doi:10.11887/j.cn.202101019　　http://journal.nudt.edu.cn

不确定失效阈值影响下考虑设备剩余寿命预测信息的最优替换策略*

王泽洲[1,2],陈云翔[1],蔡忠义[1],王莉莉[1],项华春[1]

(1. 空军工程大学 装备管理与无人机工程学院,陕西 西安　710051;
2. 中国人民解放军93920部队,陕西 汉中　723200)

摘　要:为了进一步提升设备维修决策的科学性,通过建立综合设备剩余寿命预测数据与不确定失效阈值的最优维修决策模型,实现了不可维修设备的最优替换策略。构建基于非线性Wiener过程的设备性能退化模型,并采用极大似然法估计退化模型参数;提出一种基于期望最大(Expectation Maximization, EM)算法的不确定失效阈值分布系数估计方法,通过引入虚拟失效阈值数据实现对失效阈值分布系数的同步迭代更新;基于首达时的概念推导出不确定失效阈值条件下设备剩余寿命的概率密度函数,并基于更新报酬理论建立维修决策模型,从而实现设备的最优维修决策。算例分析表明,设备的失效阈值会对维修决策结果产生重要影响,考虑设备失效阈值的不确定性既有助于提升剩余寿命预测的准确性,又可以有效降低设备的寿命周期费用。

关键词:维修决策;更新报酬理论;剩余寿命预测;不确定失效阈值;EM算法

中图分类号:TB114.3　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1001-2486(2021)01-145-10

Optimal replacement strategy considering equipment remaining useful lifetime prediction information under the influence of uncertain failure threshold

WANG Zezhou[1,2], *CHEN Yunxiang*[1], *CAI Zhongyi*[1], *WANG Lili*[1], *XIANG Huachun*[1]

(1. Equipment Management & UAV Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;
2. The PLA Unit 93920, Hanzhong 723200, China)

Abstract: To improve the scientificalness of equipment maintenance decision-making, an optimal replacement strategy of non-repairable equipment was realized by establishing the optimal maintenance decision model of integrated equipment RUL(remaining useful lifetime) prediction data and uncertain failure threshold. The nonlinear Wiener process was used to establish the degradation model of the equipment and the maximum likelihood estimation was used to determine the parameter estimation of the degradation model. A new estimation method for the distribution coefficient of uncertainty failure threshold based on the EM(expectation maximization) algorithm was proposed. By introducing the virtual failure threshold data, the synchronous iterative update of the distribution coefficient for failure threshold was realized. Based on the concept of the first hitting time, the RUL probability density function of equipment with considering the uncertain failure threshold was derived. The decision model was built on the basis of the renewal-reward theory to determine the optimal replacement occasion. The example analysis shows that the failure threshold of the equipment has an important impact on the result of the maintenance decision. This conclusion fully takes into consideration of the fact that the uncertainty of the equipment failure threshold can not only improve the accuracy of the RUL prediction but also can effectively reduce the life cycle cost of the equipment.

Keywords: maintenance decision; renewal-reward theory; remaining useful lifetime prediction; uncertain failure threshold; EM algorithm

随着科技的进步,航空、航天、核能等诸多高新技术领域得到快速发展,同时也对相关装备提出了更高的安全性要求。为了切实提升装备的可靠性,减少系统运营维护费用,预测与健康管理(Prognostics and Health Management, PHM)技术应运而生,并取得了良好效益[1-3]。PHM技术的核心是通过监测系统关键组成设备的性能退化数据来预测其剩余使用寿命,并提出相应的维修保障策略,从而提升装备运行的安全性与可靠性,降低故障或失效带来的风险。

传统的维修决策研究多基于随机过程描述设备的退化规律,进而依据设备的可靠性指标进行维修策略优化。Kallen等[4]采用Gamma过程描述设备的退化过程,并分析了检测周期与预防性

* **收稿日期:**2019-06-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(71901216);中国博士后科学基金资助项目(2017M623415)
作者简介:王泽洲(1992—),男,山西长治人,博士研究生,E-mail:350276267@qq.com;
蔡忠义(通信作者),男,讲师,博士,E-mail:afeuczy@163.com

维修阈值对失效风险和费用的影响。van der Weide 等[5]通过几何过程预测设备的退化趋势，并优化了设备的维修时间。Ho 等[6]则基于 Markov 过程构建设备性能退化状态转移方程，并以费用为目标函数建立优化模型，从而确定最优检测时间和维修时间。然而，上述研究对设备实际退化过程的描述并不完善，均是基于经验公式构建退化模型，而未能充分利用设备运行过程中的状态监测数据来进行退化建模，这将导致所建模型难以准确反映设备的真实退化规律，进而影响维修决策结果的科学性与合理性。

针对传统维修决策方法存在的不足，利用状态监测数据准确构建设备退化模型，并基于设备剩余寿命预测信息进行维修决策的方法开始逐步得到研究者的关注[7-9]。Guo 等[7]通过引入残余退化量描述维修活动对设备退化量的影响，并推导出对应的剩余寿命函数，进而通过建立优化模型确定最优预防性维护阈值。Zhang 等[8]通过引入改善因子描述维修活动对设备退化速率的影响，并以退化速率为对象分析了设备的最优维修策略。然而，文献[7]和文献[8]仅单独研究了退化速率或退化量对维修决策的影响，未能分析二者对维修决策的综合作用。为了进一步提升维修决策的科学性，裴洪等[9]在综合考虑维修活动对退化速率和退化量影响的基础上，基于设备的剩余寿命预测信息，构建了维修决策模型，从而确定了最优检测时间和预防性维护阈值，降低了设备的寿命周期费用。然而，文献[9]所提维修决策方法仅适用于可修复设备，难以满足不可修复设备制定最优维修策略的需求；且该方法在剩余寿命预测过程中认为设备性能退化失效阈值满足固定值假设，忽略了不确定失效阈值对剩余寿命预测的影响，这可能降低剩余寿命预测的准确性[10-12]，进而对制定科学合理的维修策略产生消极影响。此外，目前针对不确定失效阈值分布系数确定方法的研究尚不充分，文献[13]提出采用极大似然估计（Maximum Likelihood Estimation，MLE）对不确定失效阈值的分布系数进行估算，然而该方法在似然函数不存在解析形式时，仅能通过泰勒级数展开得到近似解，降低了参数估计的准确性，也对设备最优维修决策造成了不利影响。

针对上述问题，本文以不可修复设备为研究对象，开展了基于剩余寿命预测数据与不确定失效阈值的设备最优替换策略研究，主要创新点有：

1）基于期望最大（Expectation Maximization，EM）算法提出一种新型不确定失效阈值分布系数估计法，相较于传统 MLE 方法，能有效提升参数估计的准确性；

2）基于设备的剩余寿命预测数据，依据更新报酬理论建立维修决策模型，分析不确定失效阈值对最优替换时机的影响。

1 设备剩余寿命预测

1.1 退化建模

Wiener 过程可以准确描述具有非单调退化特征设备的退化规律，且具备良好的数学特性，现已被广泛应用于退化建模研究[14]。

理想状态下，Wiener 过程可表示为：

$$X(t)=X(0)+at+bB(t) \tag{1}$$

其中：$X(t)$表示设备在 t 时刻的性能退化量；a 为漂移系数；b 为扩散系数；$B(t)$表示标准布朗运动；$X(0)$表示初始时刻的性能退化量，通常认为 $X(0)=0$。

在实际运行过程中，受设备内外部应力影响以及非理想测量手段制约，通常难以准确描述设备的退化过程。为了解决该问题，现有研究多通过将非线性、个体差异以及测量误差融入退化建模过程，形成改进的 Wiener 退化模型，其具体表达式如式(2)所示。

$$Y(t)=a\gamma(t,\theta)+bB(t)+\varepsilon \tag{2}$$

其中：$a\sim \mathrm{N}(\mu_a,\sigma_a^2)$，以体现不同设备间的个体差异，$\mu_a$、$\sigma_a^2$ 分别表示漂移系数的均值和方差；$\gamma(t,\theta)$为以 θ 为参数的非线性函数，以体现退化过程的非线性；$\varepsilon\sim \mathrm{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$为误差项，用以表征非理想测量手段造成的影响，$\sigma_\varepsilon^2$ 为测量误差的方差。通常认为 a、$B(t)$与 ε 相互独立。

1.2 参数估计

1.2.1 退化模型参数估计

采用极大似然法对非线性退化模型中的未知参数 $\mu_a,\sigma_a^2,b,\theta,\sigma_\varepsilon^2$ 进行估计。假设有 N 个同类设备用以进行性能退化实验，而 $Y_i(t_{1,i})$，$Y_i(t_{2,i})$，…，$Y_i(t_{j,i})$，…，$Y_i(t_{m_i,i})$表示第 i 个设备在 $t_{1,i},t_{2,i},\cdots,t_{j,i},\cdots,t_{m_i,i}$时刻对应的 m_i 条性能退化监测数据。若令 $\Delta Y_i(t_{j,i})=Y_i(t_{j,i})-Y_i(t_{j-1,i})$，则 $\Delta\boldsymbol{Y}_i=[\Delta Y_i(t_{1,i}),\Delta Y_i(t_{2,i}),\cdots,\Delta Y_i(t_{j,i}),\cdots,\Delta Y_i(t_{m_i,i})]^{\mathrm{T}}$，由非线性 Wiener 过程的性质可知，$\Delta\boldsymbol{Y}_i$ 服从多元正态分布，其对应的期望与协方差矩阵分别为：

$$\begin{cases}E(\Delta\boldsymbol{Y}_i)=\mu_a\Delta\boldsymbol{T}_i\\ \boldsymbol{\Sigma}_i=\sigma_a^2\Delta\boldsymbol{T}_i\Delta\boldsymbol{T}_i'+\boldsymbol{\Omega}_i\end{cases} \tag{3}$$

其中:$\Delta \boldsymbol{T}_i = [\Delta T_{1,i}, \Delta T_{2,i}, \cdots, \Delta T_{j,i}]'$, $\Delta T_{j,i} = \gamma(t_{j,i},\theta) - \gamma(t_{j-1,i},\theta)$, $t_{0,i}=0$, $i=1,2,\cdots,N$, $j=1,2,\cdots,m_i$; $\boldsymbol{\Omega}_i = b^2\boldsymbol{D}_i + \sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{P}_i$, $\Delta t_{j,i} = t_{j,i} - t_{j-1,i}$, $\boldsymbol{D}_i = \mathrm{diag}(\Delta t_{1,i}, \Delta t_{2,i}, \cdots, \Delta t_{j,i})$,而 $\boldsymbol{P}_i$ 满足

$$\boldsymbol{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

令 $\boldsymbol{Y} = [\Delta \boldsymbol{Y}_1, \Delta \boldsymbol{Y}_2, \cdots, \Delta \boldsymbol{Y}_N]$,则 $\boldsymbol{Y}$ 表示全部性能退化监测数据,其对数似然函数可表示为:

$$\ln L(\boldsymbol{Y}) = -\frac{\ln(2\pi)}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\ln(|\boldsymbol{\Sigma}_i|) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i)'\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i) \tag{4}$$

为简化计算,需对式(4)进行适当变形。令 $\tilde{b}^2 = b^2/\sigma_a^2$, $\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_a^2$, $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i/\sigma_a^2$,则式(4)等价于:

$$\ln L(\boldsymbol{Y}) = -\frac{\ln(2\pi)}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i - \frac{1}{2}\ln\sigma_a^2\sum_{i=1}^{N} m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\ln(|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) - \frac{1}{2\sigma_a^2}\sum_{i=1}^{N}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i)'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i) \tag{5}$$

采用MLE对参数 μ_a、σ_a^2、b、θ、σ_ε^2 进行估计,首先可得似然函数 $\ln L(\boldsymbol{Y})$ 关于 μ_a 和 σ_a^2 的偏导数分别为:

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{Y})}{\partial \mu_a} = \frac{1}{\sigma_a^2}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{T}_i'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{T}_i'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}\boldsymbol{T}_i\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{Y})}{\partial \sigma_a^2} = -\frac{1}{2\sigma_a^2}\sum_{i=1}^{N} m_i + \frac{1}{2(\sigma_a^2)^2}\sum_{i=1}^{N}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i)'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i) \tag{7}$$

令式(6)、式(7)等于零,可得 μ_a 和 σ_a^2 的极大似然估计值为:

$$\hat{\mu}_a = \frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{T}_i'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}\Delta \boldsymbol{Y}_i}{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{T}_i'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}\boldsymbol{T}_i} \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i)'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1}(\Delta \boldsymbol{Y}_i - \mu_a \boldsymbol{T}_i)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{9}$$

易知,$\hat{\mu}_a$ 与 $\hat{\sigma}_a^2$ 中仍含有隐含变量 $\tilde{b}^2$、θ、$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$,为求解 $\tilde{b}^2$、θ、$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ 的估计值,将式(8)和式(9)代入式(5)可得:

$$\ln L(\boldsymbol{Y}) = -\frac{1 + \ln(2\pi) + \ln\hat{\sigma}_a^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\ln(|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) \tag{10}$$

最大化式(10)即可得到 $\tilde{b}^2$、θ、$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ 的极大似然估计值。将 $\tilde{b}^2$、θ、$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ 的估计值分别代入式(8)和式(9),即可得到 μ_a 和 σ_a^2 的估计值。

1.2.2　不确定失效阈值分布系数估计

在真实使用环境下,同类设备不同个体间往往存在差异性,这种个体差异在退化过程中多体现为设备退化速率(漂移系数 a)的随机性,而在失效过程中则体现为失效阈值 ω 的不确定性。例如,弹簧的伸缩极限、铣刀的磨损上限、风机的振动阈值等,不同个体间失效阈值相似但不完全相等,难以采用一个固定值进行明确,因而多采用具有不确定性的区间值进行描述。为了科学分析失效阈值的不确定性,现有研究多采用随机变量来描述设备的不确定失效阈值,其中正态随机变量成了当前的研究热点[11-12]。

在设备的实际退化过程中,易知设备性能退化的失效阈值应大于设备失效前一时刻的性能退化量 $X(t^*)$, $0 < t^* < T$,其中 T 代表设备的寿命,即设备从完好到失效所经历的全部时间。退化过程的随机性导致 $X(t^*)$ 具有不确定性,因此,工程实践中多基于经验给出一个不小于零的常数 κ,使得设备性能退化的失效阈值 ω 大于等于 κ。为使传统正态分布失效阈值满足上述约束,本文采用截断正态分布来描述不确定失效阈值,具体定义如下:

若不确定失效阈值 ω 满足 $\mathrm{N}(\mu_\omega, \sigma_\omega^2)$,且 $\omega \geqslant \kappa$,则称不确定失效阈值 ω 服从截断正态分布,且其对应的截断区间为 $[\kappa, +\infty)$,记为 $\omega \sim \mathrm{N}(\mu_\omega, \sigma_\omega^2 | [\kappa, +\infty))$。而 ω 对应的概率密度函数(Probability Density Function, PDF)可表示为:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\omega^2}\left[1 - \Phi\left(\frac{\kappa - \mu_\omega}{\sigma_\omega}\right)\right]}\exp\left[-\frac{(\omega - \mu_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}\right] \tag{11}$$

其中:$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数。

由于 $\Phi(\cdot)$ 不存在解析表达式,难以采用传统 MLE 法来对其进行参数估计,为此,本文提出一种基于 EM 算法的不确定失效阈值分布系数估计方法。EM 算法针对缺失/隐含数据情形下的参数估计具有良好效果,因此适用于估算截断正态分布的参数估计值。

假设存在$\hat{\boldsymbol{\omega}}=[\omega_1',\omega_2',\cdots,\omega_R',\omega_1'',\omega_2'',\cdots,\omega_S'']$来自正态分布总体$\mathrm{N}(\mu_\omega,\sigma_\omega^2)$，存在$\kappa\geqslant 0$，使得$\boldsymbol{\omega}'=[\omega_1',\omega_2',\cdots,\omega_R']$，且$\boldsymbol{\omega}'$中各元素均小于$\kappa$，则$\boldsymbol{\omega}'\sim\mathrm{N}(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|(-\infty,\kappa))$；$\boldsymbol{\omega}''=[\omega_1'',\omega_2'',\cdots,\omega_S'']$，且$\boldsymbol{\omega}''$中各元素均大于等于$\kappa$，则$\boldsymbol{\omega}''\sim\mathrm{N}(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|[\kappa,+\infty))$。基于上述分析，则可采用$\boldsymbol{\omega}''$表示$S$个样本的真实失效阈值数据，采用$\boldsymbol{\omega}'$表示未观测到的虚拟失效阈值数据，进而可得$\hat{\boldsymbol{\omega}}$的完全轮廓似然函数为：

$$\ln L(\omega|\hat{\boldsymbol{\omega}})=-\frac{R+S}{2}\ln(2\pi\sigma_\omega^2)-\sum_{i=1}^{R}\frac{(\omega_i'-\mu_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}-\sum_{i=1}^{S}\frac{(\omega_i''-\mu_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2} \tag{12}$$

令$\mu_{\omega,j}$与$\sigma_{\omega,j}^2$表示EM算法第j次迭代的估算结果，则第$j+1$次迭代过程可分解为E步和M步。

E步：对式(12)求虚拟失效阈值$\boldsymbol{\omega}'$的期望，可得

$$\begin{aligned}W(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)&=E_{\boldsymbol{\omega}'}(\ln L(\omega|\hat{\boldsymbol{\omega}}))=\\&-\frac{R+S}{2}\ln(2\pi\sigma_\omega^2)-\sum_{i=1}^{S}\frac{(\omega_i''-\mu_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}-\\&\sum_{i=1}^{R}\frac{[E(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)-\mu_\omega]^2}{2\sigma_\omega^2}-\\&\sum_{i=1}^{R}\frac{VAR(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)}{2\sigma_\omega^2}\end{aligned} \tag{13}$$

由截断正态分布的性质可知，对于任意ω_i'均满足：

$$E(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)=E(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)=\mu_{\omega,j}-\frac{\sigma_{\omega,j}\exp[-(\kappa-\mu_{\omega,j})^2/(2\sigma_{\omega,j}^2)]}{\sqrt{2\pi}\Phi[(\kappa-\mu_{\omega,j})/\sigma_{\omega,j}]} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}VAR(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)&=VAR(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)=\\&\sigma_{\omega,j}^2\left(1-\frac{\mu_{\omega,j}\exp[-(\kappa-\mu_{\omega,j})^2/(2\sigma_{\omega,j}^2)]}{\sqrt{2\pi}\Phi[(\kappa-\mu_{\omega,j})/\sigma_{\omega,j}]}-\frac{\exp[2(\kappa-\mu_{\omega,j})^2/(2\sigma_{\omega,j}^2)]}{2\pi\{\Phi[(\kappa-\mu_{\omega,j})/\sigma_{\omega,j}]\}^2}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

M步：求$W(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)$最大值，则

$$(\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)=\arg\max_{\mu_\omega,\sigma_\omega^2}W(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2) \tag{16}$$

对$W(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)$取关于$\mu_\omega$和$\sigma_\omega^2$的偏导，可得

$$\frac{\partial W(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)}{\partial\mu_\omega}=\frac{1}{\sigma_\omega^2}\sum_{i=1}^{S}\omega_i''+\frac{1}{\sigma_\omega^2}\sum_{i=1}^{R}E(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)-\frac{1}{\sigma_\omega^2}\sum_{i=1}^{S+R}\mu_\omega \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(\mu_\omega,\sigma_\omega^2|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)}{\partial\sigma_\omega^2}&=-\frac{R+S}{2\sigma_\omega^2}+\\&\sum_{i=1}^{S}\frac{(\omega_i''-\mu_\omega)^2}{2(\sigma_\omega^2)^2}+\sum_{i=1}^{R}\frac{VAR(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)}{2(\sigma_\omega^2)^2}+\\&\sum_{i=1}^{R}\frac{[E(\omega_i'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)-\mu_\omega]^2}{2(\sigma_\omega^2)^2}\end{aligned} \tag{18}$$

令式(17)、式(18)等于零，可得

$$\mu_{\omega,j+1}=\frac{\sum_{i=1}^{S}\omega_i''+RE(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)}{S+R} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega,j+1}^2=&\frac{R}{R+S}[E(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)-\mu_{\omega,j+1}]^2+\\&\frac{1}{R+S}\sum_{i=1}^{S}(\omega_i''-\mu_{\omega,j+1})^2+\\&\frac{R}{R+S}\cdot VAR(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)\end{aligned} \tag{20}$$

由于R未知，因此还需计算$E(R)$。文献[15]给出了$E(R)$的计算方法，如式(21)所示。

$$E(R)=\frac{S\Phi[(\kappa-\mu_\omega)/\sigma_\omega]}{1-\Phi[(\kappa-\mu_\omega)/\sigma_\omega]} \tag{21}$$

将式(21)代入式(19)、式(20)即可得到M步的迭代公式：

$$\mu_{\omega,j+1}=\frac{\sum_{i=1}^{S}\omega_i''+R_jE(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)}{S+R_j} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega,j+1}^2=&\frac{R_j}{R_j+S}[E(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)-\mu_{\omega,j+1}]^2+\\&\frac{1}{R_j+S}\sum_{i=1}^{S}(\omega_i''-\mu_{\omega,j+1})^2+\\&\frac{R_j}{R_j+S}\cdot VAR(\boldsymbol{\omega}'|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)\end{aligned} \tag{23}$$

其中：

$$R_j=E(R|\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)=\frac{S\Phi[(\kappa-\mu_{\omega,j})/\sigma_{\omega,j}]}{1-\Phi[(\kappa-\mu_{\omega,j})/\sigma_{\omega,j}]} \tag{24}$$

将EM算法的E步和M步不断迭代，直至$\|(\mu_{\omega,j+1},\sigma_{\omega,j+1}^2)-(\mu_{\omega,j},\sigma_{\omega,j}^2)\|$小于预先设定的阈值，即可得到不确定失效阈值$\omega$分布系数的估计值$(\hat{\mu}_\omega,\hat{\sigma}_\omega^2)$。

1.3 剩余寿命分布推导

设备的寿命通常被定义为性能退化量首次达到失效阈值的时间，也被称为首达时间(First Hitting Time，FHT)。基于上述定义，设备的寿命可表示为：

$$T=\inf\{t:X(t)\geqslant\omega|X(0)<\omega\} \tag{25}$$

对于式(2)所描述的退化模型，在不考虑测量误差ε的前提下，可证明其寿命T近似服从逆

高斯分布,对应的概率分布如式(26)所示[14]。

$$f_T(t)\approx\exp\left[-\frac{(\omega-a\gamma(t,\theta))^2}{2b^2t}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3b^2}}\left(\omega-a\gamma(t,\theta)+at\frac{\mathrm{d}\gamma(t,\theta)}{\mathrm{d}t}\right)\tag{26}$$

进一步可推导出 t_k 时刻设备剩余寿命 l_k 概率分布如式(27)所示。具体证明过程详见文献[16]。

$$f_{L_k|\omega,X_{1:k}}(l_k|\omega,\boldsymbol{X}_{1:k})\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2l_k^3}}(\omega-x_k-a\beta(l_k))\cdot\exp\left(-\frac{(\omega-x_k-a\psi(l_k))^2}{2b^2l_k}\right)\tag{27}$$

其中:x_k 表示 t_k 时刻目标设备所对应的真实性能退化数据;$\boldsymbol{X}_{1:k}$ 则表示直至 t_k 时刻所获取的全部真实性能退化数据;

$$\psi(l_k)=\gamma(t_k+l_k,\theta)-\gamma(t_k,\theta)\tag{28}$$

$$\beta(l_k)=\psi(l_k)-l_k\frac{\mathrm{d}\psi(l_k)}{\mathrm{d}l_k}\tag{29}$$

若令 y_k 表示 t_k 时刻目标设备所对应的性能退化数据监测值,假设考虑测量误差 ε,则易知 $x_k=y_k-\varepsilon$,进而可得 $x_k\sim\mathrm{N}(y_k,\sigma_\varepsilon^2)$。为推导考虑测量误差时设备剩余寿命的 PDF,给出引理 1。

引理 1　若 $D_1\sim\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$,$D_2\sim\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$,且 D_1 与 D_2 相互独立,又 $\omega,E,F\in\mathbf{R}$,$G\in\mathbf{R}^+$,则

$$E_{D_1}\left\{E_{D_2}\left[(\omega-D_1-ED_2)\exp\left(-\frac{(\omega-D_1-FD_2)^2}{2G}\right)\right]\right\}=\sqrt{\frac{G}{F^2\sigma_2^2+\sigma_1^2+G}}\exp\left(-\frac{(\omega-\mu_1-F\mu_2)^2}{2(F^2\sigma_2^2+\sigma_1^2+G)}\right)\cdot\left[\omega-\mu_1-E\mu_2-\frac{\omega-\mu_1-F\mu_2}{F^2\sigma_2^2+\sigma_1^2+G}(F\sigma_2^2+\sigma_1^2)\right]\tag{30}$$

引理 1 的证明过程详见文献[16]。

则基于全概率公式,可得:

$$f_{L_k|\omega,Y_{1:k}}(l_k|\omega,\boldsymbol{Y}_{1:k})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{L_k|\omega,a,X_{1:k}}(l_k|\omega,a,\boldsymbol{X}_{1:k})\cdot P(\boldsymbol{X}_{1:k}|\boldsymbol{Y}_{1:k})P(a|\boldsymbol{Y}_{1:k})\mathrm{d}x_k\mathrm{d}a=E_a\{E_{x_k}[f_{L_k|\omega,a,X_{1:k}}(l_k|\omega,a,\boldsymbol{X}_{1:k})]\}\tag{31}$$

其中:$\boldsymbol{Y}_{1:k}$ 表示直至 t_k 时刻所获取的全部性能退化数据监测值;$P(\cdot)$ 为求概率。

令 $x_k=D_1$,$a=D_2$,$E=\beta(l_k)$,$F=\psi(l_k)$,$G=b^2l_k$,利用引理 1,则可求出固定失效阈值条件下设备剩余寿命的 PDF 为:

$$f_{L_k|\omega,Y_{1:k}}(l_k|\omega,\boldsymbol{Y}_{1:k})\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi l_k^2(\psi^2(l_k)\sigma_a^2+b^2l_k+\sigma_\varepsilon^2)}}\cdot\exp\left[-\frac{(\omega-y_k-\mu_a\psi(l_k))^2}{2(\psi^2(l_k)\sigma_a^2+b^2l_k+\sigma_\varepsilon^2)}\right]\cdot\left[\omega-y_k-\mu_a\beta(l_k)-\frac{\omega-y_k-\mu_a\psi(l_k)}{\psi^2(l_k)\sigma_a^2+b^2l_k+\sigma_\varepsilon^2}(\psi(l_k)\sigma_a^2+\sigma_\varepsilon^2)\right]\tag{32}$$

为了推导考虑不确定失效阈值条件下设备剩余寿命的 PDF,本文给出如下定理 1。

定理 1　若 $D\sim\mathrm{TN}(\mu,\sigma^2)$,$E,F\in\mathbf{R}$,$G\in\mathbf{R}^+$,则

$$E_D\left[(D-E)\exp\left(-\frac{(D-F)^2}{2G}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\Phi(\mu/\sigma)}\exp\left(-\frac{(\mu-F)^2}{2(G+\sigma^2)}\right)\cdot\left[\frac{G\sigma^2}{G+\sigma^2}\exp\left(-\frac{(F\sigma^2+G\mu)^2}{2(G+\sigma^2)G\sigma^2}\right)+\sqrt{\frac{2\pi G\sigma^2}{G+\sigma^2}}\left(\frac{F\sigma^2+G\mu}{G+\sigma^2}-E\right)\Phi\left(\frac{F\sigma^2+G\mu}{\sqrt{(G+\sigma^2)G\sigma^2}}\right)\right]\tag{33}$$

定理 1 的证明过程可由文献[16]中引理 1 的证明经变形得到,这里不再进行单独推导。

基于全概率公式,若 $\boldsymbol{Y}_{1:k}$ 已知,则考虑不确定失效阈值条件下设备的剩余寿命可表示为:

$$f_{L_k|Y_{1:k}}(l_k|\boldsymbol{Y}_{1:k})=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{L_k|\omega,Y_{1:k}}(l_k|\omega,\boldsymbol{Y}_{1:k})p(\omega)\mathrm{d}\omega=E_\omega[f_{L_k|\omega,Y_{1:k}}(l_k|\omega,\boldsymbol{Y}_{1:k})]\tag{34}$$

若令 $\omega=D$,$H_4=E$,$H_2=F$,$H_1=G$,将其代入式(33),可得设备剩余寿命的 PDF 为:

$$f_{L_k|Y_{1:k}}(l_k|\boldsymbol{Y}_{1:k})\approx\frac{H_3}{2\pi H_1\Phi(\mu_\omega/\sigma_\omega)l_k}\exp\left(-\frac{(\mu_\omega-H_2)^2}{2(H_1+\sigma_\omega^2)}\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{H_1\sigma_\omega^2}}{H_1+\sigma_\omega^2}\exp\left(-\frac{(H_2\sigma_\omega^2+H_1\mu_\omega)^2}{2(H_1+\sigma_\omega^2)H_1\sigma_\omega^2}\right)+\sqrt{\frac{2\pi}{H_1+\sigma_\omega^2}}\left(\frac{H_2\sigma_\omega^2+H_1\mu_\omega}{H_1+\sigma_\omega^2}-H_4\right)\cdot\Phi\left(\frac{H_2\sigma_\omega^2+H_1\mu_\omega}{\sqrt{(H_1+\sigma_\omega^2)H_1\sigma_\omega^2}}\right)\right]\tag{35}$$

其中:

$$H_1=\psi^2(l_k)\sigma_a^2+b^2l_k+\sigma_\varepsilon^2\tag{36}$$

$$H_2=y_k+\mu_a\psi(l_k)\tag{37}$$

$$H_3=\psi^2(l_k)\sigma_a^2+b^2l_k-\psi(l_k)\sigma_a^2\tag{38}$$

$$H_4=\frac{H_1}{H_3}(y_k+\mu_a\beta(l_k))-\frac{H_2}{H_3}(\psi(l_k)\sigma_a^2+\sigma_\varepsilon^2)\tag{39}$$

基于上述分析,可得考虑不确定失效阈值条件下设备剩余寿命的累积分布函数为:

$$F_{L_k|Y_{1:k}}(l_k|\boldsymbol{Y}_{1:k})=\int_0^{l_k}f_{L_k|Y_{1:k}}(l|\boldsymbol{Y}_{1:k})\mathrm{d}l\tag{40}$$

2 最优替换策略决策模型

基于更新报酬理论[17]建立决策模型，进而确定最优替换时间。具体决策模型可表示为：

$$\min C(\tau)=\frac{E_{\mathrm{C}}}{E_{\mathrm{T}}} \tag{41}$$

其中，$C(\tau)$表示τ时刻进行替换操作对应的期望寿命周期费用率，E_{C}表示设备运行寿命周期总费用的期望，E_{T}表示设备运行总时间的期望。进一步分析可得：

$$E_{\mathrm{C}}=c_1P(t>\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})+c_2P(t<\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k}) \tag{42}$$

$$E_{\mathrm{T}}=t_k+\int_0^{\tau-t_k}lf(l)\mathrm{d}l+(\tau-t_k)P(t>\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k}) \tag{43}$$

其中：c_1表示预防性替换的费用，c_2表示失效性替换的费用，t_k为设备当前运行时间，τ为替换时刻，$f(l)$为变量l的函数且$l=\tau-t_k$。

基于 Wiener 过程的性质，易知$l_k=\tau-t_k$，则$f(l)$等价于第 1.3 小节中设备剩余寿命的概率密度函数$f_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})$，进一步分析可知$P(t<\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})$等价于$F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})$。进而可将替换策略决策模型改写为：

$$\min C(l_k)=\frac{c_1+(c_2-c_1)F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})}{t_k+l_k-\int_0^{l_k}F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\mathrm{d}l} \tag{44}$$

具体证明过程如下：

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{C}}&=c_1P(t>\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})+c_2P(t<\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\\&=c_1[1-P(t<\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})]+c_2P(t<\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\\&=c_1+(c_2-c_1)P(t<\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\\&=c_1+(c_2-c_1)F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{T}}&=t_k+(\tau-t_k)P(t>\tau-t_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})+\int_0^{\tau-t_k}lf(l)\mathrm{d}l\\&=t_k+l_k[1-F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})]+\int_0^{\tau-t_k}l_k\mathrm{d}F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\\&=t_k+l_k[1-F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})]+lF_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\big|_0^{l_k}+\\&\quad\int_0^{l_k}F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\mathrm{d}l\\&=t_k+l_k[1-F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})]+l_kF_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l_k\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})-\\&\quad\int_0^{l_k}F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\mathrm{d}l\\&=t_k+l_k-\int_0^{l_k}F_{L_k|\boldsymbol{Y}_{1:k}}(l\,|\,\boldsymbol{Y}_{1:k})\mathrm{d}l\end{aligned} \tag{46}$$

由式(45)除以式(46)即可证明式(44)。

通过求解式(44)即可得到设备的最优替换时机。

3 算例分析

3.1 仿真退化数据分析

基于蒙特卡洛方法，以 0.1 h 为步长，仿真得到 6 个设备的退化数据。其中非线性函数为$\gamma(t,\theta)=t^{\theta}$，仿真参数满足$\mu_a=3$，$\sigma_a^2=0.000\,4$，$b^2=0.1$，$\theta=1.5$，$\sigma_\varepsilon^2=0.001$，$\mu_\omega=3.16$，$\sigma_\omega^2=0.20$。具体仿真退化轨迹如图 1 所示。

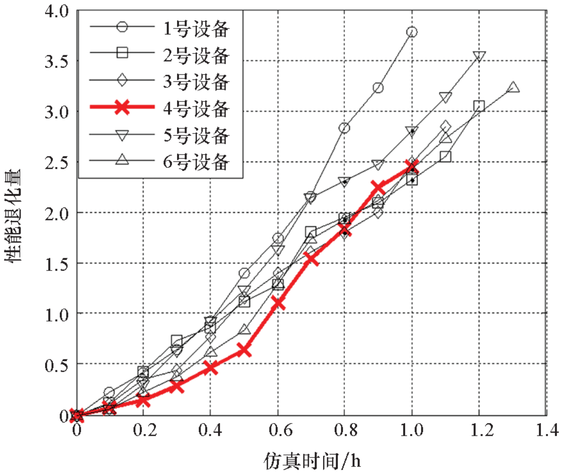


图 1 仿真退化轨迹

Fig. 1 Simulation of degradation path

基于上述仿真退化数据，采用本文第 1.2.1 小节中提出的 MLE 参数估算法，可得退化模型的参数估计值为$\hat{\mu}_a=3.533\,6$，$\sigma_a^2=0.216\,1$，$\hat{b}^2=8.559\,4\times10^{-5}$，$\hat{\theta}=1.405\,3$，$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=0.009\,7$。

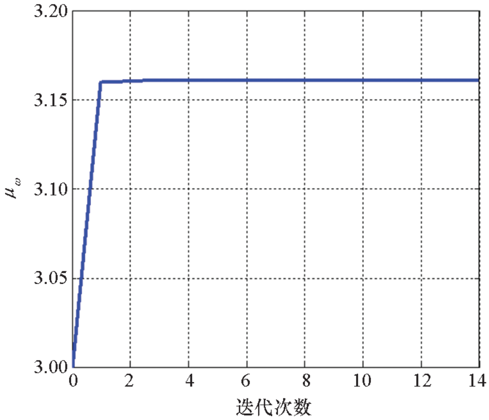
设备的失效阈值一般被定义为设备发生失效时的性能退化量，由此可知 1～6 号设备对应的失效阈值数据分别为 3.77，3.05，2.84，2.45，3.54，3.22。假设设备的失效阈值具有不确定性且满足非负约束，则基于本文第 1.2.2 小节提出的 EM 参数估计法，设初值$\mu_{\omega,0}=3$，$\sigma_{\omega,0}^2=0.1$，$\kappa=0$，迭代终止阈值为10^{-5}，迭代过程如图 2 所示，参数估计结果如表 1 所示。

为了验证前文所提基于 EM 算法的不确定失效阈值分布系数估计法较传统 MLE 方法更具优势，本文引入均方误差（Mean Squared Error，MSE）作为判别标准进行分析。MSE 的定义式为：

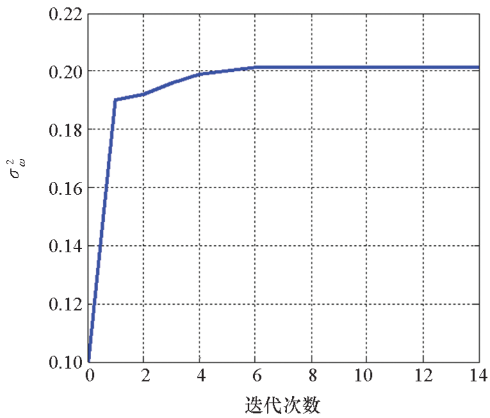
$$MSE=\frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\rho}(\Theta_k-\hat{\Theta}_k)^2 \tag{47}$$

其中：Θ_k表示第k个参数的真实值，$\hat{\Theta}_k$表示第k个参数的估计值，ρ表示参数个数。

为了进一步消除仿真结果的随机性，在原有仿真参数的基础上，再分别仿真出 30 组、300 组



(a) μ_ω



(b) σ_ω^2

图 2　EM 算法估计结果

Fig. 2　Estimation results of EM algorithm

退化数据,对应得到 30 个、300 个仿真退化失效阈值数据,并采用 EM 与 MLE 方法分别进行参数估计,得到参数估计结果如表 1 所示。

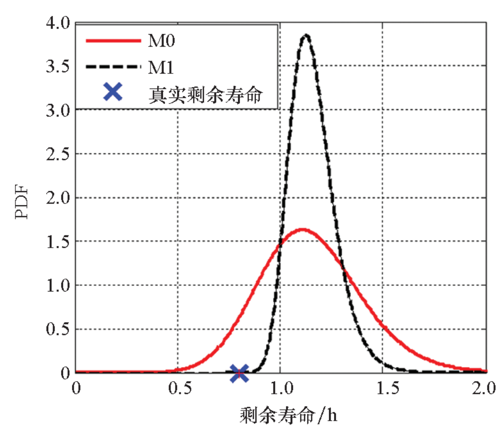
表 1　不确定失效阈值分布参数估计

Tab. 1　Estimation of uncertain failure threshold distribution parameters

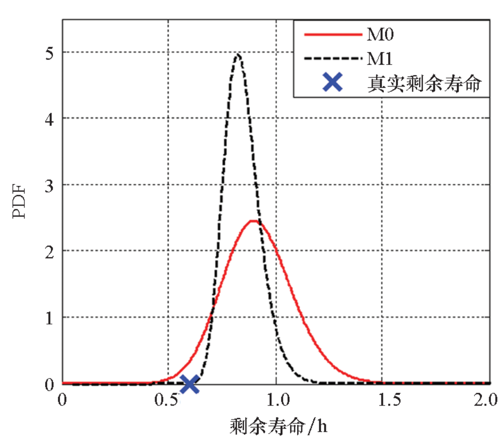
方法		μ_ω	σ_ω^2	MSE
仿真		3.16	0.20	
MLE	6 组	3.145 0	0.227 4	4.48×10^{-4}
	30 组	3.151 3	0.216 5	1.74×10^{-4}
	300 组	3.158 8	0.202 3	3.37×10^{-6}
EM	6 组	3.161 3	0.202 4	3.73×10^{-6}
	30 组	3.161 5	0.202 1	3.33×10^{-6}
	300 组	3.161 3	0.197 8	3.27×10^{-6}

表 1 中 MLE 对应的失效阈值分布系数估计值由 MATLAB 软件中 normfit 命令求出。由表 1 可知,同等仿真数据量条件下,EM 算法对应的参数估计值较 MLE 方法更贴近于实际仿真参数,且 MSE 值更小,表明 EM 算法具有更高的估计准确性。进一步分析可以发现,MLE 方法对仿真数据量较为敏感,随着仿真数据量的增多,MLE 方法的参数估计值逐步接近于真实值,且对应 MSE 值逐步减小;而 EM 算法对仿真数据量变化的稳定性更好,随着仿真数据的增多,EM 算法估计结果波动较小,参数估计误差变化不明显。基于上述分析可以证明,在中、小样本条件下,EM 算法的准确性要明显优于传统的 MLE 方法。而在工程实际中,退化数据往往具有小样本特性,进一步说明了 EM 算法具有较高的工程应用价值。

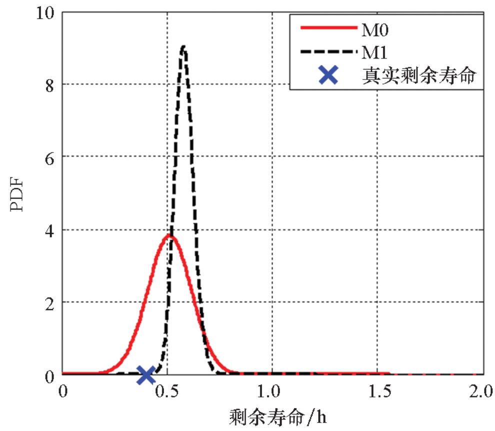
为了进一步分析失效阈值的不确定性对设备剩余寿命预测与维修决策的影响,选取 4 号设备为目标设备进行研究(目标设备寿命为 1 h,失效阈值为 2.45)。为便于描述,记考虑不确定失效阈值的最优替换策略模型为 M0,考虑固定失效阈值的最优替换策略模型为 M1。则针对 M0 与 M1 模型,不同状态监测时刻(0.2 h、0.4 h、0.6 h、0.8 h)对应剩余寿命预测情况如图 3 所示。



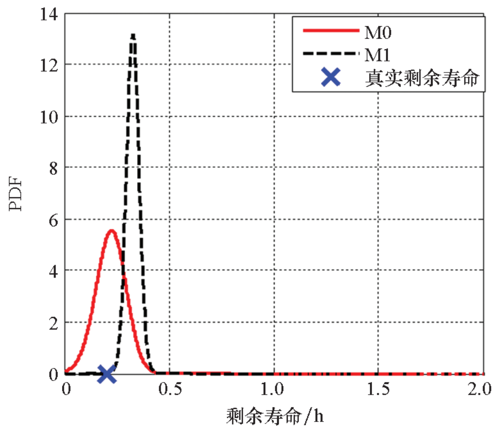
(a) $t_k=0.2$ h



(b) $t_k=0.4$ h



(c) $t_k = 0.6$ h



(d) $t_k = 0.8$ h

图 3　剩余寿命预测

Fig. 3　Remaining useful lifetime prediction

由图 3 可知，在不同状态监测时刻，M0 对应的剩余寿命 PDF 均可以包含设备的真实剩余寿命，而 M1 对应的 PDF 均无法包含设备的真实剩余寿命，表明 M0 较 M1 的剩余寿命预测准确性更高，体现了在剩余寿命预测过程中考虑不确定失效阈值的必要性。若假设 $c_1 = 55$ 元、$c_2 = 95$ 元，结合上述分析得到的剩余寿命预测数据，将其代入式(44)，即可确定最优替换时机，具体结果如图 4 所示。

由图 4 可知，M1 模型的最优替换时机为 $\tau = 0.7$ h，对应的最小期望寿命周期费用率为 8.538 元/h；M0 模型的最优替换时机为 $\tau = 0.8$ h，对应的最小期望寿命周期费用率为 7.655 元/h。由此可以说明，在确定设备最优替换策略的过程中，考虑不确定失效阈值将有助于延长设备的运行时间，减少维修保障的费用消耗。

3.2　真实退化数据分析

基于 NASA 公开数据源中的铣刀退化数据进行分析(如图 5 所示)[18]。铣刀是典型的不

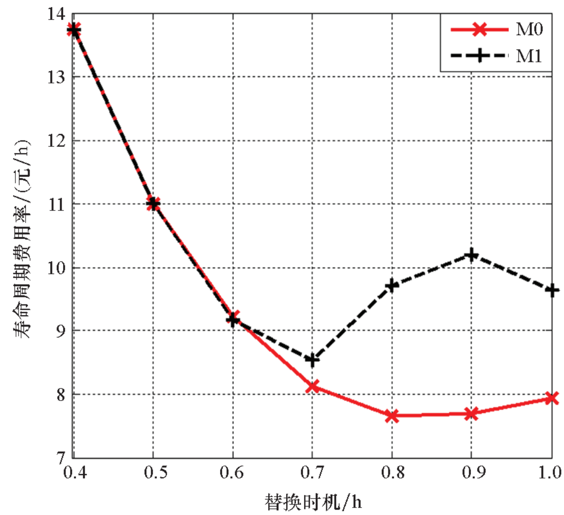


图 4　M0、M1 对应的最优替换策略

Fig. 4　Optimal replacement strategy under M0 and M1

可修复组件，当铣刀的磨损量超过一定阈值时，铣刀发生失效。为避免铣刀失效造成的产品不合格问题与生产安全问题，需要实时监测其退化状态，并适时采取更换策略，确保生产的安全性与经济性。

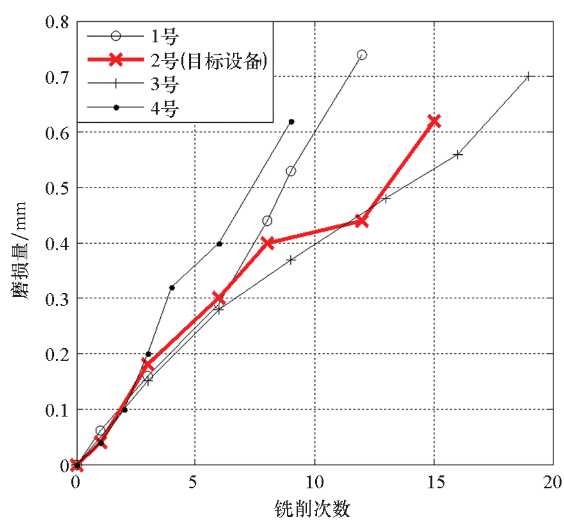


图 5　铣刀退化数据

Fig. 5　Milling degradation data

本文选择 2 号铣刀作为目标设备，可知其寿命为 15 次，失效阈值为 0.62 mm。基于本文第 1.2 小节提出的参数估计法，得到铣刀退化模型的参数估计值为 $\hat{\mu}_a = 0.056\ 51$，$\sigma_a^2 = 1.121\ 0 \times 10^{-4}$，$\hat{b}^2 = 1.161\ 6 \times 10^{-4}$，$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 4.447\ 1 \times 10^{-4}$，$\hat{\theta} = 0.955\ 2$；不确定失效阈值分布系数的估计值分别为 $\hat{\mu}_\omega = 0.668\ 9$，$\hat{\sigma}_\omega^2 = 1.165\ 4 \times 10^{-4}$(初值 $\mu_{\omega,0} = 0.5$，$\sigma_{\omega,0}^2 = 0.01$，$\kappa = 0$；迭代终止阈值为 10^{-6})。

假设铣刀预防性替换费用为 $c_1 = 10$ 元，失效性替换费用为 $c_2 = 100$ 元，且当前目标铣刀已完成了 5 次铣削操作。基于本文第 2 节建立的最优维修决策模型，可得目标铣刀的最优替换时机，详见图 6。

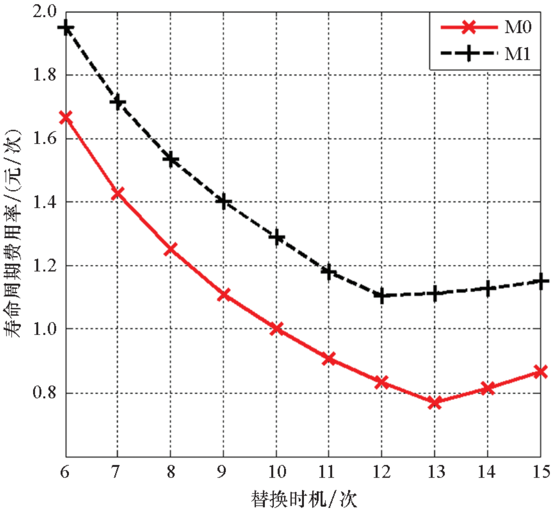


图 6　铣刀最优替换策略

Fig. 6　Optimal replacement strategy of milling

由图 6 可知：M0 求解得到的铣刀最优替换时机为第 13 次，对应寿命周期费用率为 0.769 2 元/次；而 M1 得到的铣刀最优替换时机为第 12 次，对应寿命周期费用率为 1.106 3 元/次。由此可知，本文所提最优维修决策方法能够延长铣刀的可靠使用寿命并降低其寿命周期费用消耗。该结论与仿真结果相一致，进一步说明了本文所提方法的优越性。

4　结论

通过研究，建立了基于剩余寿命预测数据与不确定失效阈值的维修决策优化模型，确定了不可维修设备的最优替换时机。主要结论有：

1）设备失效阈值的不确定性真实存在，在设备剩余寿命预测研究中考虑不确定失效阈值具有合理性，能够有效提升设备剩余寿命预测的准确性。

2）针对不确定失效阈值分布系数的估计问题，EM 算法较 MLE 算法在中、小样本条件下适用性更强且准确性更高，更能满足工程应用要求。

3）基于剩余寿命预测数据与不确定失效阈值的维修决策模型可以实现设备的最优替换策略。同不考虑不确定失效阈值的决策结果相比，考虑不确定失效阈值的可靠使用寿命显著延长，设备寿命周期费用率明显降低。

在研究中，不确定失效阈值分布下限值 κ 多基于工程经验人为给定，这可能引入主观误差，不利于实现科学决策。因此，未来应着重针对 κ 的估计方法展开研究，以进一步提升维修决策的准确性。

参考文献（References）

[1] PECHT M G, KANG M. Prognostics and health management of electronics: fundamentals, machine learning, and the Internet of Things [M]. Piscataway: Wiley-IEEE Press, 2018.

[2] COMPARE M, BELLANI L, ZIO E. Reliability model of a component equipped with PHM capabilities[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 168(12): 4-11.

[3] ZIO E, COMPARE M. Evaluating maintenance policies by quantitative modeling and analysis [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 109(1): 53-65.

[4] KAlIEN M J, VAN NOORTWIJK J M. Optimal maintenance decisions under imperfect inspection [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2005, 90(2/3): 177-185.

[5] VAN DER WEIDE J A M, PANDEY M D. Stochastic analysis of shock process and modeling of condition-based maintenance[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2011, 96(6): 619-626.

[6] HO L L, QUININO R C. Integrating on-line process control and imperfect corrective maintenance: an economical design[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 222(2): 253-262.

[7] GUO C M, WANG W B, GUO B, et al. A maintenance optimization model for mission-oriented systems based on Wiener degradation [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 111: 183-194.

[8] ZHANG M M, GAUDOIN O, XIE M. Degradation-based maintenance decision using stochastic filtering for systems under imperfect maintenance [J]. European Journal of Operational Research, 2015, 245(2): 531-541.

[9] 裴洪，胡昌华，司小胜，等．不完美维护下基于剩余寿命预测信息的设备维护决策模型[J]．自动化学报，2018，44(4)：719-729.
PEI Hong, HU Changhua, SI Xiaosheng, et al. Remaining life prediction information-based maintenance decision model for equipment under imperfect maintenance[J]. Acta Automatica Sinica, 2018, 44(4): 719-729. (in Chinese)

[10] WANG P, COIT D W. Reliability and degradation modeling with random or uncertain failure threshold[C]// Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2007: 392-397.

[11] JIANG R. A multivariate CBM model with a random and time-dependent failure threshold [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 119: 178-185.

[12] HUANG J B, KONG D J, CUI L R. Bayesian reliability assessment and degradation modeling with calibrations and random failure threshold[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong

University, 2016, 21(4): 478 – 483.

[13] 王泽洲, 陈云翔, 蔡忠义, 等. 考虑随机失效阈值的设备剩余寿命在线预测[J]. 系统工程与电子技术, 2019, 41(5): 1162 – 1168.
WANG Zezhou, CHEN Yunxiang, CAI Zhongyi, et al. Real-time prediction of remaining useful lifetime for equipment with random failure threshold [J]. Systems Engineering and Electronic, 2019, 41(5): 1162 – 1168. (in Chinese)

[14] SI X S, WANG W B, HU C H, et al. Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(1): 50 – 67.

[15] NG H K T, CHAN P S, BALAKRISHNAN N. Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2002, 39(4): 371 – 386.

[16] TANG S J, YU C Q, WANG X, et al. Remaining useful life prediction of lithium-ion batteries based on the Wiener process with measurement error [J]. Energies, 2014, 7(2): 520 – 547.

[17] SI X S, WANG W B, CHEN M Y, et al. A degradation path-dependent approach for remaining useful life estimation with an exact and closed-form solution[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 226(1): 53 – 66.

[18] WEI M H, CHEN M Y, ZHOU D H. Multi-sensor information based remaining useful life prediction with anticipated performance [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2013, 62(1): 183 – 198.