

基于非局部理论的黏弹性基体中压电纳米梁热-机电振动特性*

张大鹏, 雷勇军

(国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 基于非局部 Euler 梁理论和 Hamilton 原理建立黏弹性基体中压电纳米梁的热-机电振动特性分析模型。综合考虑非局部效应、压电效应、温度场、电场等复杂因素影响, 推导出黏弹性基体中压电纳米梁振动特性分析的振动控制方程, 并利用分布参数传递函数方法求解出一般边界条件下压电纳米梁的固有频率及相应振型。以锆钛酸铅压电陶瓷-4 材料制成的某压电纳米梁为例, 给出了四种典型边界条件下该压电纳米梁的前四阶固有频率, 并系统分析了非局部效应、外部电压、温度载荷、黏弹性基体等因素对压电纳米梁热-机电振动特性的影响规律。分析结果表明: 所建立的振动特性分析模型及其求解方法在分析黏弹性基体中压电纳米梁的热-机电振动特性问题中准确有效。

关键词: 压电纳米梁; 热-机电振动特性; 黏弹性基体; 非局部弹性理论; 传递函数方法

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2020)06-142-08

Thermo-electro-mechanical vibration analysis of piezoelectric nanobeams embedded in viscoelastic medium based on nonlocal elasticity theory

ZHANG Dapeng, LEI Yongjun

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Based on the nonlocal elasticity theory and Hamilton's principle, the model for thermo-electro-mechanical vibration analysis was developed for a piezoelectric nanobeam embedded in viscoelastic medium. Governing equations of motion and boundary conditions for vibration analysis were derived where thermo-electro-mechanical loadings, viscoelastic foundation, nonlocal effect and piezoelectric effect were considered simultaneously. The transfer function method was employed to obtain the natural frequencies in closed form for the nanobeam with various boundary conditions. A detailed parametric study was also carried out for the effects of nonlocal parameter, boundary conditions and viscoelastic foundation on the vibration of nanobeams. The study demonstrates the accuracy and the efficiency of the developed model for vibration analysis of a complicated multi-physics system comprising nonlocal piezoelectric nanobeams, viscoelastic foundation and thermo-electro-mechanical loadings.

Keywords: piezoelectric nanobeams; thermo-electro-mechanical vibration; viscoelastic medium; nonlocal elasticity theory; transfer function method

压电纳米材料不仅具备十分独特的机电耦合性能, 可实现机械能与电能的相互转化, 在力学、电学、热学等方面也表现出许多优异特性^[1], 并在纳米发电体^[2]、纳米谐振器^[3]以及纳米传感器^[4]等领域展示出巨大的应用潜力。作为先进纳米器件研制与应用过程中的关键技术之一, 压电纳米元件的振动特性研究已成为当前纳米力学领域关注的热点之一^[5-7]。

根据非局部弹性理论, Ebrahimi 等^[8]建立了弹性基体上功能梯度纳米梁的振动控制方程, 并分析了外部温度和湿度等环境因素对纳米梁振动特性的影响。在此基础上, Ebrahimi 等^[9]进一步考虑了基体和功能梯度压电纳米梁的黏弹性特

性, 系统分析了基体性能参数、温度、湿度等因素对不同边界条件下黏弹性基体中黏弹性纳米梁的影响情况。Arani 等^[10]基于应变梯度理论和 Pasternak 弹性地基模型对弹性基体中纳米梁-压电纳米梁组合系统的非线性振动问题进行了相关研究。此外, Ansari 等^[11]还根据 Hamilton 原理建立了后屈曲下压电纳米梁热-机电振动特性分析的非局部 Timoshenko 梁模型, 并利用微分求积法给出了一般边界条件下压电纳米梁的固有频率。采用相同的理论模型与求解方法, Ke 等^[12]对压电纳米梁的热-机电振动特性问题进行了深入研究。同时, Ke 等^[13]还利用所建立的非局部 Timoshenko 梁模型研究了压电纳米梁的非线性振

* 收稿日期: 2019-06-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11902348); 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5650)

作者简介: 张大鹏(1989—), 男, 河南新乡人, 讲师, 博士, E-mail: zhangdapenghit@126.com

动问题,并研究了非局部参数、温度载荷、外部电压等因素对压电纳米梁非线性振动特性的影响情况。Jiang 等^[14]分析了内部残余应力、几何非线性等对压电纳米线(nanowire)振动特性的影响,指出内部残余应力可在一定程度上降低纳米线的固有频率。就目前而言,国内外相关学者在研究基体中压电纳米元件的振动特性问题时大都将基体简化为弹性地基模型进行分析,但由于实际工程中涉及的多数基体为典型的黏弹性材料,采用弹性地基模型无法准确模拟其黏弹性特性,因此有必要针对该方面问题展开相关研究。

本文针对黏弹性基体中压电纳米梁的热-机电振动特性问题,综合考虑非局部效应、压电效应、温度场及电场等复杂因素影响,推导出系统的振动控制方程,并利用传递函数方法(Transfer Function Method, TFM)得到任意边界条件下压电纳米梁的固有频率和相应振型。以锆钛酸铅压电陶瓷-4(Piezoelectric ceramic Transducer-4, PZT-4)材料制成的某压电纳米梁为例,通过与相关文献结果进行对比分析,验证了所建分析模型与求解方法的有效性,并在此基础上系统分析了非局部效应、外部电压、温度载荷、黏弹性基体等因素对压电纳米梁热-机电振动特性的影响规律。

1 振动控制方程与边界条件

研究对象如图1所示,在直角坐标系 oxz 中,某压电纳米梁置于黏弹性基体中,同时受到温度场、电场和双轴向力共同作用影响。图中, L 和 h 分别表示压电纳米梁的长度和厚度, P_0 为压电纳米梁所受的双轴向力(压力或拉力), ΔT 为温度变化梯度, Φ 为外部电场的电势。为研究黏弹性基体中压电纳米梁的热-机电振动特性,可将压电纳米梁等效为 Euler 梁模型,黏弹性基体等效为 visco-Pasternak 黏弹性地基模型。

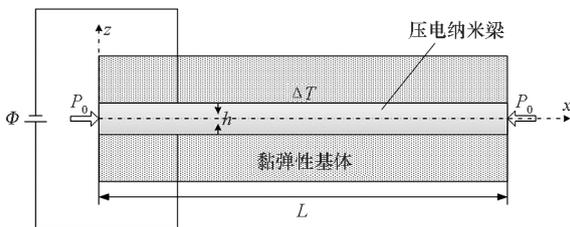


图1 黏弹性基体中压电纳米梁

Fig.1 Piezoelectric nanobeam embedded in viscoelastic medium

为考虑压电材料的非局部效应, Zhou

等^[15-16]将非局部弹性理论扩展到压电材料中,并给出了非局部压电材料的微分型本构方程。

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - \lambda_{ij} \Delta T \quad (1)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \kappa_{ik} E_k + p_i \Delta T \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \\ D_{i,i} = 0 \\ E_i = -\Phi_{,ijk,i} \end{cases} \quad (3)$$

其中, σ_{ij} 、 ε_{kl} 、 D_i 和 E_k 分别表示压电材料的应力、应变、电位移和电场分量, c_{ijkl} 、 e_{ijk} 、 κ_{ik} 和 p_i 分别表示压电材料的弹性模量、压电参数、介电常数和热电系数。

根据式(1)和式(2),可得到压电纳米梁的本构方程。

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xx} = c_{11} \varepsilon_{xx} - e_{31} E_z - \lambda_{11} \Delta T \quad (4)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] D_x = \kappa_{11} E_x \quad (5)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] D_z = e_{31} \varepsilon_{xx} + \kappa_{33} E_z + p_1 \Delta T \quad (6)$$

电场分量 E_k 可由电势 $\Phi(x, z, t)$ 得到,其关系式为:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \quad (7)$$

为此,首先需要确定电势 $\Phi(x, z, t)$ 的具体形式。Quek 和 Wang^[17-18] 在研究压电薄板及压电梁的频散特性和失稳特性时,为使电势 $\Phi(x, z, t)$ 满足 Maxwell 方程,假设 $\Phi(x, z, t)$ 为关于纳米梁厚度方向 z 的余弦函数和线性函数的组合,即

$$\Phi(x, z, t) = -\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi(x, t) + \frac{2zV_0}{h} e^{i\omega t} \quad (8)$$

式中: $\phi(x, t)$ 为压电纳米梁中面的电势,是随空间坐标 x 和时间 t 变化的函数; V_0 为所受外电压。

将式(8)代入式(7),可得到电场的具体表达式。

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi - \frac{2V_0}{h} e^{i\omega t} \end{bmatrix} \quad (9)$$

黏弹性基体中压电纳米梁热-机电振动特性分析的振动微分方程及边界条件可以通过 Hamilton 原理得到,有

$$\int_0^L (\delta \Pi_k + \delta \Pi_F - \delta \Pi_s) dt = 0 \quad (10)$$

式中, Π_k 、 Π_F 和 Π_s 分别表示压电纳米梁的动能、外力功和应变能。其中,应变能 Π_s 可表示为:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} - D_x E_x - D_z E_z) dz dx \quad (11)$$

将式(4) ~ (6) 和式(9) 代入式(11), 可得:

$$\begin{aligned} \Pi_s = & -\frac{1}{2} \int_0^L M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ D_x \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \right. \\ & \left. D_z \left[\frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi + \frac{2V_0}{h} e^{i\omega t} \right] \right\} dz dx \end{aligned} \quad (12)$$

式中, M 为压电纳米梁的弯矩, 其表达式为:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \quad (13)$$

压电纳米梁的动能 Π_k 和外力功 Π_F 可分别写为:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_0^L \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (14)$$

$$\Pi_F = \frac{1}{2} \int_0^L \left[-N_Q w + (N_{Px} + N_{Tx} + N_{Ex}) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (15)$$

式中: N_{Px} 、 N_{Tx} 和 N_{Ex} 是由双轴向力 P_0 、温度变化梯度 ΔT 和外部电压 V_0 产生的 x 向外载荷, 且有

$$\begin{cases} N_{Px} = P_0 \\ N_{Tx} = \lambda_{11} h \Delta T \\ N_{Ex} = -2e_{31} V_0 \end{cases} \quad (16)$$

N_Q 为 visco-Pasternak 黏弹性基体的作用力。

$$N_Q = k_w w - k_G \nabla^2 w + c_t \frac{\partial w}{\partial t} \quad (17)$$

式中, k_G 、 k_w 和 c_t 分别表示 visco-Pasternak 黏弹性基体的剪切弹性模量、Winkler 弹性模量和阻尼参数。

将式(12)、式(14) 和式(15) 代入式(10), 并进行分部积分, 可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\delta \Pi_k + \delta \Pi_F - \delta \Pi_s) dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^L \left\{ \left[- (N_{Px} + N_{Tx} + N_{Ex}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. (k_w w - k_G \nabla^2 w + c_t \frac{\partial w}{\partial t}) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right] \delta w - \right. \\ & \left. \delta \phi \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial D_x}{\partial x} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) + D_z \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] dz \right\} dx dt = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

令变量 δw 和 $\delta \phi$ 前的系数表达式为 0, 可得到压电纳米梁的振动微分方程。

$$\begin{aligned} -d_{11} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \bar{F}_{31} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} - \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\bar{k}_w \bar{w} - \bar{k}_G \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \right. \\ \left. \bar{c}_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] = \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\bar{X}_{11} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} - \bar{F}_{31} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \bar{X}_{33} \bar{\phi} = 0 \quad (20)$$

式中涉及的无量纲参量定义如下:

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{c}_{11} = c_{11} L, \phi_0 = \sqrt{\bar{c}_{11} / X_{33}}, \bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0}, \eta = \frac{L}{h}, \\ \bar{k}_w = \frac{k_w L^2}{\bar{c}_{11}}, \bar{k}_G = \frac{k_G}{\bar{c}_{11}}, \bar{c}_t = \frac{c_t L}{\sqrt{\rho L \bar{c}_{11}}}, \iota = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}}{\rho L}}, \\ \bar{X}_{11} = \frac{X_{11} \phi_0^2}{\bar{c}_{11} L^2}, \bar{X}_{33} = \frac{X_{33} \phi_0^2}{\bar{c}_{11}}, d_{11} = \frac{D_{11}}{\bar{c}_{11} L^2}, \bar{F}_{31} = \frac{F_{31} \phi_0}{\bar{c}_{11} L}, \\ \{ \bar{N}_{Px}, \bar{N}_{Tx}, \bar{N}_{Ex} \} = \frac{1}{\bar{c}_{11}} \{ N_{Px}, N_{Tx}, N_{Ex} \}. \end{aligned}$$

其中:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] M = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{31} \phi \quad (21)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] D_x dz = X_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] D_z dz \\ = -F_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - X_{33} \phi \end{aligned} \quad (23)$$

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} z^2 dz \quad (24)$$

$$F_{31} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{31} \frac{\pi}{h} z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \quad (25)$$

$$X_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{11} \cos^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \quad (26)$$

$$X_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{33} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \quad (27)$$

同时, 压电纳米梁的弯矩 M_x 和剪力 Q_x 的具体表达式可写为:

$$\begin{aligned} M_x = \bar{c}_{11} L \left\{ -d_{11} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \bar{F}_{31} \bar{\phi} + \alpha^2 \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + \bar{k}_w \bar{w} - \right. \right. \\ \left. \left. \bar{k}_G \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \bar{c}_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} Q_x = \bar{c}_{11} \left\{ -d_{11} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} + \bar{F}_{31} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \alpha^2 \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial t^2 \partial x} + \bar{k}_w \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. \bar{k}_G \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} + \bar{c}_t \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t \partial x} + (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

为求得压电纳米梁的固有频率, 令式(19) 和式(20) 的解为:

$$\bar{w}(\bar{x}) = \bar{W}(\bar{x}) \exp(i\Omega \bar{t}) \quad (30)$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{\Phi}(\bar{x}) \exp(i\Omega \bar{t}) \quad (31)$$

其中: $\bar{W}(\bar{x})$ 和 $\bar{\Phi}(\bar{x})$ 分别表示相应的振型和电势分布; Ω 为压电纳米梁的无量纲固有频率, 且有

$$\Omega = \omega L \sqrt{\frac{\rho L}{\bar{c}_{11}}} \quad (32)$$

将式(30) 和式(31) 代入式(19) 和式(20), 有

$$\begin{aligned}
 & -d_{11} \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^4} + \bar{F}_{31} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} - \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \left[\bar{k}_w \bar{W} - \bar{k}_G \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} + \right. \\
 & \left. i\Omega \bar{c}_t \bar{W} + (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \right] \\
 & = -\Omega^2 \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \frac{1}{\eta} \bar{W} \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\bar{X}_{11} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{F}_{31} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{X}_{33} \bar{\Phi} = 0 \quad (34)$$

同时,式(28)和式(29)进一步化为:

$$\begin{aligned}
 M = \bar{c}_{11} L e^{i\Omega t} \left\{ -d_{11} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{F}_{31} \bar{\Phi} + \alpha^2 \left[-\frac{1}{\eta} \Omega^2 \bar{W} + \bar{k}_w \bar{W} - \right. \right. \\
 \left. \left. \bar{k}_G \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} + i\Omega \bar{c}_t \bar{W} + (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \right] \right\} \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q = \bar{c}_{11} e^{i\Omega t} \left\{ -d_{11} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3} + \bar{F}_{31} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} + \alpha^2 \left[-\frac{1}{\eta} \Omega^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} + \bar{k}_w \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} - \right. \right. \\
 \left. \left. \bar{k}_G \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3} + i\Omega \bar{c}_t \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} + (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{x}^3} \right] \right\} \quad (36)
 \end{aligned}$$

为求解系统的振动微分方程,需要确定压电纳米梁的边界条件。假设压电纳米梁两端边界上的电势 $\phi(x, t)$ 均为 0,并给出了如下三种典型边界条件:

1) 自由端边界条件

$$\begin{aligned}
 \phi(x, t) = Q(x, t) = M(x, t) = 0, \\
 x = 0 \text{ 或 } x = L \quad (37)
 \end{aligned}$$

2) 简支端边界条件

$$\begin{aligned}
 w(x, t) = \phi(x, t) = M(x, t) = 0, \\
 x = 0 \text{ 或 } x = L \quad (38)
 \end{aligned}$$

3) 固支端边界条件

$$\begin{aligned}
 w(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = \phi(x, t) = 0, \\
 x = 0 \text{ 或 } x = L \quad (39)
 \end{aligned}$$

2 传递函数法求解

定义如下状态向量:

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \Omega) = \left[\bar{W}, \frac{d\bar{W}}{d\bar{x}}, \frac{d^2\bar{W}}{d\bar{x}^2}, \frac{d^3\bar{W}}{d\bar{x}^3}, \bar{\Phi}, \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} \right]^T \quad (40)$$

根据式(40),式(33)和式(34)可改写为状态方程形式。

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \Omega)}{d\bar{x}} = \mathbf{F}(\Omega) \boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \Omega) \quad (41)$$

$$\mathbf{F}(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{F}_{31}}{\bar{X}_{11}} & 0 & \frac{\bar{X}_{33}}{\bar{X}_{11}} & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

其中:

$$f_1 = \frac{\frac{1}{\eta} \Omega^2 - \bar{k}_w - i\Omega \bar{c}_t}{d_{11} + \alpha^2 \bar{k}_G - \alpha^2 (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex})} \quad (43)$$

$$f_2 = \frac{\bar{k}_G + \alpha^2 \bar{k}_w + \alpha^2 i\Omega \bar{c}_t - \alpha^2 \Omega^2 \frac{1}{\eta} - (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex}) + \frac{\bar{F}_{31}}{\bar{X}_{11}}}{d_{11} + \alpha^2 \bar{k}_G - \alpha^2 (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex})} \quad (44)$$

$$f_3 = \frac{1}{d_{11} + \alpha^2 \bar{k}_G - \alpha^2 (\bar{N}_{Px} + \bar{N}_{Tx} + \bar{N}_{Ex})} \frac{\bar{F}_{31} \bar{X}_{33}}{\bar{X}_{11}} \quad (45)$$

类似地,压电纳米梁的边界条件可写为状态方程形式。

$$\mathbf{M}(\Omega) \boldsymbol{\eta}(0, \Omega) + \mathbf{N}(\Omega) \boldsymbol{\eta}(1, \Omega) = \mathbf{0} \quad (46)$$

式中, $\mathbf{M}(\Omega)$ 和 $\mathbf{N}(\Omega)$ 分别表示压电纳米梁左端 ($\bar{x} = 0$) 和右端 ($\bar{x} = 1$) 的边界条件选择矩阵。

式(41)的解可写为:

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \Omega) = e^{F(\Omega)\bar{x}} \boldsymbol{\eta}(0, \Omega) \quad (47)$$

将式(47)代入边界条件(46),有

$$[\mathbf{M}(\Omega) + \mathbf{N}(\Omega) e^{F(\Omega)}] \boldsymbol{\eta}(0, \Omega) = \mathbf{0} \quad (48)$$

则压电纳米梁的无量纲固有频率 Ω 可通过求解如式(49)所示特征方程得到。

$$\det[\mathbf{M}(\Omega) + \mathbf{N}(\Omega) e^{F(\Omega)}] = 0 \quad (49)$$

对应的模态振型为:

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \Omega) = e^{F(\Omega)\bar{x}} \boldsymbol{\eta}(0, \Omega) \quad (50)$$

根据式(32),可得到黏弹性基体中压电纳米梁在热-电-力载荷作用下的固有频率。

$$\omega = \frac{\Omega}{L} \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}}{\rho L}} \quad (51)$$

3 算例分析

本节以 PZT-4 材料制成的纳米梁为例进行算例分析。其中,PZT-4 的相关材料参数如表 1 所示^[13]。若无特殊说明,默认压电纳米梁的长度和厚度分别为 $L = 12 \text{ nm}$ 和 $h = 2 \text{ nm}$ 。

表 1 PZT-4 压电纳米梁相关材料参数

Tab.1 Material properties of PZT-4

| c_{11}/GPa | $e_{31}/(\text{C}/\text{m}^2)$ | $\kappa_{11}/(\text{C}/(\text{Vm}))$ | $\kappa_{33}/(\text{C}/(\text{Vm}))$ |
|--|--|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 132 | -4.1 | 5.841×10^{-9} | 7.124×10^{-9} |
| $\lambda_1/(\text{N}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}))$ | $p_1/(\text{C}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}))$ | $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$ | |
| 4.738×10^5 | 2.5×10^{-5} | 7500 | |

针对无基体时 PZT-4 压电纳米梁的振动特性问题,Ke 等^[13]根据非局部弹性理论和 Hamilton

原理建立了系统的振动控制方程,并通过微分求积方法得到不同边界条件下压电纳米梁的固有频率及相应振型。下面基于文献[13]中计算结果对本节所建模型和求解方法的正确性进行检验。本算例中涉及的基本参数与文献[13]一致:压电纳米梁厚度 $h = 2 \text{ nm}$,非局部参数 $\alpha = 0.1$,外载荷 $P_0 = V_0 = \Delta T = 0$,相关材料参数见表 1,同时不考虑黏弹性基体影响(即 $k_w = k_c = c_t = 0$)。表 2 给出了 S-S 和 C-S 边界条件下压电纳米梁在不同长细比 η 时的无量纲固有频率 TFM 解以及文献[13]对应的微分求积法(Differential Quadrature Method, DQM)的解。从表 2 中可以看出:各边界条件下压电纳米梁一阶无量纲固有频率的 TFM 解与文献[13]中的计算结果吻合较好,验证了所建模型和求解方法的正确性。

为方便以后其他学者进行对比分析,表 3 给出了三种典型边界条件(C-F、S-S 和 C-C)下压电纳米梁在不考虑黏弹性基体($k_w = 0, k_c = 0, c_t = 0$)和考虑 visco-Pasternak 黏弹性基体($k_w = 0.1 \text{ GPa/nm}, k_c = 0.25 \text{ GPa} \cdot \text{nm}, c_t = 1 \times 10^{-4} \text{ GPa} \cdot \text{ns/nm}$)两种情况下的前三阶固有频率。本算例中采用的基本参数与上一算例相同。

从表 3 可以看出:除了 C-F 边界条件下的一阶阻尼频率之外,不同边界条件下各阶阻尼频率均随非局部参数 α 的增大而明显减小。考虑 visco-Pasternak 黏弹性基体影响后,压电纳米梁的固有频率出现了虚部项,这是系统引入了黏弹性基体的阻尼特性所导致的。压电纳米梁的一阶阻尼频率在考虑基体后明显增大,而高阶阻尼频率增大幅度较小,其原因是黏弹性基体可显著提高系统的结构刚度。从表 3 中还可以看出:各边界条件下压电纳米梁的前三阶复固有频率的虚部(即系统的阻尼比)均为 $0.5305i \text{ GHz}$,且不随非局部参数 α 的变化而变化。这是由于复固有频率的虚部仅与黏弹性基体的阻尼系数相关,而在本文计算分析中并未考虑 visco-Pasternak 黏弹性基体的非局部效应。同时,边界条件对压电纳米梁的振动特性同样具有很大影响。进一步,图 2 给出了非局部参数 α 对 S-S 和 C-C 边界条件下压电纳米梁前三阶振型的影响情况。从图中可以看出:非局部参数 α 对 S-S 边界条件下压电纳米梁的各阶振型均无明显影响,而对 C-C 边界条件下的振型具有一定影响,且影响程度随着模态阶次的提高而有所增大。

表 2 无基体压电纳米梁一阶无量纲固有频率 Ω 与文献[13]对比情况

Tab. 2 Comparison of the dimensionless fundamental frequencies for piezoelectric nanobeams in the absence of medium

| 边界条件 | | η | | | | | |
|------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 6 | 8 | 10 | 16 | 20 | 30 |
| S-S | 本文 TFM 解 | 0.456 9 | 0.342 7 | 0.274 2 | 0.171 4 | 0.137 1 | 0.091 4 |
| | 文献[13] | 0.457 0 | 0.342 8 | 0.274 2 | 0.171 4 | 0.137 1 | 0.091 4 |
| C-S | 本文 TFM 解 | 0.707 6 | 0.530 8 | 0.424 9 | 0.265 6 | 0.212 7 | 0.142 0 |
| | 文献[13] | 0.707 7 | 0.531 0 | 0.425 0 | 0.265 8 | 0.212 7 | 0.142 0 |

表 3 不同 α 下压电纳米梁在典型边界条件下的前三阶固有频率

Tab. 3 The natural frequencies of the piezoelectric nanobeam with different boundary conditions and α 单位:GHz

| 边界条件 | 无基体支撑时 | | | visco-Pasternak 黏弹性基体支撑时 | | |
|------|----------------|----------------|----------------|--------------------------|----------------------|----------------------|
| | $\alpha = 0.0$ | $\alpha = 0.1$ | $\alpha = 0.2$ | $\alpha = 0.0$ | $\alpha = 0.1$ | $\alpha = 0.2$ |
| C-F | 9.470 0 | 9.521 4 | 9.650 8 | 15.999 9 + 0.530 5i | 16.045 7 + 0.530 5i | 16.190 8 + 0.530 5i |
| | 59.412 9 | 55.760 9 | 47.396 6 | 61.133 8 + 0.530 5i | 57.666 3 + 0.530 5i | 49.767 9 + 0.530 5i |
| | 166.303 2 | 137.644 1 | 99.229 4 | 167.212 2 + 0.530 5i | 138.865 3 + 0.530 5i | 101.109 4 + 0.530 5i |
| S-S | 26.650 5 | 25.425 3 | 22.565 8 | 30.126 9 + 0.530 5i | 29.048 9 + 0.530 5i | 26.582 7 + 0.530 5i |
| | 106.534 7 | 90.206 5 | 66.336 7 | 107.860 9 + 0.530 5i | 91.768 9 + 0.530 5i | 68.446 3 + 0.530 5i |
| | 239.523 1 | 174.307 5 | 112.252 5 | 240.417 0 + 0.530 5i | 175.533 8 + 0.530 5i | 114.147 4 + 0.530 5i |
| C-C | 60.248 0 | 56.847 7 | 43.872 1 | 62.301 2 + 0.530 5i | 58.698 7 + 0.530 5i | 46.464 4 + 0.530 5i |
| | 166.060 4 | 137.297 9 | 89.350 9 | 167.414 9 + 0.530 5i | 138.523 2 + 0.530 5i | 91.285 1 + 0.530 5i |
| | 325.434 2 | 230.751 4 | 134.896 1 | 326.684 6 + 0.530 5i | 231.896 7 + 0.530 5i | 136.821 1 + 0.530 5i |

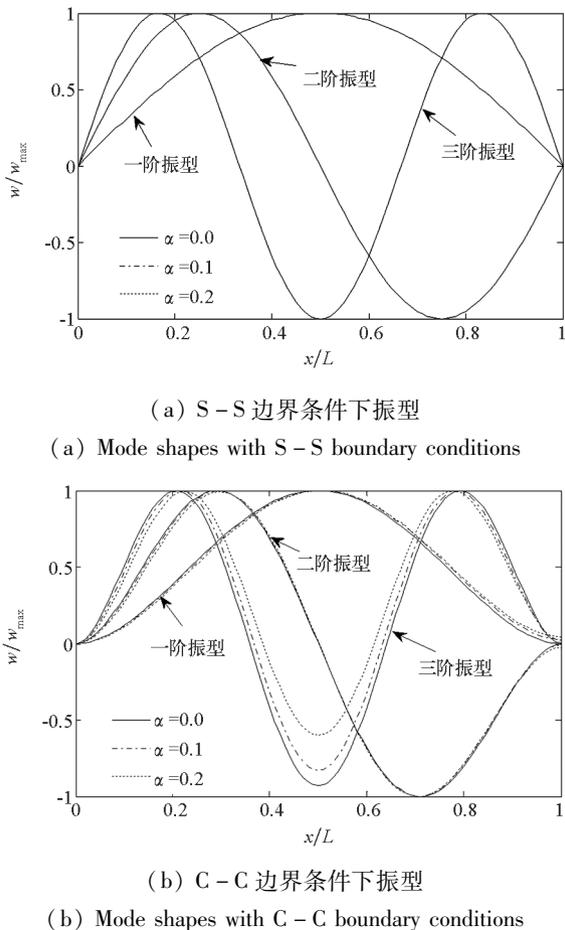


图2 不同边界条件下压电纳米梁前三阶振型
Fig.2 The first three mode shapes for piezoelectric nanobeams with different boundary conditions

由于非局部参数 α 对压电纳米梁固有频率的虚部无影响,下面仅分析其对压电纳米梁固有频率实部的影响情况。图3给出了三种典型边界条件下压电纳米梁在无基体($k_w = k_C = c_l = 0$)和有基体($k_w = 0.1 \text{ GPa/nm}, k_C = 0.25 \text{ GPa} \cdot \text{nm}, c_l = 1 \times 10^{-4} \text{ GPa} \cdot \text{ns/nm}$)影响时一阶频率比 ω_{NL}/ω_L 实部随非局部参数 α 的变化曲线。其中, ω_{NL}/ω_L 用于表征非局部效应的大小, ω_{NL} 和 ω_L 分别表示基于非局部理论($\alpha \neq 0$ 时)和经典局部理论($\alpha = 0$ 时)计算得到的固有频率值。本算例中采用的基本参数与上一算例相同。从图3可以看出, S-S 和 C-C 边界条件下压电纳米梁在有基体和无基体影响时一阶频率比 ω_{NL}/ω_L 均随非局部参数 α 的增大而明显减小,但 C-F 边界条件下 ω_{NL}/ω_L 则随非局部参数 α 的增大有所增大。这表明对于 S-S 和 C-C 边界条件下压电纳米梁考虑非局部效应会在较大程度上削弱系统的结构刚度;而对于 C-F 边界条件,其结构刚度则有所增强,这一特殊规律与文献[19-20]中所描述的一致。从图中还可以看出,考虑 visco-Pasternak

黏弹性基体后,各边界条件下一阶频率比 ω_{NL}/ω_L 随非局部参数 α 的变化幅度有所减小,即考虑黏弹性基体后可一定程度上减小非局部效应对压电纳米梁振动特性的影响。同时,边界条件对压电纳米梁的振动特性具有较大影响,增大边界连接刚度可显著提高压电纳米梁振动特性对非局部效应的敏感度。

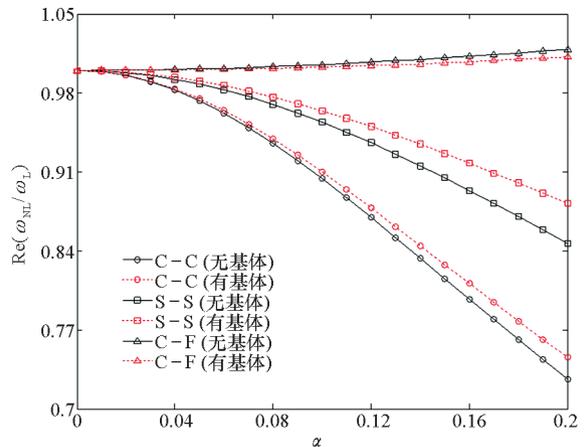


图3 压电纳米梁一阶频率比 ω_{NL}/ω_L 实部随非局部参数 α 的变化曲线

Fig.3 Effect of nonlocal parameter α on the real parts of the first frequency ratios ω_{NL}/ω_L for piezoelectric nanobeams

进一步,为分析非局部参数 α 对压电纳米梁高阶固有频率的影响情况,图4给出了压电纳米梁二阶频率比 ω_{NL}/ω_L 实部随非局部参数 α 的变化曲线。从图4可以看出,各边界条件下压电纳米梁高阶固有频率均随非局部参数 α 的增大明显减小。同时,非局部参数 α 对压电纳米梁固有频率的影响程度随频率阶次的增大而增大,例如当非局部参数 α 由0增大到0.2时,无基体支撑时 S-S 边界条件下压电纳米梁的一阶频率比 ω_{NL}/ω_L 减小了 11.76%,而二阶频率比 ω_{NL}/ω_L 则减小了 36.54%。此外,与图3的基频相比,黏弹性基体对高阶固有频率的影响明显减小。

为进一步分析边界条件、温度变化梯度 ΔT 和双轴向力 P_0 对压电纳米梁外电压 V_0 敏感度的影响情况,图5和图6分别给出了各边界条件下压电纳米梁($\alpha = 0$)一阶和二阶频率比 ω/ω_{v2} 实部随电压 V_0 的变化曲线。这里,频率比 ω/ω_{v2} 用于表征外电压 V_0 对固有频率的影响程度,其中 ω_{v2} 表示外电压 $V_0 = -0.2 \text{ V}$ 时压电纳米梁的阻尼频率。从图中可以看出,压电纳米梁前两阶频率比 ω/ω_{v2} 均随电压 V_0 的增大近似呈线性减小。同时,当温度变化梯度 ΔT 和双轴向力 P_0 增大时,各边界条件下压电纳米梁前两阶频率比 ω/ω_{v2} 的减小幅度均随之增大,且当双轴向力 P_0 增大时其

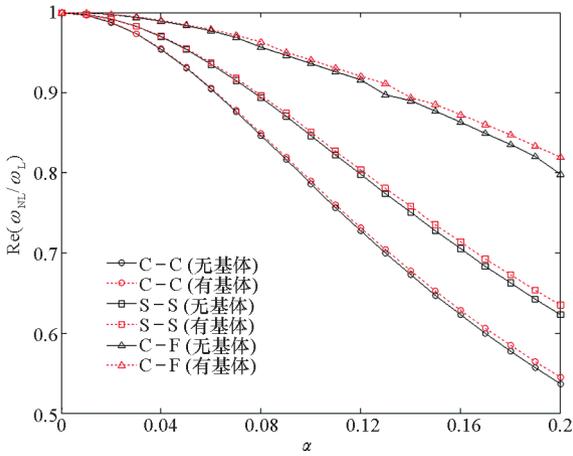


图 4 压电纳米梁二阶频率比 ω_{NL}/ω_L 实部随非局部参数 α 的变化曲线

Fig. 4 Effect of nonlocal parameter α on the real parts of the second frequency ratios ω_{NL}/ω_L for piezoelectric nanobeams

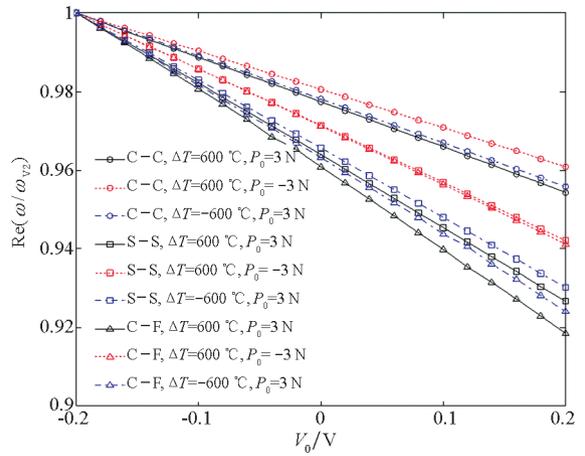


图 6 各边界条件下压电纳米梁二阶频率比 ω/ω_{v2} 实部随电压 V_0 的变化曲线

Fig. 6 Effect of external electric voltage V_0 on the real parts of the second frequency ratios ω/ω_{v2} for nonlocal piezoelectric beams with various boundary conditions

减小幅度更为明显。例如,当电压 V_0 从 -0.2 V 增大到 0.2 V 时,C - F 压电纳米梁一阶频率比 ω/ω_{v2} 在 $\Delta T = 600\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $P_0 = -3\text{ N}$ 时减小了 17.47%, 在 $\Delta T = -600\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $P_0 = 3\text{ N}$ 时减小了 37.15%, 而在 $\Delta T = 600\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $P_0 = 3\text{ N}$ 时则减小了 51.58%。这表明,压电纳米梁固有频率对外电压的敏感度随温度变化梯度 ΔT 或双轴向力 P_0 的增大而增大。从图中还可以看出,前两阶频率比 ω/ω_{v2} 随电压 V_0 的变化幅度按照 C - F > S - S > C - C 的顺序依次减小,表明减小边界连接刚度可显著提高压电纳米梁对电压 V_0 的敏感度。同时,压电纳米梁对电压 V_0 的敏感度随频率阶次的提高明显减小。

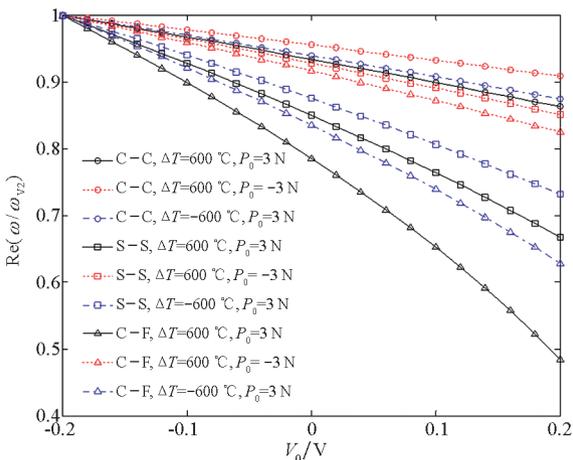
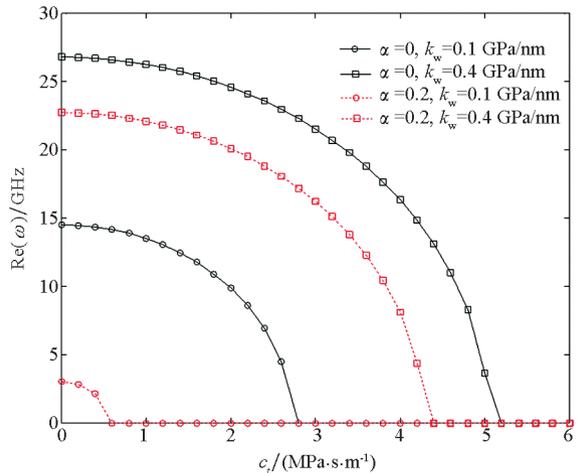


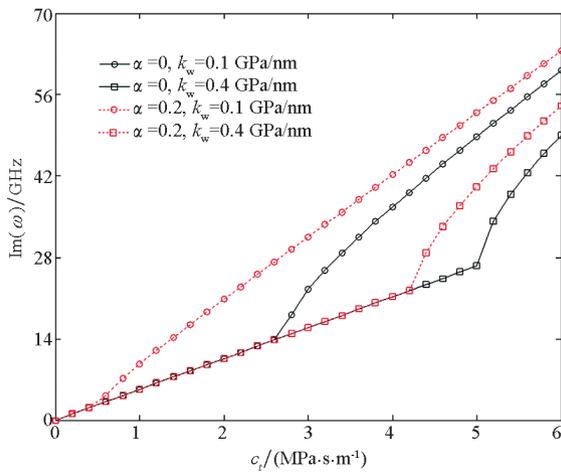
图 5 各边界条件下压电纳米梁一阶频率比 ω/ω_{v2} 实部随电压 V_0 的变化曲线

Fig. 5 Effect of external electric voltage V_0 on the real parts of the first frequency ratios ω/ω_{v2} for nonlocal piezoelectric beams with various boundary conditions

为研究黏弹性基体对压电纳米梁振动特性的影响情况,图 7 给出了不同 α 和 k_w 下 S - S 压电纳米梁一阶固有频率实部和虚部随阻尼系数 c_t 的变化曲线。本算例中,取 $\Delta T = 600\text{ }^\circ\text{C}$ 、 $P_0 = 3\text{ N}$ 和 $V_0 = 0.3\text{ V}$,其他基本参数同上一算例。从图 7 可以看出,当阻尼系数 c_t 大于临界阻尼系数 $(c_t)_{crit}$ 时,压电纳米梁固有频率实部为 0,即压电纳米梁不发生往复振动,此时系统处于过阻尼状态。相应地,压电纳米梁固有频率虚部在临界阻尼系数 $(c_t)_{crit}$ 处发生突变。当阻尼系数 c_t 小于临界阻尼系数 $(c_t)_{crit}$ 时,固有频率实部随阻尼系数 c_t 的增大非线性减小,而其虚部则线性增大,且此时 Winkler 弹性模量 k_w 对虚部影响很小,可忽略不计。从图中还可以看出,增大 Winkler 弹性模量 k_w 可显著增大临界阻尼系数 $(c_t)_{crit}$,而增大非局部参数 α 则减小系统的 $(c_t)_{crit}$ 。



(a) 实部
(a) Real parts



(b) 虚部

(b) Imaginary parts

图7 S-S压电纳米梁一阶固有频率 ω 随阻尼系数 c_t 的变化曲线

Fig.7 Variation of the first complex natural frequencies for S-S piezoelectric nanobeams with damping parameter c_t

4 结论

本文根据 Hamilton 原理建立了黏弹性基体中压电纳米梁的热-机电振动特性分析模型,并采用传递函数方法求得了一般边界条件下固有频率的闭合解。通过与文献结果进行对比,验证了所建模型和求解方法的正确性。在此基础上,系统分析了非局部参数、边界条件、外部载荷、黏弹性基体等因素对压电纳米梁振动特性的影响,得到的主要结论有:

1) 压电纳米梁的振动特性对外电压具有较大敏感度,且其敏感度随温度变化梯度和双轴向力的增大而增大,随边界连接刚度的增大而减小;同时,除 C-F 压电纳米梁基频外,压电纳米梁对外电压的敏感度随非局部效应的增强而增大。

2) 外电压、温度变化梯度和双轴向力对压电纳米梁振动特性具有较大影响,通过改变相关参数可在一定程度上调节压电纳米梁的振动特性。

3) 压电纳米梁固有频率虚部仅与黏弹性基体的阻尼系数相关,不受边界条件、非局部参数、外电压、温度变化梯度和双轴向力影响。

4) 存在临界阻尼系数 $(c_t)_{crit}$ 使得压电纳米梁不发生往复振动,且临界阻尼系数 $(c_t)_{crit}$ 随频率阶次和 Winkler 弹性模量的增大而增大,随非局部参数的增大而减小。

参考文献 (References)

[1] 寇文彬. 功能梯度压电纳米梁的线性振动与屈曲分析[D]. 北京: 北京交通大学, 2014.
KOU Wenbin. Linear vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric nanobeams [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014. (in Chinese)

[2] Stassi S, Cauda V, Ottone C, et al. Flexible piezoelectric energy nanogenerator based on ZnO nanotubes hosted in a polycarbonate membrane[J]. Nano Energy, 2015, 13(36): 474-481.

[3] 王建艳. 压电材料的制备与压电微纳器件的研究[D]. 厦门: 厦门大学, 2015.
WANG Jianyan. Preparation of piezoelectric materials and study of piezoelectric micro nano devices [D]. Xiamen: Xiamen University, 2015. (in Chinese)

[4] 张敏亮. ZnO 压电薄膜压力传感器的研究[D]. 北京: 北京工业大学, 2012.
ZHANG Minliang. Study on ZnO piezoelectric thin film pressure sensors [D]. Beijing: North China University of Technology, 2012. (in Chinese)

[5] Wang Z L. ZnO nanowire and nanobelt platform for nanotechnology[J]. Materials Science and Engineering: R: Reports, 2009, 64(3/4): 33-71.

[6] Liu B, Jiang Q, Hu Y, et al. High-frequency vibrations of piezoelectric plates driven by lateral electric fields [J]. International Journal of Engineering Science, 2011, 49(12): 1435-1442.

[7] Behjat B, Khoshrovan M R. Geometrically nonlinear static and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric plates[J]. Composite Structures, 2012, 94(3): 874-882.

[8] Ebrahimi F, Barati M R. A unified formulation for dynamic analysis of nonlocal heterogeneous nanobeams in hygro-thermal environment[J]. Applied Physics A, 2016, 122: 792.

[9] Ebrahimi F, Barati M R. Hydrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory[J]. Composite Structures, 2017, 159: 433-444.

[10] Arani A G, Abdollahian M, Kolahchi R. Nonlinear vibration of a nanobeam elastically bonded with a piezoelectric nanobeam via strain gradient theory[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 100: 32-40.

[11] Ansari R, Oskouie M F, Gholami R, et al. Thermo-electro-mechanical vibration of postbuckled piezoelectric Timoshenko nanobeams based on the nonlocal elasticity theory [J]. Composites Part B: Engineering, 2016, 89: 316-327.

[12] Ke L L, Wang Y S. Thermo-electric-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory [J]. Smart Materials and Structures, 2012, 21(2): 025018.

[13] Ke L L, Wang Y S, Wang Z D. Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory [J]. Composite Structures, 2012, 94(6): 2038-2047.

[14] Jiang H, Wang C Y, Luo Y. Vibration of piezoelectric nanobeams with an internal residual stress and a nonlinear strain[J]. Physics Letters A, 2015, 379(40/41): 2631-2636.

[15] Zhou Z G, Wang B. The scattering of harmonic elastic anti-plane shear waves by a Griffith crack in a piezoelectric material plane by using the non-local theory [J]. International Journal of Engineering Science, 2002, 40(3): 303-317.

[16] Zhou Z G, Wu L Z, Du S Y. Non-local theory solution for a Mode I crack in piezoelectric materials [J]. European Journal of Mechanics, 2006, 25(5): 793-807.

[17] Quek S T, Wang Q. On dispersion relations in piezoelectric coupled-plate structures[J]. Smart Materials and Structures, 2000, 9(6): 859-867.

[18] Wang Q. On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers [J]. Engineering Structures, 2002, 24(2): 199-205.

[19] Lu P, Lee H P, Lu C, et al. Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model [J]. Journal of Applied Physics, 2006, 99(7): 073510.

[20] Tang H L, Li D K, Zhou S M. Vibration of horn-shaped carbon nanotube with attached mass via nonlocal elasticity theory [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2014, 56: 306-311.