

频域加权 LQR 控制器改进设计*

李欣^{1,2}, 张进秋¹

(1. 陆军装甲兵学院 车辆工程系, 北京 100072; 2. 中国人民解放军 92578 部队, 北京 100161)

摘要:基于线性二次型调节器 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 控制方法, 设计一种频域加权 LQR 控制器; 通过对其常用滤波器进行改进, 提出一种新型滤波器设计思路。当振源频率低于执行器下限响应频率, 导致执行器输出减小时, 通过改变滤波器参数, 增大低频部分权重及控制力, 可提高低于执行器响应下限频段的控制性能。仿真结果表明, 频域加权的方法可以提升 LQR 控制器在特定频域下的控制性能; 基于新型滤波器的改进频域加权 LQR 控制器与未改进前相比, 下限响应频率之外的控制性能得到进一步提升。

关键词:频域加权; LQR 控制器; 下限响应频率; 低频

中图分类号: O328 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2021)02-019-06

Improved design of frequency weighted LQR controller

LI Xin^{1,2}, ZHANG Jinqiu¹

(1. Vehicle Engineering Department, Army Academy of Armored Forces, Beijing 100072, China;

2. The PLA Unit 92578, Beijing 100161, China)

Abstract: Based on the LQR (linear quadratic regulator) control method, a frequency domain weighted LQR controller was designed. By improving the commonly used filters, a new filter design idea was proposed. When the vibration source frequency is lower than the lower limit response frequency of the actuator and the actuator produces a reduced output, the control performance of the frequency band lower than the lower limit of the actuator response is improved by changing the filter parameters, increasing the weight and control force of the low-frequency part. The simulation results show that the frequency domain weighting method can improve the control performance of the LQR controller in a specific frequency domain, and the control performance of the improved frequency domain weighted LQR controller based on the new filter is further improved beyond the lower limit response frequency.

Keywords: frequency domain weighting; LQR controller; lower limit response frequency; low frequency

在船舶隔振领域, 为了抑制设备振动向船体传递, 通常在设备与船体间安装各种类型的隔振装置, 以降低振源传递到船体或其他隔振对象的振动^[1-2]。这些传统隔振装置对于高频振动的隔离效果较好, 但对低频段振动的抑制作用有限, 而且船舶隔振普遍存在低频部分振动量级较大的问题。

振动主动控制技术可以使隔振系统较好地适应外界激励的变化, 而且对低频振动抑制效果显著^[3-4], 是当前振动控制领域的研究重点。振动主动控制的实现方法有多种^[5-6], 其中, 基于线性二次型调节器 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 的方法是较为成熟的振动主动控制方法之一^[7],

该方法通过对某些性能指标进行加权的方式, 达到对某个特定频段的振动进行重点控制的目的^[8]。黄兴惠等^[9]在车辆悬架系统中采用了 LQR 方法, 针对人体较为敏感频率范围内的振动实施了控制, 取得了较好效果。王楠等^[8]以卫星隔振平台为研究对象, 设计了一种频域加权 LQR 控制器, 通过对某些振动量级较大的频段进行加权, 降低了卫星在该频段内的振动, 且在其他频段没有恶化。受上述研究启发, 本文在频域加权 LQR 控制器基础上, 通过对 LQR 控制器滤波器的改进, 提出了一种新型滤波器设计方法, 其通过增大低频部分权重来增加低频控制力, 进而提高振动控制效果。

* 收稿日期: 2019-10-29

作者简介: 李欣 (1980—), 女, 河北秦皇岛人, 博士研究生, E-mail: lixin20170606@163.com;

张进秋 (通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: zhangjq_63@163.com

1 隔振系统数学模型

基于电磁式准零刚度隔振器设计一个单层隔振系统,主动控制力作用于被隔振质量及基础之间,该隔振系统集中参数模型如图 1 所示。其中,电磁式准零刚度隔振器的刚度可以随着电流的变化而改变。

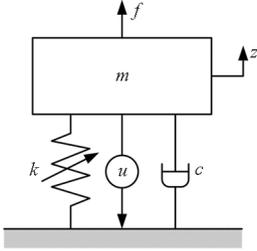


图 1 隔振系统集中参数模型
Fig. 1 Lumped parameter model of vibration isolation system

1.1 标准 LQR 控制器设计

根据力学原理,模型运动微分方程为:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = f - u \quad (1)$$

式中: z 为垂向振动位移; m 为系统总质量; c 为系统阻尼系数; k 为准零刚度隔振器线圈通电后的系统刚度; u 为执行器产生的控制力; f 为作用在系统上的扰动力。

选取状态变量为 $\mathbf{X}(t) = [z(t) \quad \dot{z}(t)]^T$, 将方程(1)改写为状态方程形式:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{C}\mathbf{F} \quad (2)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

为了利用较低的成本,即较小的控制力 u ,使原系统达到较好的性能指标,即受扰后的状态变量 $\mathbf{X}(t)$ 变化尽可能小,于是以控制力和状态变量的二次型函数的积分作为性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) dt \quad (3)$$

式中, \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 均为权矩阵,这里 $\mathbf{Q} = \alpha \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$,

$\mathbf{R} = \beta [1]$ (α, β 是可调系数)。最优控制的目标就是求解最优控制力 \mathbf{U} ,使其性能指标达到最小。

设控制力增益为 \mathbf{K}_c ,则根据标准 LQR 控制器设计原则,最优控制力为如下形式^[7]:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K}_c \mathbf{X} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{X} \quad (4)$$

式中, \mathbf{P} 为如下 Riccati 方程的解:

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5)$$

1.2 频域加权 LQR 控制器设计

根据 Parseval 定理^[10],将性能指标(3)改写为频域内的指标:

$$\hat{J} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{X}^*(j\omega) \mathbf{Q}(j\omega) \mathbf{X}(j\omega) + \mathbf{U}^*(j\omega) \mathbf{R}(j\omega) \mathbf{U}(j\omega)] d\omega \quad (6)$$

频域内加权相当于修改了对应频率下的状态变量权重。设定频域内的权系数矩阵和状态变量为如下形式:

$$\mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{W}^*(j\omega) \mathbf{W}(j\omega) \quad (7)$$

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{W}(j\omega) \mathbf{X} \quad (8)$$

利用直接分解法,方程(8)可写成状态方程形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_f = \mathbf{A}_f \mathbf{Z}_f + \mathbf{B}_f \mathbf{X} \\ \mathbf{X}_f = \mathbf{D}_f \mathbf{Z}_f \end{cases} \quad (9)$$

其中, \mathbf{A}_f 、 \mathbf{B}_f 和 \mathbf{D}_f 是状态方程的系数矩阵。

对于新增状态变量 \mathbf{Z}_f ,可将其与原状态变量 \mathbf{X} 组合得到增广系统状态变量 $\bar{\mathbf{X}} = [\mathbf{X} \quad \mathbf{Z}_f]^T$ 。增广系统状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{F} \\ \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{X}} \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{A}_f & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}$,

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{D}_f \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}_f \end{bmatrix}.$$

将方程(7)和方程(8)代入方程(6),得到如下形式:

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{X}_f^*(j\omega) \mathbf{X}_f(j\omega) + \mathbf{U}^*(j\omega) \mathbf{R}(j\omega) \mathbf{U}(j\omega)] d\omega \quad (11)$$

结合方程(6)和方程(11)并根据 Parseval 定理可得增广系统时域内的性能指标为:

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) dt \quad (12)$$

式中, $\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{R}} = 2\mathbf{R}$ 。

从上述推导过程可以看出,频域加权的实质是将原有的状态方程扩充为新的增广系统状态方程,矩阵的维度发生了变化。这一变化作用在特定的频域上,从而达到对特定频域控制性能改善的目的。基于改变后的增广系统状态方程,再次采用 LQR 求解最优控制力的方法离线求解新的增广系统状态方程下的最优控制力,方法和形式与方程(4)和方程(5)相同,不再赘述。

1.3 滤波器设计

方程(8)中的滤波器通常采用具有式(13)所示形式的带通滤波器。

$$G(s) = \frac{p\xi\omega_0 s}{s^2 + \xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (13)$$

式中: ω_0 为中心频率; ξ 为决定带宽的因子; p 为设计常数。

将标准的时域 LQR 控制器转换到频域,通过改变特定频率下的权重,可以改善对应频率下的振动控制效果。但是,当振源频率低于执行器的下限响应频率时,频域加权控制器由于没有覆盖边界外的频率,导致执行器输出力减小,控制效果变差。此时通过改变滤波器结构,可以达到增大低频部分权重,从而产生类似执行器输出补偿的效果,即增加执行器低频输出力性能。

本文对照高通、低通和带通滤波器结构,在原有频域加权滤波器的基础上进行了改进设计,通过引入待定参数,设计了一种新型滤波器,只需根据一定条件确定表达式中的待定参数,即可让改进后的滤波器在作用于特定频率的带通滤波器和作用于低频的低通滤波器之间转换。改进后的滤波器传递函数为:

$$G(s) = \frac{(2-p)\xi\omega_0 s + (500p + \omega_0)^2}{s^2 + (p + \xi)\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (14)$$

式中,参数 $p=0$ 或者 $p=2$ 。当振源频率大于执行器下限响应频率时, $p=0$,此时设计的滤波器与通常的滤波器效果相同;当振源频率小于执行器下限频率时, $p=2$,此时设计的滤波器增大了低频部分权重。

2 数值仿真分析

现采用如图 1 所示的隔振系统模型仿真验证上述各种情况下的振动控制效果。假设执行器的频率下限为 0.5 Hz,仿真分析过程中的选取参数见表 1。

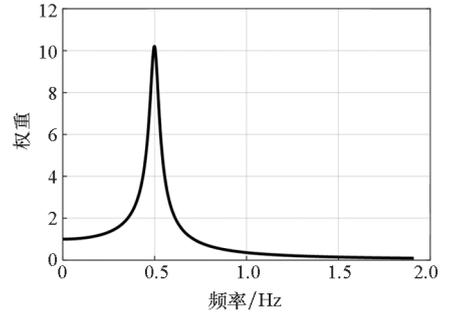
表 1 仿真参数设置

Tab. 1 Simulation parameter setting

参数	值	参数	值
m/kg	75	ξ	0.1
$c/(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$	10	p	0 或 2
$k/(\text{N}/\text{m})$	7 000	α	1
$\omega_0/(\text{rad}/\text{s})$	π	β	0.001

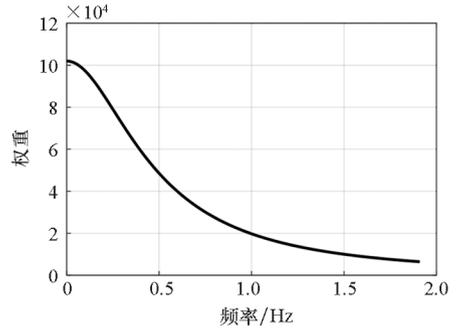
2.1 滤波器对比

当参数 p 改变时,设计的滤波器可以在类似带通的滤波器和针对低频隔振执行器输出补偿的滤波器之间切换。切换前后滤波器的幅频特性如图 2 所示。



(a) 切换前滤波器幅频特性

(a) Amplitude frequency characteristics of filter before switching



(b) 切换后滤波器幅频特性

(b) Amplitude frequency characteristics of filter after switching

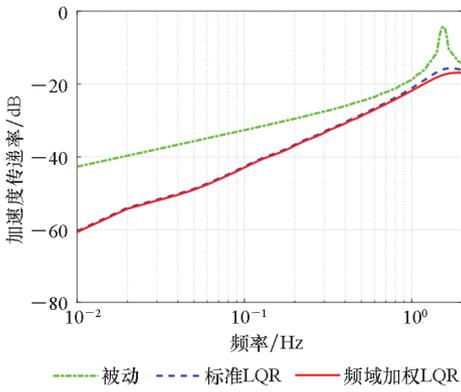
图 2 滤波器幅频特性对比

Fig. 2 Comparison of filter amplitude frequency characteristics

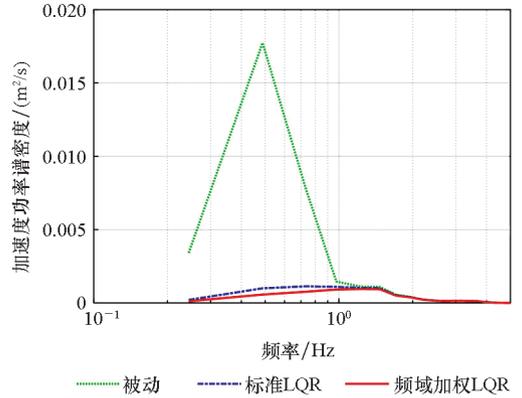
从图 2 看出,切换前设计的滤波器幅频特性与带通滤波器幅频特性类似,0.5 Hz 附近权重最大;切换后的滤波器幅频特性表现为类似低通滤波器的特性,且低频部分整体权重均有所增加。这样的设计可以在执行器响应下限频率被突破后,显著增大相应的控制力,进而产生类似输出补偿的效果。

2.2 频域加权控制效果

当振源频率大于执行器下限频率时,参数 $p=0$,此时滤波器可以看成带通滤波器。这时对采用带通滤波器构造的 LQR 控制器进行研究,并将其性能与标准 LQR 控制器进行对比,以分析频域加权的影响。仿真结果如图 3 所示。



(a) 加速度传递率
(a) Acceleration transfer rate



(e) 加速度功率谱密度
(e) Acceleration power spectral density

图 3 频域加权后的控制效果

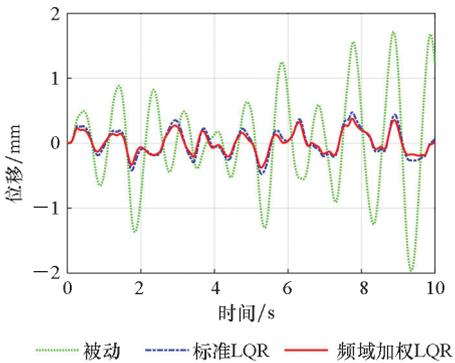
Fig. 3 Effect of frequency-shaping control

从图 3 可以看出,频域加权后的 LQR 控制器性能更好。具体来看,被隔振物体位移(图 3(b))、加速度(图 3(c))以及加速度功率谱密度(图 3(e))结果中,重构后的时域 LQR 控制器相比标准 LQR 控制器,幅值均有所减小。通过图 3(d)可以看出,实现这一效果的原因是增大了控制力,即重构后的 LQR 控制器相比标准的 LQR 控制器权重系数发生了改变,使控制力增大,从而得到较好的控制效果。量化后的加速度均方根值结果见表 2。

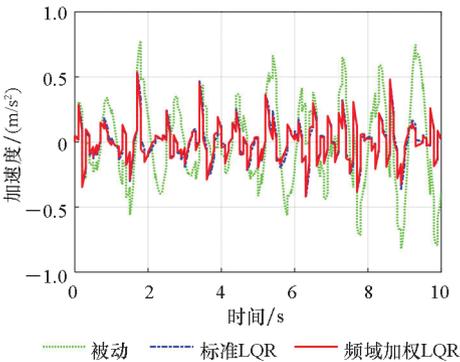
表 2 频域加权控制下加速度均方根值对比

Tab. 2 Comparison of root mean square value of acceleration under frequency domain weighted control

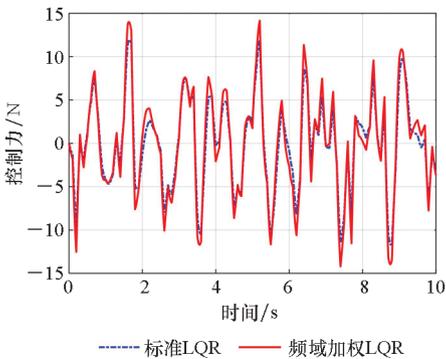
类型	被动	标准 LQR	频域加权 LQR
数值/(m/s ²)	0.329 2	0.148 1	0.126 3
降幅/%		55.01	61.63



(b) 振幅位移
(b) Amplitude displacement



(c) 加速度幅值
(c) Acceleration amplitude

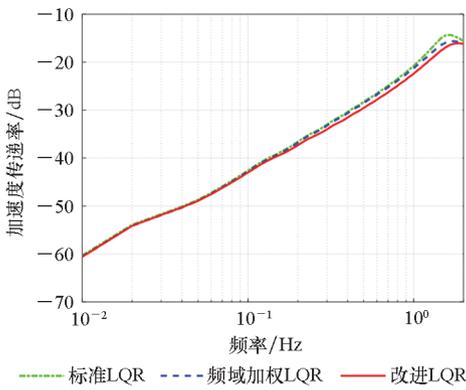


(d) 控制力
(d) Control force

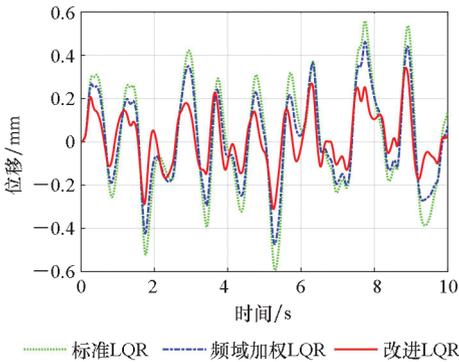
2.3 低频补偿控制效果

当振源频率小于执行器下限频率时, $p = 2$, 此时滤波器切换为类似的低通滤波器, 低频部分权重显著增加。对切换后的 LQR 控制器进行研究, 将其性能与切换前 LQR 控制器进行对比, 以分析改进后的 LQR 控制器性能。仿真结果如图 4 所示。

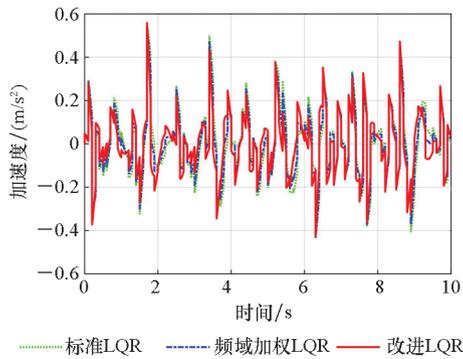
从图 4 可以看出, 滤波器切换后的 LQR 控制器相比标准 LQR 控制器以及切换前的 LQR 控制器性能更好。承载质量位移(图 4(b))、加速度(图 4(c))和加速度功率谱密度(图 4(e))结果中, 滤波器切换后的 LQR 控制器各项性能幅值均



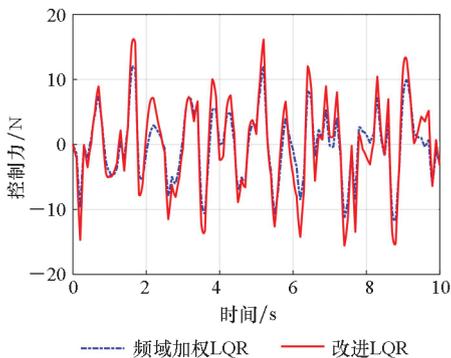
(a) 加速度传递率
(a) Acceleration transfer rate



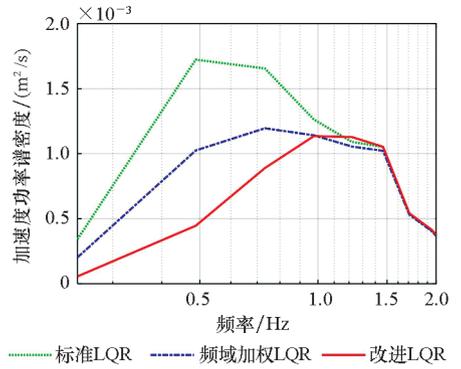
(b) 振幅位移
(b) Amplitude displacement



(c) 加速度幅值
(c) Acceleration amplitude



(d) 控制力
(d) Control force



(e) 加速度功率谱密度
(e) Acceleration power spectral density

图4 滤波器切换后的控制效果
Fig.4 Effect of filter switching

有所减小。进一步通过图4(d)看出,上述效果的实现原因同样是增大了控制力,即滤波器切换后的LQR控制器相比滤波器切换前的LQR控制器权重系数发生了改变,控制力进一步增大,从而得到更好的控制效果。量化的加速度均方根值结果见表3。

表3 低频补偿控制下加速度均方根值对比
Tab.3 Comparison of root mean square value of acceleration under the improved frequency domain weighted control with a new filter

类型	标准 LQR	频域加权 LQR	改进 LQR
数值/(m/s ²)	0.162 2	0.149 6	0.141 4
降幅/%		7.77	12.82

3 结论

在频域加权 LQR 控制器的基础上,对其常用滤波器进行了改进设计,提出了一种基于新型滤波器的频域加权 LQR 控制器,该滤波器可根据振源频率切换滤波器类型,以达到提高低频振动控制效果的目的。在此基础上,通过数值仿真得出结论如下:

1) 频域加权通过构造新的系统状态方程并调整权重系数从而改变控制器性能。频域加权得到一个增广系统,其状态变量的权重系数改变可以提高 LQR 控制器性能。

2) 通过构造新的滤波器,增大了低频部分权重,进一步增大了控制力,进而提高了执行器下限响应频率之外的控制性能。

参考文献 (References)

[1] 李欣一,翁雪涛,柴凯. 一种新型隔振器的设计与分

- 析[J]. 振动与冲击, 2020, 39(5): 222 - 226.
- LI Xinyi, WENG Xuetao, CHAI Kai. Design and analysis of a new type vibration isolator[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(5): 222 - 226. (in Chinese)
- [2] 方媛媛, 左言言, 邵广申, 等. 船舶设备半主动单层隔振系统传递特性分析[J]. 振动、测试与诊断, 2019, 39(3): 571 - 576.
- FANG Yuanyuan, ZUO Yanyan, SHAO Guangshen, et al. Vibration transmission analysis of a semi-active one-stage isolation system for marine equipment [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2019, 39(3): 571 - 576. (in Chinese)
- [3] 陈纠, 蔡龙奇, 刘佳, 等. 泵类设备主动浮筏隔振技术研究[J]. 核动力工程, 2019, 40(2): 49 - 52.
- CHEN Jiu, CAI Longqi, LIU Jia, et al. Research on active floating raft of pumps[J]. Nuclear Power Engineering, 2019, 40(2): 49 - 52. (in Chinese)
- [4] 杨铁军, 靳国永, 李玩幽, 等. 舰船动力装置振动主动控制技术[J]. 舰船科学技术, 2006, 28(增刊2): 46 - 52.
- YANG Tiejun, JIN Guoyong, LI Wanyou, et al. Study on active control techniques for warship power plant [J]. Ship Science and Technology, 2006, 28(Suppl. 2): 46 - 52. (in Chinese)
- [5] OWENS D H. A historical view of multivariable frequency domain control [J]. IFAC Proceedings Volumes, 2002, 35(1): 225 - 230.
- [6] 许伟, 高远. 基于遗传算法的汽车主动悬架 LQR 控制研究[J]. 计算机与数字工程, 2019, 47(9): 2212 - 2216.
- XU Wei, GAO Yuan. LQR control for automotive active suspension based on genetic algorithm [J]. Computer & Digital Engineering, 2019, 47(9): 2212 - 2216. (in Chinese)
- [7] 谷高全, 张璟. 基于 LQR 控制算法的双层混合隔振系统优化设计[J]. 海军工程大学学报, 2016, 28(4): 75 - 77.
- GU Gaoquan, ZHANG Jing. Optimization of double-layer hybrid vibration isolation system based on LQR algorithm[J]. Journal of Naval University of Engineering, 2016, 28(4): 75 - 77. (in Chinese)
- [8] 王楷, 潘忠文, 陈照波. 磁流变整星隔振平台频域加权 LQR 控制研究 [J]. 力学与实践, 2018, 40(2): 173 - 179.
- WANG Lei, PAN Zhongwen, CHEN Zhaobo. Frequency-shaping LQR control of whole-spacecraft vibration isolation platform based on MR damper [J]. Mechanics in Engineering, 2018, 40(2): 173 - 179. (in Chinese)
- [9] 黄兴惠, 金达锋, 赵六奇. 基于频域加权性能指标和输出反馈的主动悬架控制策略研究[J]. 汽车工程, 1998, 20(6): 321 - 326.
- HUANG Xinghui, JIN Dafeng, ZHAO Liuqi. A study on active suspension control algorithm based on frequency-shaping performance index and output feedback [J]. Automotive Engineering, 1998, 20(6): 321 - 326. (in Chinese)
- [10] YUN H, CHANG H J, SHIM H, et al. A preliminary result on frequency-shaped model predictive control [C]// Proceedings of 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2015: 2395 - 2399.