

加权随机模拟的时变可靠性分析方法*

袁修开, 郑振轩, 罗冬秀

(厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005)

摘要:针对结构时变可靠性的随机模拟分析方法计算代价大的问题,在极值方法的基础上提出基于加权随机模拟的时变可靠性分析策略。时变可靠性分析需要计算在不同时间处的失效概率,通常需要进行多次可靠性分析,计算代价巨大。所提方法通过对常规静态可靠性的随机模拟方法进行改进拓展,运用加权策略分别发展了加权蒙特卡洛法和加权重要抽样法,使之能够高效分析计算时变可靠性问题。所提方法仅需一次常规可靠性分析模拟,即可得到时变失效概率函数估计。采用管状悬臂梁和十杆桁架两个算例进行验证。结果表明,基于加权思想的分析方法在能确保精度的前提下能够大幅度减小计算量,提高计算效率。

关键词:时变可靠性;加权方法;随机模拟;重要抽样;蒙特卡洛

中图分类号:TB114.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2021)02-125-07

Weighted stochastic simulation for time-variant reliability analysis

YUAN Xiukai, ZHENG Zhenxuan, LUO Dongxiu

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In order to solve the problem of high cost of structural time-variant reliability analysis, a time-variant reliability analysis strategy based on weighted stochastic simulation was proposed. Time-variant reliability analysis needs to calculate the failure probability of structure with respect to different times, which often requires multiple reliability analyses, involving high calculation cost. The proposed method improves and expands the conventional stochastic simulation method which is used to analyze the static reliability problem. The weighted Monte Carlo method and weighted importance sampling method respectively are developed respectively by using the weighting strategy to efficiently analyze and calculate the time-variant reliability problem. The proposed methods require only one conventional reliability analysis simulation to obtain the estimator of time-variant failure probability function. Two examples, a tubular cantilever beam and a ten-bar truss, are used for verification. Results show that the weighted methods can greatly ease the computational burden and improve the computational efficiency while ensuring the precision.

Keywords: time-variant reliability; weighted approach; stochastic simulation; importance sampling; Monte Carlo

在工程系统的可靠性分析中,时变不确定性广泛存在,如材料强度会随着工作时间发生变化。因此,系统性能的极限状态函数是一个复杂的随机过程。关于时变可靠性分析问题的研究早在20世纪40年代就开始进行了,目前的时变可靠性研究方法主要可归纳为三大类,分别为跨越率法^[1-7]、极值方法^[8-16]以及复合极限状态函数求解法^[17-21]等。

跨越率法是在20世纪40年代Rice提出了首次超越概率计算公式^[1]。之后,Coleman给出了关于首次超越概率的可靠性分析方法^[2]。Crandall又将数值模拟的方法引入跨越率法计算之中^[3]。在近几年,Hu和Du提出了一种联合跨越率的方法求解时变可靠性问题^[4]。Andrieu-

Renaud等基于跨越率法提出一种计算方法,即PHI2方法^[5]。Sudret在PHI2方法的基础上,给出了PHI2方法的近似表达式来求解跨越率^[6]。由于在实际工程中一般只能得知不确定性参数的区间范围,故张德权等提出了关于区间的PHI2方法^[7]。但跨越率法依赖于穿越过程假设,这会带来精度上的误差。

极值方法主要分为两种,一种是将随机过程近似为极值分布^[8-10],即对随机过程在一段时间内的极大值进行统计,获取极大值的统计参数,之后再运用静态可靠性分析方法对其进行求解。如贡金鑫等^[8]提出考虑抗力变化的结构可靠度分析方法,其将随机过程近似为极值I型分布,推导出关于时变可靠性的近似表达式。王新刚等^[9]

* 收稿日期:2019-07-03

基金项目:国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助项目(U1530122);航空科学基金资助项目(ASFC-201709680002);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(20720180072)

作者简介:袁修开(1981—),湖北黄石人,男,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:xiukaiyuan@xmu.edu.cn

同样也是采用将随机过程近似为极值 I 型分布进行求解。黄新萍等^[10]基于贡金鑫的方法对非线性结构进行了时变可靠性分析。Li 等^[11-12]同样也是通过将随机过程转化为极值问题来对时变可靠性进行求解。Hu 和 Du^[13]提出一种通过统计随机过程的极值分布规律,得出极值的分布参数,从而将时变可靠性问题转化为静态可靠性问题进行求解。近年来,有另外一种关于极值的方法是建立代理模型^[14-16]。通过建立输入随机变量(随机过程)与输出响应极大值之间的代理模型来对时变可靠性进行求解。如 Zhang 等^[16]通过将随机过程离散成随机变量,计算出结构响应并且取其极大值,建立起输入参数和响应极大值之间的代理模型,最后通过一次二阶矩进行计算。

复合极限状态函数求解法^[17-22]是首先将随机过程离散化^[20],之后再运用时变可靠性中的瞬时失效概率和串联系统可靠性将时变可靠性问题转为静态可靠性问题求解。Zissimos 等^[17-18]通过运用全概率定理和复合极限状态的概念,针对输入随机变量和输入随机过程的时变可靠性分析,提出了一种新的可靠性分析方法。Li 等^[22]将单响应的时变可靠性通过复合极限状态函数法转化为多响应的静态可靠性分析,再运用 GSS (generalized subset simulation) 方法计算得到累积失效概率,最后再通过插值的方法得到累积失效概率曲线。

本文在极值方法的基础上,结合加权思想^[23-25],提出基于加权思想的时变可靠性分析方法,分别为加权蒙特卡洛 (Weighted Monte Carlo Simulation, WMCS) 算法和加权重要抽样 (Weighted Importance Sampling, WIS) 算法,所提方法通过一次可靠性分析即可将时变失效概率表达成样本的函数形式,从而大大提高时变可靠性分析效率。通过算例分析,将其结果与直接蒙特卡洛仿真的真实值对比来验证基于加权思想的可靠性分析方法的准确性和高效性。

1 时变可靠性分析模型

在机械结构的可靠性分析中,依据应力-强度理论,时变机械结构响应 $Z(t)$ 的功能函数(亦称为极限状态函数) $g(\cdot)$, 形式可定义为:

$$Z(t) = g(R, Q(t), G) \quad (1)$$

其中: G 是固定载荷或随机载荷; $Q(t)$ 是可变载荷的随机过程,为时间 t 的函数; R 是机械结构的抗力值,本文中假设其为随机变量。在设计基准期 T 内的累积失效概率可以表示为:

$$P_F(T) = \{g(R, Q(t), G) \leq 0, \exists t \in [0, T]\} \quad (2)$$

其中, \exists 表示“至少存在一个”。

时变可靠性的极值方法是通过时间离散后,采用极值分布来将随机过程等效为随机变量,从而将时变问题转化成静态可靠性问题。以 $Q(t)$ 转化为例,首先将设计基准期 T 分为 m 个时段,每个时段为 $\delta = T/m$,则将 $Q(t)$ 离散为 m 个参数为 α_δ 和 μ_δ 的极值 I 型分布随机变量 $Q_i (i = 1, \dots, m)$, 然后求解 Q_i 的极值, $Q_T = \max(Q_i)$, 其对应的分布参数为:

$$\begin{cases} \alpha_T = \alpha_\delta \\ \mu_T = \mu_\delta + \frac{\ln m}{\alpha_\delta} \end{cases} \quad (3)$$

则式(2)的时变累积失效概率可转化为:

$$P_F(T) = \{g(R, Q_T, G) \leq 0\} \quad (4)$$

更进一步,任意时间段 $[0, t]$ 下的时变累积失效概率函数为:

$$P_F(t) = \{g(R, Q_t, G) \leq 0\} \quad (5)$$

其中, Q_t 为 $[0, t]$ 上 Q_i 的极值。可看出式(4)中的 $P_F(T)$ 为 $t = T$ 时的累积失效概率。若要求解不同时间段内的失效概率,即失效概率与时间的函数关系,则一般需重复多次进行可靠性分析。

本文提出基于加权思想的时变可靠性分析方法。该方法通过一次常规可靠性分析模拟,将时变失效概率函数表达成样本的加权函数形式,即可高效得到不同时段内的时变可靠性结果。

2 基于加权思想的可靠性分析方法

本文将采用加权思想,结合蒙特卡洛法和重要抽样法提出加权蒙特卡洛法和加权重要抽样法高效求解时变可靠性问题,所提方法的优势在于仅需一次可靠性分析。

2.1 加权蒙特卡洛法

加权思想期望用一次可靠性分析来推断不同时间段的失效概率,从而避免重复进行可靠性分析。

首先,构造一个基本随机变量 $\mathbf{x} = [R, Q_t, G]$ 的“辅助概率密度函数” $f(\mathbf{x} | t_0)$, 其对应某一时刻 t_0 变量的分布。式(5)的时变累积失效概率函数可转化为:

$$\begin{aligned} P_F(t) &= \int I_F(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} | t) d\mathbf{x} \\ &= \int I_F(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x} | t)}{f(\mathbf{x} | t_0)} f(\mathbf{x} | t_0) d\mathbf{x} \\ &= E_{t_0} [I_F(\mathbf{x}) r_{\text{MCS}}(\mathbf{x}, t, t_0)] \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $I_F(\cdot)$ 为系统失效的指数函数; $f(\mathbf{x} | t)$ 为对

应任意 $t \in [0, T]$ 时刻的变量分布; r_{MCS} 为“权重因子”, 为概率密度函数的比值, 即

$$r_{MCS}(\mathbf{x}, t, t_0) = \frac{f(\mathbf{x}|t)}{f(\mathbf{x}|t_0)} \quad (7)$$

通过式(6)可以看出 t 时刻的失效概率可以表示为该时刻权重因子在概率密度函数 $f(\mathbf{x}|t_0)$ 的期望形式, 时变失效概率的无偏估计可以表示为:

$$\hat{P}_F(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_F(\mathbf{x}^{(j)}) \frac{f(\mathbf{x}^{(j)}|t)}{f(\mathbf{x}^{(j)}|t_0)} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{x}^{(j)}$ 为采用 $f(\mathbf{x}|t_0)$ 抽取的样本。进一步地, 可得到失效概率函数估计的方差:

$$D[\hat{P}_F(t)] = \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{I_F(\mathbf{x}^{(j)}) f(\mathbf{x}^{(j)}|t)}{f(\mathbf{x}^{(j)}|t_0)} - \hat{P}_F(t) \right]^2 \right\} \quad (9)$$

由于式(8)中对于不同的时间 t 用的是同一组随机样本 $\mathbf{x}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) (来自 $f(\mathbf{x}|t_0)$) 和相同的指示函数 $I_F(\mathbf{x}^{(j)})$, 因此无须重新调用功能函数。在估计过程中, 需要重复计算的仅是各时刻下的权重系数, 而权重系数只是概率密度函数的比值, 并不需要结构系统的分析, 无须太大的计算代价, 因此所提方法可以大大减小时变可靠性分析的工作量, 提高计算效率。

前面提到 $f(\mathbf{x}|t_0)$ 是辅助概率密度函数, 它所产生的样本将用于不同时刻失效概率的估计, 因此需合理选择 $f(\mathbf{x}|t_0)$, 尽可能地考虑所有时刻情况。在构建辅助概率密度函数时, 首先把与时间无关的随机变量归为一组, 记为 $\mathbf{x}_r = [x_1, x_2, \dots, x_{nr}]$, 其余为 $\mathbf{x}_s = [x_1, x_2, \dots, x_{ns}]$, 则辅助概率密度函数可以表示为:

$$f(\mathbf{x}|t_0) = f(\mathbf{x}_r|\theta_0) f(\mathbf{x}_s) \quad (10)$$

其中, θ_0 表示与时间相关的随机变量的分布参数在某一时刻 t_0 的取值, 如一般可以取 $t_0 = T/2$ 。

2.2 加权重要抽样法

加权蒙特卡洛法仍然受限于蒙特卡洛法的效率, 为了提高计算效率, 本文进一步提出加权重要抽样法。采用加权的思想, 可以将重要抽样用于时变可靠性分析。

构造一个“全局”重要抽样密度函数 $H(\mathbf{x})$, 式(5)的失效概率函数可以表示为:

$$P_F(t) = \int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x}|t)}{H(\mathbf{x})} H(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E_H \left[I_F(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x}|t)}{H(\mathbf{x})} \right] \quad (11)$$

在抽取 $H(\mathbf{x})$ 样本 $\mathbf{x}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) 后, 失效概率函数的无偏估计可表示为:

$$\hat{P}_F(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_F(\mathbf{x}^{(j)}) \frac{f(\mathbf{x}^{(j)}|t)}{H(\mathbf{x}^{(j)})} \quad (12)$$

类似地, 可得到失效概率函数估计的方差:

$$D[\hat{P}_F(t)] = \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{I_F(\mathbf{x}^{(j)}) f(\mathbf{x}^{(j)}|t)}{H(\mathbf{x}^{(j)})} \right]^2 - \hat{P}_F(t)^2 \right\} \quad (13)$$

本文在构建 $H(\mathbf{x})$ 时借鉴基于设计点的构造方法。首先计算得到设计点 \mathbf{x}^* (如可采用改进一次二阶矩法), 然后选取正态分布密度作为抽样密度, 以设计点 \mathbf{x}^* 作为抽样密度中心, 则 $H(\mathbf{x})$ 可以表示为:

$$H(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}|\mathbf{x}^*, \sigma_H) \quad (14)$$

其中, $\varphi(\cdot)$ 表示正态概率密度函数, σ_H 表示随机变量的标准差。

3 数值算例分析

3.1 管状悬臂梁

算例来自参考文献[10], 图1为一管状悬臂梁, 结构基本参数与所受外力情况见表1, 预期工作时间为 10 a。其中承受外载 P, F 及 U 均为随机变量, $Q(t)$ 为随机过程, 这里给出其在 10 a 内的极值 $Q_T = \max(Q_i)$ 的分布。其他参数为确定值, 即 $L_1 = 120 \text{ mm}, L_2 = 60 \text{ mm}, \theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = 10^\circ$, 功能函数定义为强度 R 与固定端下表面最大应力值之差, 即

$$G(\mathbf{x}, t) = R - \sigma_{\max}(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

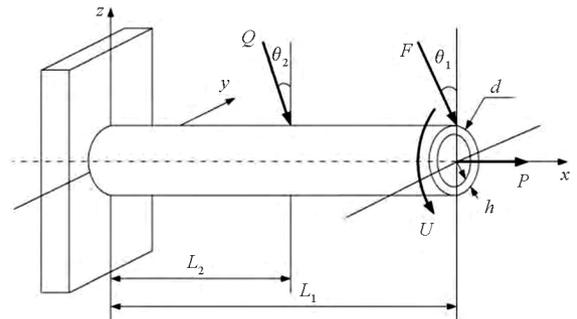


图1 管状悬臂梁示意图

Fig.1 Tubular cantilever beam

其中 $\sigma_{\max}(\mathbf{x})$ 可通过以下计算获得:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\sigma_x^2(\mathbf{x}, t) + 3\tau_{zx}^2(\mathbf{x})} \quad (16)$$

$$\tau_{zx}(\mathbf{x}) = \frac{16Ud}{\pi[d^4 - (d-2h)^4]} \quad (17)$$

$$\sigma_x(\mathbf{x}, t) = \frac{P + F \sin \theta_1 + Q(t) \sin \theta_2}{\frac{\pi}{4}[d^2 - (d-2h)^2]} + \frac{32d[FL_1 \cos \theta_1 + Q(t)L_2 \cos \theta_2]}{\pi[d^4 - (d-2h)^4]} \quad (18)$$

表 1 管状悬臂梁结构随机变量分布

Tab. 1 Random variable distribution of tubular cantilever beam structure

随机变量	均值	标准差	分布类型
R	440 MPa	68 MPa	正态分布
F	6.5 kN	0.65 kN	对数正态分布
P	22 kN	2.2 kN	极值 I 型分布
U	90 N · m	9 N · m	正态分布
d	42 mm	0.5 mm	正态分布
H	5 mm	0.1 mm	正态分布
Q_T	2.5 kN	0.5 kN	极值 I 型分布

计算该悬臂梁在工作期内的失效概率随时间变化的函数。

采用本文所提方法来求解结构时变可靠性, 加权蒙特卡洛法的“辅助概率密度函数” $f(\mathbf{x} | t_0)$ 在 t_0 为第 5 a 时构造, 对应的变量均值为 $\mu_x = [440, 6.5, 22, 90, 42, 5, 2.302]$ 。加权重要抽样法中“全局”重要抽样密度函数 $H(\mathbf{x})$ 为在上述均值点下计算出设计点 $\mathbf{x}^* = [245, 6.948, 2.235, 90.04, 4.19, 5.0, 2.435]$ 后进行构建。

加权蒙特卡洛抽样 10^5 次, 加权重要抽样 20×10^3 次 (其中采用改进一次二阶矩方法求解设计点调用极限状态方程 20 次)。直接蒙特卡洛

法对 10 个时间点进行计算, 每个时间点抽取 10^6 个样本点, 共调用功能函数 10×10^6 次, 作为精确结果进行对比。各方法结果如图 2 所示 (其中 N 为样本数)。由图 2 可以看出: 该悬臂梁失效概率随时间单调递增, 所提方法结果都接近于真实值。表 2 给出了所提两种方法对应的估计值的误差及变异系数。由此可看出, 加权方法只需一次分析, 具有较高的效率。进一步地, 加权重要抽样法比加权蒙特卡洛法的效率更高。

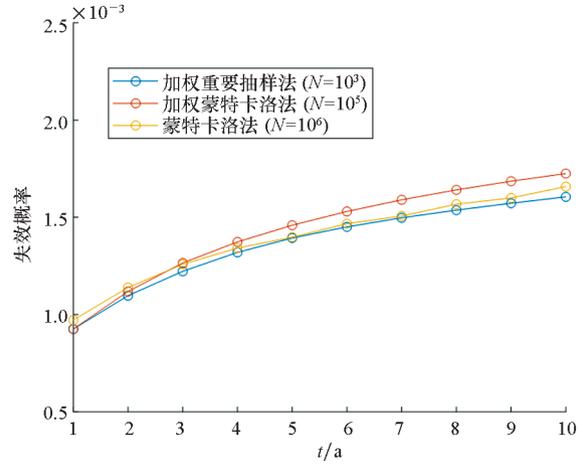


图 2 管状悬臂梁 1 ~ 10 a 失效概率图 (取 $t_0 = 5$)

Fig. 2 Failure probability diagram of tubular cantilever beam in 1 ~ 10 years ($t_0 = 5$)

表 2 管状悬臂梁 1 ~ 10 a 的失效概率 ($t_0 = 5$)

Tab. 2 Failure probability of tubular cantilever beams from 1 to 10 years ($t_0 = 5$)

方法及其结果	t/a										样本数
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
WMCS	0.902×10^{-3}	1.208×10^{-3}	1.365×10^{-3}	1.451×10^{-3}	1.509×10^{-3}	1.557×10^{-3}	1.602×10^{-3}	1.646×10^{-3}	1.690×10^{-3}	1.733×10^{-3}	10^5
变异系数	0.183	0.176	0.174	0.170	0.166	0.162	0.159	0.156	0.153	0.152	
相对误差/%	7.17	6.02	8.50	8.13	7.98	6.14	6.34	5.00	5.62	4.50	
WIS	0.926×10^{-3}	1.097×10^{-3}	1.222×10^{-3}	1.320×10^{-3}	1.394×10^{-3}	1.451×10^{-3}	1.497×10^{-3}	1.537×10^{-3}	1.573×10^{-3}	1.605×10^{-3}	20×10^3
变异系数	0.124	0.123	0.123	0.122	0.120	0.118	0.116	0.115	0.113	0.112	
相对误差/%	4.75	3.68	2.85	1.65	2.84	1.10	0.61	1.95	1.70	3.20	
MCS	0.972×10^{-3}	1.139×10^{-3}	1.258×10^{-3}	1.342×10^{-3}	1.398×10^{-3}	1.467×10^{-3}	1.507×10^{-3}	1.568×10^{-3}	1.600×10^{-3}	1.658×10^{-3}	10×10^6

其次, 为了进一步考察方法的稳健性, 选取不同的 t_0 , 分别再用加权蒙特卡洛法和加权重要抽样法进行分析, 结果如图 3 所示。由图 3 可以看出, 两种加权方法都获得了较为满意的结果。

3.2 十杆桁架

图 4 所示为十杆桁架结构, 左端是固定端, 各杆的截面积分别为 $A_1 \sim A_{10}$, 其中 1、2、3、4、5 和 6

号杆长度为 L ; 弹性模量为 E 。该桁架承受 3 个外载荷, 其中 F_1 、 F_3 为随机变量载荷, $F_2(t)$ 为随机过程载荷, 其在使用期限 T 为 10 a 的极值 $F_{2,T}$ 的分布列于表 3 中。要求节点 2 处的竖直方向位移在使用期限 T 为 10 a 内且不得大于允许值 d , 计算该桁架在使用期限内的失效概率随时间变化的函数。

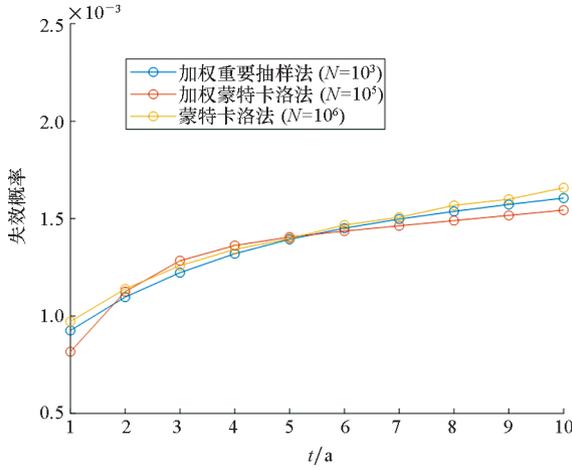


图 3 管状悬臂梁 1 ~ 10 a 失效概率图 (取 $t_0 = 1$)

Fig. 3 Failure probability diagram of tubular cantilever beam in 1 ~ 10 years ($t_0 = 1$)

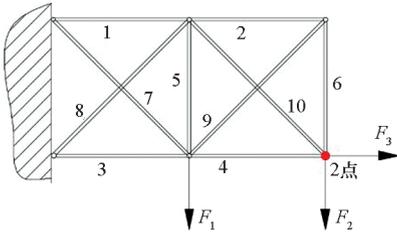


图 4 十杆桁架结构

Fig. 4 Ten-bar truss structure

表 3 十杆桁架随机变量分布

Tab 3 Distribution information of ten-bar truss random variable

变量	均值	标准差	分布类型
$A_1 \sim A_{10}/m^2$	4.0×10^{-4}	4.0×10^{-5}	正态分布
L/m	9.1	0.19	正态分布
E/GPa	70	7	正态分布
F_1/kN	12	1.2	对数正态分布
F_{2T}/kN	20	2	极值 I 型分布
F_3/kN	8	0.8	对数正态分布
d/m	20×10^{-3}	5×10^{-3}	正态分布

由题意可知, 十杆桁架的功能函数为:

$$G(t) = d - d_y(t) \quad (19)$$

其中, $d_y(t)$ 表示 t 时刻下 2 点位置的实际竖直方向位移, 可以通过下列公式求得。

$$a_{11} = \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_5} + \frac{2\sqrt{2}}{A_7} + \frac{2\sqrt{2}}{A_8} \right) \frac{L}{2E} \quad (20)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{L}{2A_5 E} \quad (21)$$

$$a_{22} = \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_4} + \frac{1}{A_6} + \frac{2\sqrt{2}}{A_9} + \frac{2\sqrt{2}}{A_{10}} \right) \frac{L}{2E} \quad (22)$$

$$b_1 = \frac{F_2(t)\sqrt{2}L}{A_1 2E} - \frac{F_1 + 2F_2(t) - F_3\sqrt{2}L}{A_3 2E} - \frac{F_2(t)\sqrt{2}L}{A_5 2E} - \frac{2\sqrt{2}(F_1 + F_2(t))L}{A_7 E} \quad (23)$$

$$N_1 = F_2(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}N_8 \quad (24)$$

$$N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{10} \quad (25)$$

$$N_3 = -F_1 - 2F_2(t) + F_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_8 \quad (26)$$

$$N_4 = -F_2(t) + F_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_{10} \quad (27)$$

$$N_5 = -F_2(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}N_8 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_{10} \quad (28)$$

$$N_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{10} \quad (29)$$

$$N_7 = \sqrt{2}(F_1 + F_2(t)) + N_8 \quad (30)$$

$$N_8 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (31)$$

$$N_9 = \sqrt{2}F_2(t) + N_{10} \quad (32)$$

$$N_{10} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (33)$$

$$d_y(t) = \left(\sum_{i=1}^6 \frac{N_i^0 N_i}{A_i} + \sqrt{2} \sum_{i=7}^{10} \frac{N_i^0 N_i}{A_i} \right) \frac{L}{E} \quad (34)$$

其中, N_i^0 为当 $F_1 = F_3 = 0, F_2 = 1$ 时所计算出来的 N_i 值。

采用本文加权方法来进行分析, 其中取 t_0 为 10 a。加权蒙特卡洛法的“辅助概率密度函数” $f(\mathbf{x} | t_0)$ 的均值为 $\mu_x = [0.004, \dots, 0.004, 9.1, 70, 12, 20, 8, 0.02]$ 。构造的“全局”重要抽样密度函数 $H(\mathbf{x})$ 为在设计点 $\mathbf{x}^* = [0.004, \dots, 0.004, 9.405, 67.49, 12.08, 20.67, 7.97, 0.02]$ 下构造。

采用所提方法分析得到十杆桁架的失效概率结果如图 5 和表 4 所示。直接 MCS 方法抽取

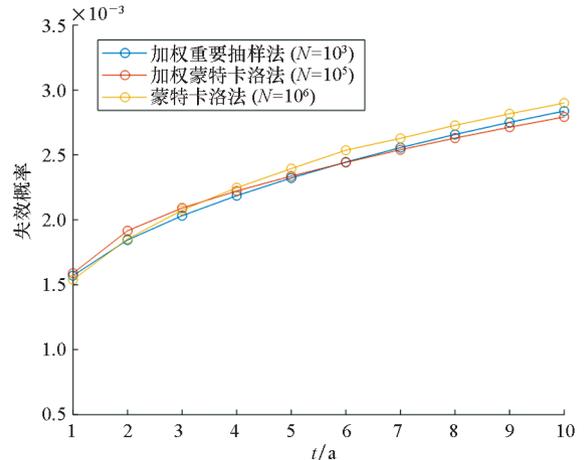


图 5 十杆桁架失效概率

Fig. 5 Failure probability diagram of ten-bar truss

10×10^6 个样本点计算获得的结果作为精确结果。WMCS 抽取 10^5 和 WIS 抽取 10^3 个样本点。从图 5 可看出,失效概率随时间增长逐渐增大,均

得到较为精确的结果,证实了所提加权方法的正确性。结合表 4 可以看出,加权方法具有较高的效率和精度。

表 4 十杆桁架 1~10 a 的失效概率($t_0=5$)Tab. 4 Failure probability of ten-bar truss from 1 to 10 years($t_0=5$)

方法及其结果	l/a										计算量
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
WMCS	1.584×10^{-3}	1.961×10^{-3}	2.202×10^{-3}	2.387×10^{-3}	2.543×10^{-3}	2.679×10^{-3}	2.798×10^{-3}	2.903×10^{-3}	2.994×10^{-3}	3.074×10^{-3}	10^5
变异系数	0.139	0.118	0.110	0.105	0.101	0.098	0.096	0.094	0.093	0.092	
相对误差/%	2.73	5.57	5.16	7.01	6.87	6.86	6.04	7.27	6.61	6.15	
WIS	1.573×10^{-3}	1.973×10^{-3}	2.230×10^{-3}	2.411×10^{-3}	2.552×10^{-3}	2.671×10^{-3}	2.778×10^{-3}	2.879×10^{-3}	2.974×10^{-3}	3.065×10^{-3}	$15 + 10^3$
变异系数	0.119	0.111	0.109	0.108	0.106	0.107	0.106	0.105	0.104	0.103	
相对误差/%	2.05	6.23	6.46	8.10	7.25	6.53	5.28	6.38	5.90	5.83	
MCS	1.542×10^{-3}	1.857×10^{-3}	2.094×10^{-3}	2.230×10^{-3}	2.379×10^{-3}	2.507×10^{-3}	2.639×10^{-3}	2.706×10^{-3}	2.808×10^{-3}	2.895×10^{-3}	10×10^6

4 结论

本文针对随机模拟法在时变可靠性分析中计算效率低的问题,在极值方法的基础上结合加权思想,提出了加权蒙特卡洛方法和加权重要抽样方法。所提方法仅需一次常规可靠性分析模拟,即可得到时变失效概率函数结果,大大提升了分析的效率。对文中两个算例进行了验证。算例分析结果表明,加权方法能够在一次可靠性分析下,得到较为满意的可靠性结果,且加权重要抽样方法比加权蒙特卡洛方法效率更高。

参考文献 (References)

[1] RICE S O. Mathematical analysis of random noise[J]. The Bell Systems Technical Journal, 1944, 23(3): 282-332.

[2] COLEMAN J J. Reliability of aircraft structures in resisting chance failure [J]. Operations Research, 1959, 7(5): 639-645.

[3] CRANDALL S H, CHANDIRAMANI K L, COOK R G. Some first-passage problems in random vibration[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(3): 532.

[4] HU Z, DU X P. Time-dependent reliability analysis with joint upcrossing rates [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(5): 893-907.

[5] ANDRIEU-RENAUD C, SUDRET B, LEMAIRE M. The PH2 method: a way to compute time-variant reliability[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 84(1): 75-86.

[6] SUDRET B. Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems [J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2008, 4(5): 353-362.

[7] 张德权, 韩旭, 姜潮, 等. 时变可靠性的区间 PH2 分析方法[J]. 中国科学(物理学 力学 天文学), 2015, 45(5): 36-48.

ZHANG Dequan, HAN Xu, JIANG Chao, et al. The interval PH2 analysis method for time-dependent reliability [J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica, 2015, 45(5): 36-48. (in Chinese)

[8] 贡金鑫, 赵国藩. 考虑抗力随时间变化的结构可靠度分析[J]. 建筑结构学报, 1998, 19(5): 43-51.

GONG Jinxin, ZHAO Guofan. Reliability analysis for deteriorating structures[J]. Journal of Building Structures, 1998, 19(5): 43-51. (in Chinese)

[9] 王新刚, 张义民, 王宝艳. 机械零部件的动态可靠性分析[J]. 兵工学报, 2009, 30(11): 1510-1514.

WANG Xingang, ZHANG Yimin, WANG Baoyan. Dynamic reliability analysis of mechanical components [J]. Acta Armamentarii, 2009, 30(11): 1510-1514. (in Chinese)

[10] 黄新萍, 姜潮, 韩旭. 针对非线性极限状态方程的时变可靠度分析[J]. 力学学报, 2014, 46(2): 264-272.

HUANG Xinpeng, JIANG Chao, HAN Xu. A time-variant reliability analysis method for non-linear limit-state functions[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(2): 264-272. (in Chinese)

[11] CHEN J B, LI J. The extreme value distribution and dynamic reliability analysis of nonlinear structures with uncertain parameters[J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 77-93.

[12] LI J, CHEN J B, FAN W L. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability[J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 112-131.

[13] HU Z, DU X. A sampling approach to extreme value distribution for time-dependent reliability analysis [J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(7): 071003.

[14] WANG Z Q, WANG P F. A nested extreme response surface approach for time-dependent reliability-based design optimization [J]. Journal of Mechanical Design, 2012, 134(12): 121007.

[15] WANG Z Q, WANG P F. A double-loop adaptive sampling approach for sensitivity-free dynamic reliability analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2015, 142: 346-356.

- [16] ZHANG D Q, HAN X, JIANG C, et al. Time-dependent reliability analysis through response surface method [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2017, 139(4): 041404.
- [17] AMANDEEP S, ZISSIMOS P M, LI J. Design for lifecycle cost using time-dependent reliability [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2010, 132(9): 091008.
- [18] ZISSIMOS P M, MONICA M, VIJITASHWA P, et al. Time-dependent reliability analysis using the total probability theorem [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2015, 137(3): 031405.
- [19] SAVAGE G J, SON Y K. Dependability-based design optimization of degrading engineering systems[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(1): 011002.
- [20] SON Y K, SAVAGE G J. Set theoretic formulation of performance reliability of multiple response time-variant systems due to degradations in system components[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2007, 23(2): 171-188.
- [21] JIANG C, HUANG X P, WEI X P, et al. A time-variant reliability analysis method for structural systems based on stochastic process discretization[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2017, 13(2): 173-193.
- [22] LI H S, WANG T, YUAN J Y, et al. A sampling-based method for high-dimensional time-variant reliability analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 126: 505-520.
- [23] YUAN X K, LU Z Z. Efficient approach for reliability-based optimization based on weighted importance sampling approach[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 132: 107-114.
- [24] 吕震宙, 宋述芳, 李洪双, 等. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
LYU Zhenzhou, SONG Shufang, LI Hongshuang, et al. Reliability and reliability sensitivity analysis of structural mechanism [M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese)
- [25] OKASHA N M. An improved weighted average simulation approach for solving reliability-based analysis and design optimization problems[J]. *Structural Safety*, 2016, 60: 47-55.

(上接第 124 页)

- [6] OKAMURA K, SASAHARA H. Prediction of drilling temperature during low-frequency vibration drilling of titanium alloy[J]. *Journal of Advanced Mechanical Design Systems & Manufacturing*, 2017, 11(3): JAMDSM0036.
- [7] DEBNATH K, SINGH I. Low-frequency modulation-assisted drilling of carbon-epoxy composite laminates[J]. *Journal of Manufacturing Processes*, 2017, 25: 262-273.
- [8] BLEICHER F, WIESINGER G, KUMPF C, et al. Vibration assisted drilling of CFRP/metal stacks at low frequencies and high amplitudes[J]. *Production Engineering*, 2018, 12(5): 1-8.
- [9] PAULSEN T, PECAT O, WAGNER A, et al. Modification of oscillation modes in low frequency vibration assisted drilling[J]. *Procedia Manufacturing*, 2017, 14: 1-7.
- [10] LOTFI M, AMINI S. Experimental and numerical study of ultrasonically-assisted drilling [J]. *Ultrasonics*, 2017, 75(1): 185-193.
- [11] SUGIHARA T, ENOMOTO T. Ultra-low-frequency vibration assisted machining of Ti-6Al-4V alloy[J]. *International Journal of Automation Technology*, 2016, 10(4): 647-653.