零值的网格点与信源的来波方向存在对应关系，且分布在矩阵的对角线上，因此信源的到达角估计问题可以转化为矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 中非零元素重构问题。基于 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 的稀疏性，信源的 DOA 估计可转化为：

$$\min \|\bar{\boldsymbol{R}}_s\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{A}_1 \bar{\boldsymbol{R}}_s \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} \tag{10}$$

求解上述优化问题的常规方法是将其转化为一维稀疏重构问题，然后采用基于 L1 范数优化或贪婪类算法，如 CVX 工具包、正交匹配追踪算法等进行求解。但是，这种求解策略会涉及大规模字典矩阵，计算复杂度高，限制了其实用性。本文利用 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 的二维稀疏特性以及 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 之间存在的可分离乘积特性，直接对式(10)所示的二维优化问题进行求解。这里采用二维平滑 L0 范数(Two Dimensional Smoothed L0 norm, 2D－SL0)算法[13]。在得到稀疏重构解 $\hat{\boldsymbol{R}}'_s$ 后，即可得到对应信源的方位角估计结果。具体求解流程如下：

首先定义高斯函数

$$F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s) = \sum_{p=1}^{Q} \sum_{q=1}^{Q} \exp\left[-\frac{|\bar{\boldsymbol{R}}_s(p,q)|^2}{2\rho^2} \right] \tag{11}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{R}}_s(p,q)$ 表示矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 中坐标为 (p,q) 的元素，$p=1,2,\cdots,Q$，$q=1,2,\cdots,Q$。显然，当 ρ 充分小时，$F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$ 的函数值趋近于 $Q^2 - \|\bar{\boldsymbol{R}}_s\|_0$，即 $\|\bar{\boldsymbol{R}}_s\|_0 = Q^2 - \lim\limits_{\rho \to 0} F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$。那么，此时式(10)中的最小化 $\|\bar{\boldsymbol{R}}_s\|_0$ 可转化为最大化 $F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$ 的函数值，即可以将优化问题转化为：

$$\max F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s) \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{A}_1 \bar{\boldsymbol{R}}_s \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} \tag{12}$$

对于每一个 ρ，$F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$ 连续可微，因此可以采用投影最速上升法来迭代求解该优化问题。但是，分析函数 $F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$ 对于不同的 ρ，其高斯函数值的分布如图 1 所示，从图中可知，当 ρ 较大时，$F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$ 较为平滑，易于进行梯度求解；而当 ρ 较小时，$F_\rho(\bar{\boldsymbol{R}}_s)$ 非光滑，包含许多局部极值点，不利于梯度求解。因此，为了避免算法陷入局部极值点导致算法不收敛，求解该问题时对于 ρ 的取值需要采用一种递减的策略，即初始时 ρ 需取一个较大的值，然后在迭代求解中逐步递减，降低算法陷入局部极值点的概率。投影最速上升法包括沿负梯度方向上升和向可行集投影两个步骤。整个算法包括内外两层循环，外层循环中，ρ 的取值从大到小递减；内层循环中，对于每一个 ρ，采用投影最速上升法求解优化问题，具体步骤如下：

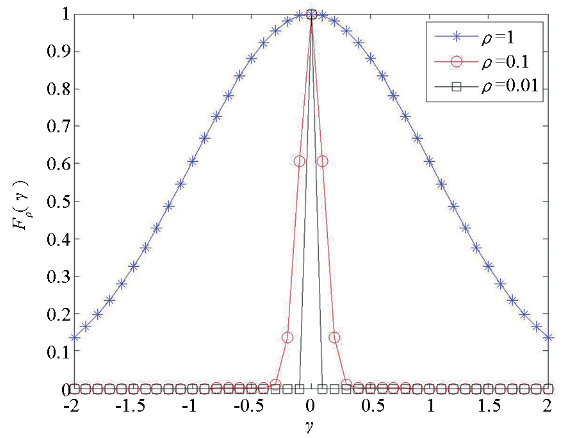


图 1　不同 ρ 值下的高斯函数结果

Fig. 1　Values of Gaussian function under different values of ρ

Step1：初始化。

1）将式(12)的最小二乘解作为初始解，即 $\hat{\boldsymbol{R}}_s = \boldsymbol{A}_1^{\dagger} \boldsymbol{R}_1 (\boldsymbol{A}_1^{\dagger})^{\mathrm{H}}$，其中 $\boldsymbol{A}_1^{\dagger}$ 表示 $\boldsymbol{A}_1$ 的伪逆，也就是 $\boldsymbol{A}_1^{\dagger} = \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} (\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}})^{-1}$。

2）选择递减的 ρ 序列：$\rho = [\rho_0 \quad \rho_1 \quad \cdots \quad \rho_r]$，这里 $\rho_r = \eta \rho_{r-1} (r=1,2,\cdots)$，$\eta$ 为递减因子。

Step2：迭代求解。

1）令 $\rho = \rho_{r-1}$。

2）在可行集 $U = \{\bar{\boldsymbol{R}}_s \mid \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{A}_1 \bar{\boldsymbol{R}}_s \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}\}$ 上应用投影最速上升法循环 J 次求解满足式(12)所近似的 $\|\bar{\boldsymbol{R}}_s\|_0$ 的最小值 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$，步骤如下所示。

①令 $\bar{\boldsymbol{R}}_s = \hat{\boldsymbol{R}}_s$，循环第②～④步 J 次。

②令 $\Delta \bar{\boldsymbol{R}}_s = [\delta_{p,q}]$，其中 $\delta_{p,q} \triangleq \bar{\boldsymbol{R}}_s(p,q) \cdot \exp\left[-\frac{|\bar{\boldsymbol{R}}_s(p,q)|^2}{2\rho_r^2} \right]$。

③令 $\bar{\boldsymbol{R}}_s \leftarrow \bar{\boldsymbol{R}}_s - \mu \Delta \bar{\boldsymbol{R}}_s$，其中 μ 为正常数。

④将 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 投影到可行集 U 上：

$$\bar{\boldsymbol{R}}_s \leftarrow \bar{\boldsymbol{R}}_s - \boldsymbol{A}_1^{\dagger} (\boldsymbol{A}_1 \bar{\boldsymbol{R}}_s \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{R}_1)(\boldsymbol{A}_1^{\dagger})^{\mathrm{H}}$$

3）令 $\hat{\boldsymbol{R}}_s = \bar{\boldsymbol{R}}_s$。

Step3：令 $r = r+1$。重复 Step2 中的步骤 2）

和步骤 3)，直至 $\rho_r \leqslant \rho_t$，算法终止，其中 ρ_t 为设定的某一阈值。

此时得到的 $\hat{\boldsymbol{R}}_s$ 包含了信源的来波方向信息，根据 $\hat{\boldsymbol{R}}_s$ 对角线上的非零元素的位置与信源方位的对应关系即可得到信源的 DOA 估计结果。

值得注意的是，实际中通常采用多次快拍数据估计 $\boldsymbol{R}$，也就是 $\hat{\boldsymbol{R}} = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)$，其中 T 为快拍数。注意到本文算法需要对噪声功率进行估计，在已知信源个数 K 的前提下，噪声功率可由阵列协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 作特征值分解后的 $M-K$ 个最小特征值的平均值来近似，而在信源个数未知的情况下，噪声功率可由阵列接收数据协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的最小特征值来近似。

从上述算法描述可以看出，在求解重优化问题时，本文算法由于直接对二维协方差矩阵进行处理，避免了传统方法的矢量化操作，从而大大提升了算法的求解效率，增强了算法的实用性。

3 算法讨论

3.1 算法计算复杂度分析

设阵列含 M 个阵元，信源个数为 K，快拍数为 T，整个空域划分为 Q 个网格，那么本文算法中协方差矩阵特征值分解的算法复杂度为 $O(M^3)$，2D SL0 算法的主要计算消耗在于字典矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 及其共轭 $\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}$ 与待重构矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}_s$ 的复数相乘，其算法复杂度约为 $O(MQ^2)$，通常 $Q \gg M$，因此本文提出的 DOA 估计算法的复杂度约为 $O(MQ^2)$。由文献[11]可知，经典的 L1 - SRACV 算法的计算复杂度为 $O(M^3Q^3)$，因此，本文算法的计算复杂度远低于 L1 - SRACV。

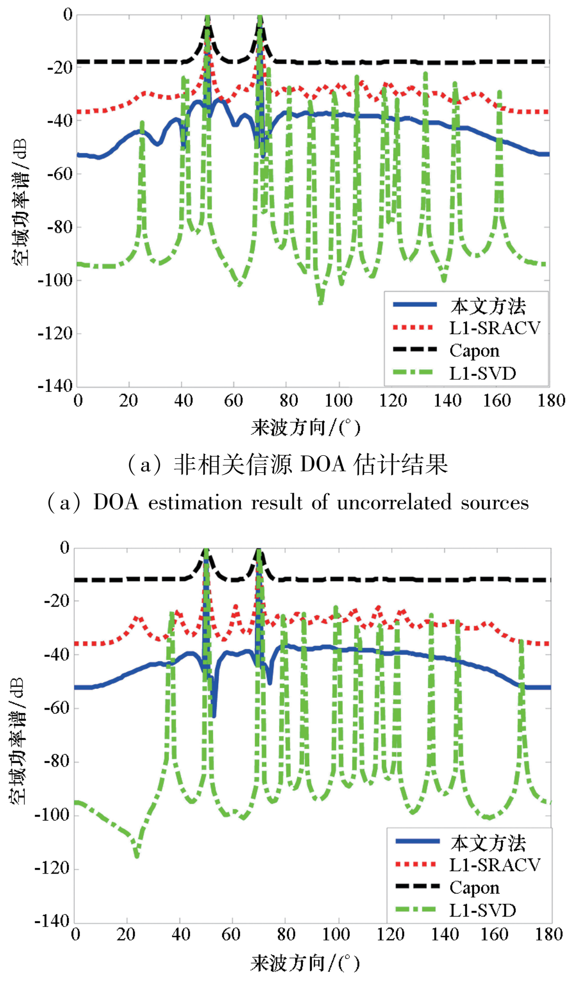
3.2 算法参数选取

算法中包含了多个参数，参数选取的规则如下：$\sigma_0 = 4\max|\hat{\boldsymbol{R}}_s|$，这里 $\hat{\boldsymbol{R}}_s$ 表示算法 Step 1 中的初始解；为了保证更高的估计精度，递减因子选择 $\eta = 0.95$；投影最速上升法循环次数 J 固定为 5；μ 为一正常数，通常令 $\mu = 2$；算法迭代终止的条件，根据多次实验结果，一般选择 $\rho_t = 10^{-3}$。

4 仿真实验及结果分析

为了验证所提方法的有效性，采用仿真数据对算法性能进行验证分析，并与 L1 - SRACV 算法进行比较。实验中，采用 16 阵元的均匀线性阵列，即 $M = 16$，阵元间距为半波长，空域角度范围设定为 0° ~ 180°，间隔为 1°，因此，$Q = 181$。

实验一：假设空域中存在两个信源，来波方向为 50°和 70°。阵列每个阵元的接收噪声均为相互独立的零均值复高斯白噪声，信噪比设定为 10 dB，并与信源互不相关，快拍数 $T = 500$。图 2(a)和图 2(b)分别给出了非相关信源和相关信源(相关系数为 0.9)由不同方法得到的空域功率谱，对比可知，相对于常规 Capon 方法，稀疏重构类方法包括本文方法、L1-SRACV 方法和 L1-SVD 方法，其功率谱谱峰更尖锐、旁瓣更低，显示了稀疏重构类算法的优越性，因此在后续的 DOA 估计结果分析中只比较三种稀疏重构算法的 DOA 估计性能。另外，本文方法对于相关信源和非相关信源均能取得较好的估计效果，无须额外的去相关处理，且比 L1-SRACV 和 L1-SVD 方法结果的旁瓣更低，该结果表明本文方法对信源的相关性不敏感。



(a) 非相关信源 DOA 估计结果

(a) DOA estimation result of uncorrelated sources

(b) 相关信源 DOA 估计结果

(b) DOA estimation result of correlated sources

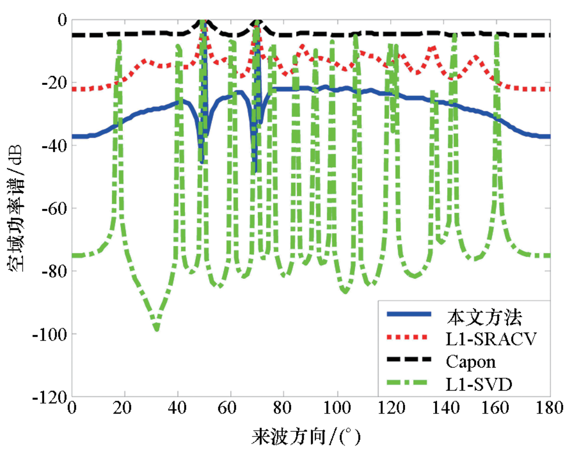
图 2 非相关和相关信源 DOA 估计结果

Fig. 2 DOA estimation results of uncorrelated and correlated sources

此外,本实验还比较了本文方法、L1-SRACV 方法和 L1-SVD 方法运行所需的时间。算法在配置相同的计算机上运行,计算机型号为联想 Thinkpad X230 系列,CPU 为 Intel 酷睿 i5 - 3210 2.50 GHz,内存为 4 GB,操作系统为 Windows7 32 位,三种方法的运行时间分别为2.392 4 s、38.111 4 s 和 4.641 8 s,可以看出,本文算法由于无须矩阵矢量化操作,算法运行时间远低于 L1-SRACV 算法,同时也低于 L1-SVD 算法,显示了本文算法的高效性。

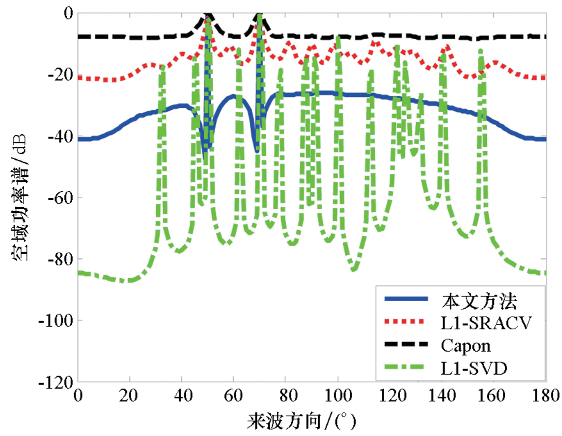
通过蒙特卡洛仿真分析信噪比、快拍数、信源角度间隔、有效阵元数以及阵列误差等因素对 DOA 估计性能的影响。在给定实验条件下,若每个信源的 DOA 估计结果与信源真实来波方向之间的差值均小于 1°,则认为本次实验能够实现 DOA 成功估计。若方法在 M_1 次实验中成功估计 DOA 的次数为 M_2,则认为该方法在本次实验条件下的成功率为 $P=\frac{M_2}{M_1}\times 100\%$。

实验二:考虑非相关信源,来波方向与实验一相同,快拍数设定为 300,加入不同噪声水平的复高斯白噪声,每一信噪比下蒙特卡洛仿真次数设置为 100,用以考察不同信噪比下不同方法的 DOA 估计成功率。图 3(a)和图 3(b)给出了信噪比分别为 - 10 dB 和 - 5 dB 时本文方法、L1-SRACV 算法和 L1-SVD 算法的 DOA 估计结果,图 4给出了三种方法的 DOA 估计成功率。从图 3 和图 4 的结果可以看出,本文方法的 DOA 估计成功率相对于 L1-SRACV 和 L1-SVD 方法有较大提升,特别是在低信噪比条件下,成功率要明显优于 L1-SRACV 和 L1-SVD 方法,说明了本文方法的稳健性。



(a) 信噪比为 - 10 dB 时的 DOA 估计结果

(a) DOA estimation result when SNR is - 10 dB



(b) 信噪比为 - 5 dB 时的 DOA 估计结果

(b) DOA estimation result when SNR is - 5 dB

图 3　不同信噪比下 DOA 估计结果

Fig. 3　DOA estimation results under different SNRs

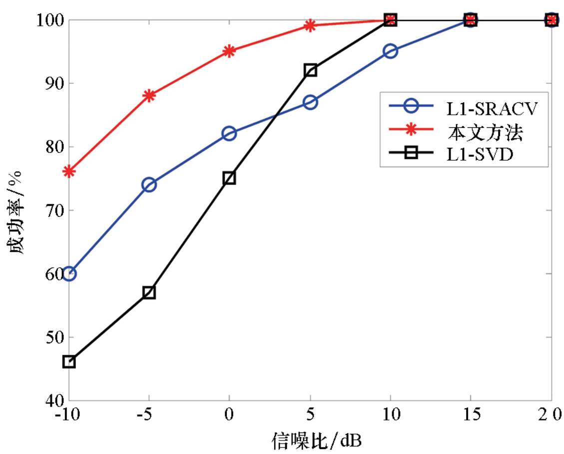
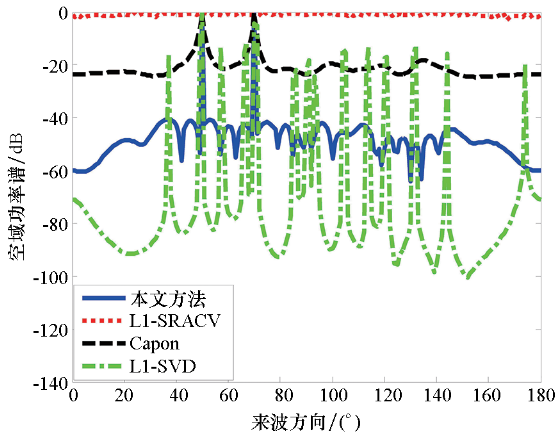


图 4　不同信噪比下 DOA 估计成功率

Fig. 4　DOA estimation successful rate as a function of SNR

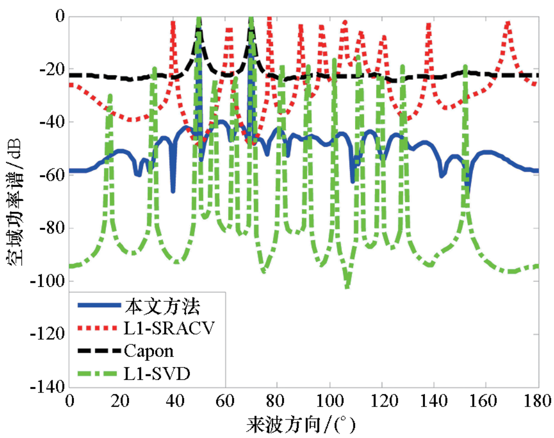
实验三:本实验中,考察不同快拍数条件下的 DOA 估计成功率。仍然考虑两个非相关信源,信源来波方向与实验一相同,信噪比固定为 10 dB,图 5(a)和图 5(b)给出了快拍数分别为 20 和 50 时本文方法、L1-SRACV 算法和 L1-SVD 算法得到的空域功率谱。从中可以看出,在低快拍数条件下,L1-SRACV 算法和 L1-SVD 算法无法实现 DOA 估计,而本文方法仍能获得高质量的 DOA 估计结果。下面在不同快拍数条件下进行 100 次蒙特卡洛仿真,计算 DOA 估计成功率。图 6 给出了本文方法、L1-SRACV 方法和 L1-SVD 方法在不同快拍数条件下的 DOA 估计成功率结果,从图中可以看出,在高快拍数条件下,三种方法均能取得非常高的 DOA 估计成功率;在低快拍数条件下,L1-SRACV 方法的 DOA 估计成功率明显降低,L1-SVD 方法性能优于 L1-SRACV,但是,在快拍

数极低时估计成功率不高,而本文方法仍能保持较高的成功率,这显示了本文方法在低快拍数条件下的优越性。



(a) 快拍数为 20 时的 DOA 估计结果

(a) DOA estimation result when snapshot is 20



(b) 快拍数为 50 时的 DOA 估计结果

(b) DOA estimation result when snapshot is 50

图 5 不同快拍数下的 DOA 估计结果

Fig. 5 DOA estimation results under different snapshots

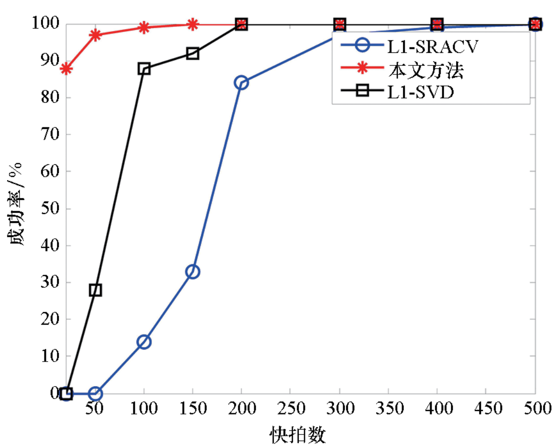


图 6 不同快拍数下的 DOA 估计成功率

Fig. 6 DOA estimation successful rate under different snapshots

实验四:本实验中考察不同角度间隔下各种方法的 DOA 估计成功率。假设两个非相关信源,一个信源的角度 θ_1 固定为 50°,另一个信源的角度 $\theta_2=\theta_1+\Delta\theta$,其中角度间隔 $\Delta\theta$ 的范围为 2° ~ 20°,步长为 2°。信噪比固定为 10 dB,快拍数设定为 300。每一角度间隔步长条件下进行 100 次蒙特卡洛仿真。图 7 给出了不同角度间隔条件下三种方法的 DOA 估计成功率。从结果可以看出,在角度间隔较大时,三种方法均能获得较高的 DOA 估计成功率,而在角度间隔较小时,本文方法的 DOA 估计成功率低于 L1-SRACV 方法和 L1-SVD 方法。这表明本文方法在邻近目标分辨能力方面要弱于其他两种方法,需要在下一步工作中进行改进。

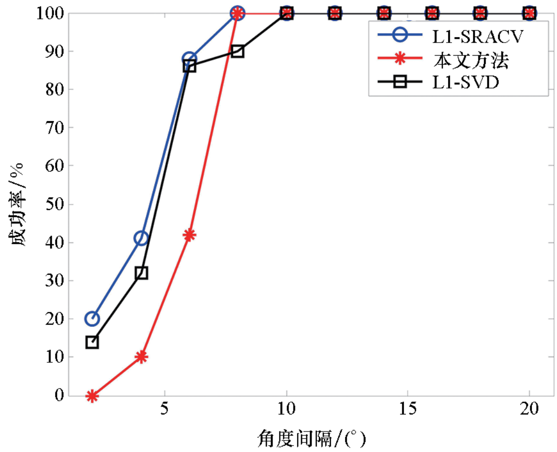


图 7 不同角度间隔下的 DOA 估计成功率

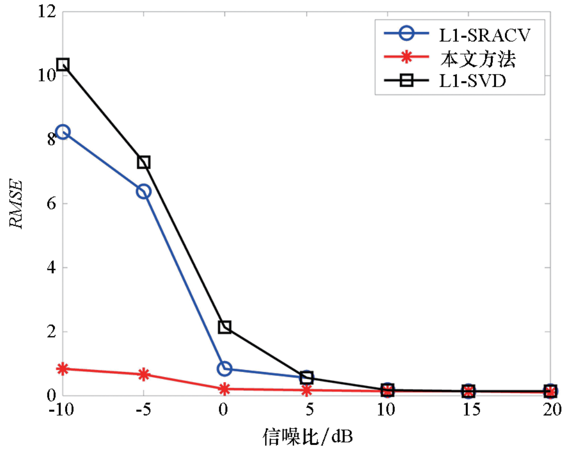
Fig. 7 DOA estimation successful rate under different angular interval

实验五:本实验中,比较不同方法对 DOA 估计精度方面的性能,采用的性能指标为均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE),定义为:

$$RMSE=\frac{1}{LK}\sqrt{\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\theta}_{k,l}-\theta_k)^2}\qquad(13)$$

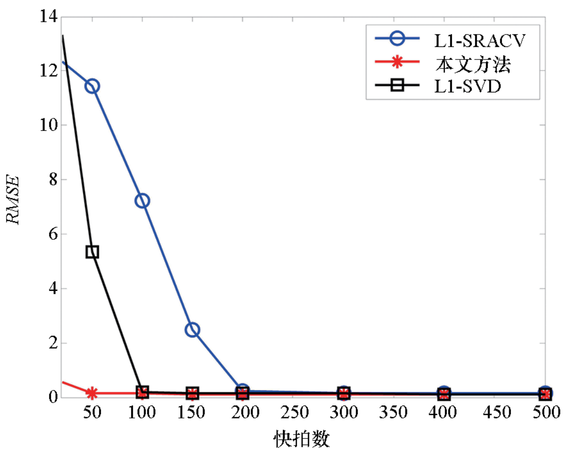
其中,L 为蒙特卡洛仿真总次数,K 为信源总个数,$\hat{\theta}_{k,l}$ 表示第 l 次蒙特卡洛仿真中第 k 个信源的 DOA 估计结果,θ_k 表示第 k 个信源的真实 DOA。假设空间中存在两个远场窄带信源,其真实 DOA 分别为 25.36°和 63.19°,采用文献[6]中提出的角度网格逐步细化的策略来解决不在网格点上信源 DOA 估计的问题。图 8(a)给出了 DOA 估计的 RMSE 随信噪比变化的结果,其中快拍数设定为 300,蒙特卡洛仿真次数设定为 100。从中可以看出,在高信噪比条件下,三种方法的估计 RMSE 接近,均能取得较好的估计精度,在低信噪比下本文方法的 RMSE 最低,这表明本文方法的估计精度最高。图 8(b)给出了 DOA 估计的 RMSE 随快

拍数变化的结果，其中设定信噪比为 10 dB，蒙特卡洛仿真次数设定为 100。从中可以看出，在快拍数较多时，三种方法的估计精度都很高，但当快拍数较小时，L1-SRACV 和 L1-SVD 方法的估计精度下降，而本文方法仍能保持较高的估计精度。



（a）不同信噪比下的 DOA 估计 RMSE

（a）RMSE of DOA estimation under different SNRs



（b）不同快拍数下的 DOA 估计 RMSE

（b）RMSE of DOA estimation under different snapshots

图 8　不同信噪比和不同快拍数下的 DOA 估计 RMSE 结果

Fig. 8　RMSE of DOA estimation under different SNRs and snapshots, respectively

实验六：本实验中，考察不同稀疏阵元数条件下的 DOA 估计成功率。仍然考虑两个非相关信源，来波方向保持不变，快拍数设置为 300，信噪比固定为 10 dB。随机选取若干个阵元的接收数据进行 DOA 估计，各稀疏阵元条件下重复实验次数为 100。图 9 给出了不同稀疏阵元数条件下三种方法的 DOA 估计成功率。从结果可以看出，随着稀疏阵元数的增加，两种方法的 DOA 估计成功率均随之提高，当随机选取的阵元数大于 8 时，三种方法的 DOA 估计成功率均在 90% 以上。该结果表明，基于信源稀疏特性的 DOA 估计方法能利用较少的有效阵元实现信源的测向，对于解决存在坏道情况下的信源 DOA 估计问题意义重大。

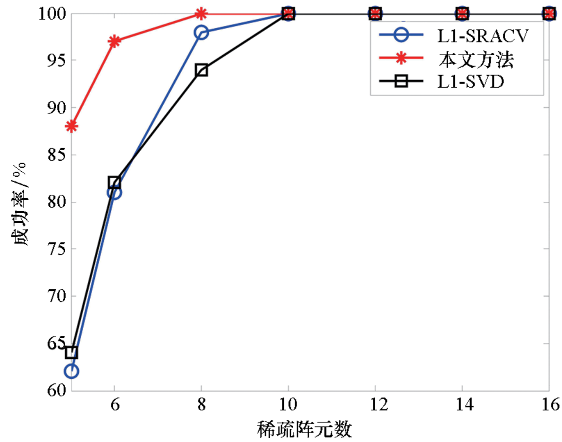


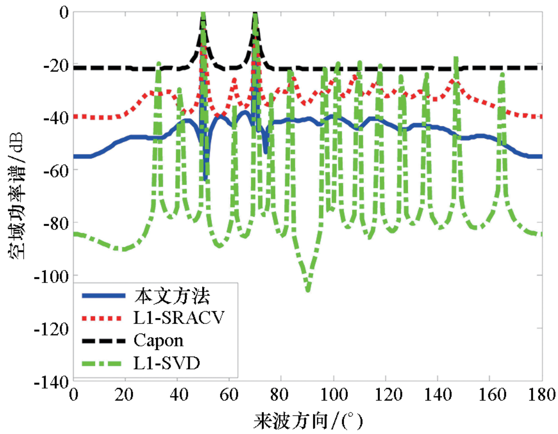
图 9　不同稀疏阵元数下的 DOA 估计成功率

Fig. 9　DOA estimation successful rate under different numbers of sparse array sensors

实验七：本实验中，考虑阵列存在阵元位置偏差时的 DOA 估计性能。第一种情况为各阵元偏离程度满足 −0. 05 ~ 0. 05 倍半波长的均匀分布，第二种情况为各阵元位置偏离程度满足 −0. 5 ~ 0. 5 倍半波长的均匀分布，意味着第二种情况下的阵元位置误差大于第一种情况。信噪比设定为 10 dB，快拍数设定为 300，两种情况下的空域功率谱如图 10 所示。从图中可以看出，在第一种情况下，阵元位置偏差对本文方法和 L1-SRACV 方法的 DOA 估计性能影响较小，而第二种情况下，阵元位置偏移量增大，50°方向的信源功率谱峰值下降，且旁瓣水平升高，对于信源的检测会有较大影响，特别是对于 L1-SRACV 算法，在阵元配置偏移量较大时，出现多个较高幅度水平的旁瓣，会导致信源的检测概率下降。

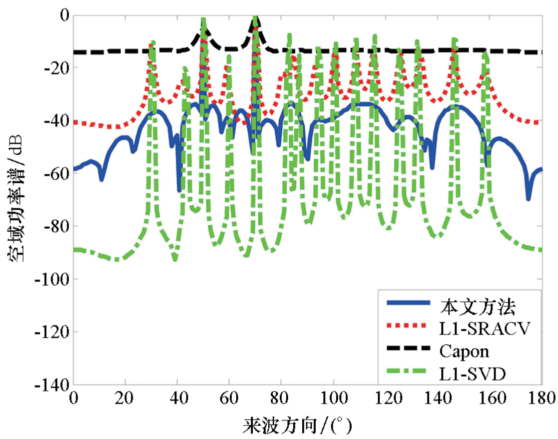
保持仿真其他条件不变，加入不同功率水平的高斯白噪声，每一信噪比下进行 100 次蒙特卡洛仿真，三种方法在阵元位置存在第二种偏差情况下的成功率如图 11 所示。从图中可以看出，在低信噪比条件下，当阵元位置偏差较大时，三种方法的 DOA 估计成功率相对于无偏差时下降较多，这表明阵列存在误差时，DOA 估计性能下降，需要进一步对阵元位置进行矫正。

实验八：最后，给出了不同方法对于多个信源的 DOA 估计结果。假设空间中有 10 个非相关窄带远场信源，其 DOA 范围为 50° ~ 140°，间隔为 10°，信噪比设定为 10 dB，快拍数设定为 300。



(a) 第一种阵元位置偏离情况下 DOA 估计结果

(a) DOA estimation result under sensor position error: case Ⅰ



(b) 第二种阵元位置偏离情况下 DOA 估计结果

(b) DOA estimation result under sensor position error: case Ⅱ

图 10　两种阵元位置偏离情况下的 DOA 估计结果

Fig. 10　DOA estimation result with two kinds of sensor position error

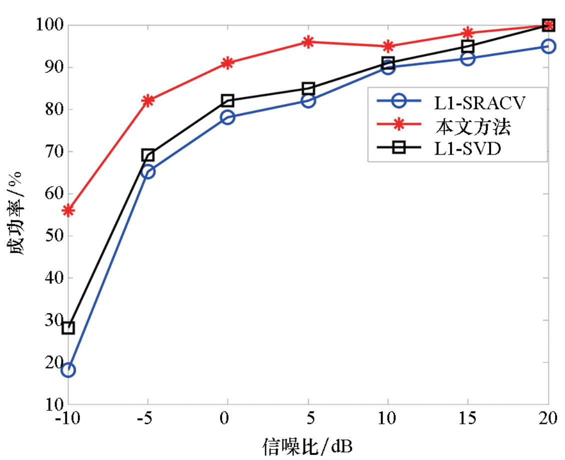


图 11　存在第二种阵元位置误差时不同信噪比下的 DOA 估计成功率

Fig. 11　DOA estimation successful rate in the presence of second type of sensor position error

图 12给出了 10 个信源的 DOA 估计空域功率谱，从图中可以看出，本文方法、L1-SRACV 方法以及 L1-SVD 方法均能对多个信源实现准确的 DOA 估计。

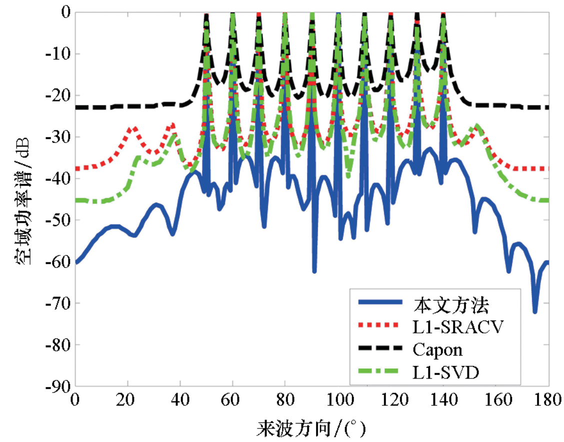


图 12　10 个信源 DOA 估计结果

Fig. 12　DOA estimation result of 10 uncorrelated sources

5　结论

基于协方差矩阵稀疏特性的 DOA 估计方法具有良好的噪声抑制性能，但是经典的 L1-SRACV 算法计算复杂度高，并且在低快拍数条件下的估计性能严重下降。本文针对该问题提出了一种直接基于协方差矩阵二维稀疏特性的 DOA 估计方法，避免了矩阵矢量化操作，从而大大提高了算法的运行效率。同时，仿真实验结果表明该算法在低信噪比、低快拍数条件下仍然能取得良好的估计性能，显示了本文方法相对于传统算法的优越性。下一步工作将对本文算法进行改进，提高其对于邻近目标的分辨能力以及阵列存在误差下的 DOA 估计性能。

参考文献(References)

[1]　袁晓东，万建伟，程翥，等. 基于直接数据域自适应算法的相干信号 DOA 估计[J]. 国防科技大学学报，2012，34(3)：131－135.
YUAN Xiaodong，WAN Jianwei，CHENG Zhu，et al. DOA estimation of correlated signals based on the adaptive algorithm in direct data domain [J]. Journal of National University of Defense Technology，2012，34(3)：131－135. (in Chinese)

[2]　Krim H，Viberg M. Two decades of array signal processing research：the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine，1996，13(4)：67－94.

[3]　Qiu W，Wang W K，Zhou Z M，et al. Acoustic array single snapshot beamforming via compressed sensing [C]// Proceedings of OCEANS，2016：1－4.

[4]　Gorodnitsky I，Rao B. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS：a reweighted minimum norm

algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3): 600 – 616.

[5] Zdunek R, Cichocki A. Improved M-FOCUSS algorithm with overlapping blocks for locally smooth sparse signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(10): 4752 – 4761.

[6] Malioutov D, Cetin M, Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor array[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010 – 3022.

[7] 王洪雁,房云飞,裴炳南. 基于矩阵补全的二阶统计量重构 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(6): 1383 – 1389.
WANG Hongyan, FANG Yunfei, PEI Bingnan. Matrix completion based second order statistic reconstruction DOA estimation method [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(6): 1383 – 1389. (in Chinese)

[8] 孙磊,王华力,许广杰,等. 基于稀疏贝叶斯学习的高效 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(5): 1196 – 1201.
SUN Lei, WANG Huali, XU Guangjie, et al. Efficient direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(5): 1196 – 1201. (in Chinese)

[9] 郭英,东润泽,张坤峰,等. 基于稀疏贝叶斯学习的多跳频信号 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(3): 516 – 522.
GUO Ying, DONG Runze, ZHANG Kunfeng, et al. Direction of arrival estimation for multiple frequency hopping signals based on sparse Bayesian learning [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, 41(3): 516 – 522. (in Chinese)

[10] 王珊珊,刘铮,谢荣,等. 有源欺骗干扰环境下的 DOA 估计[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(5): 1040 – 1046.
WANG Shanshan, LIU Zheng, XIE Rong, et al. DOA estimation under active deception jamming environment [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, 41(5): 1040 – 1046. (in Chinese)

[11] Yin J H, Chen T Q. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4489 – 4493.

[12] 赵永红,张林让,刘楠,等. 采用协方差矩阵稀疏表示的 DOA 估计方法[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2016, 43(2): 58 – 63, 101.
ZHAO Yonghong, ZHANG Linrang, LIU Nan, et al. DOA estimation method based on the covariance matrix sparse representation [J]. Journal of Xidian University (Natural Science), 2016, 43(2): 58 – 63, 101. (in Chinese)

[13] Ghaffari A, Babaie-Zadeh M, Jutten C. Sparse decomposition of two dimensional signals [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009: 3157 – 3160.