

非局部薄板动力学特性分析的广义有限积分变换方法*

姜人伟^{1,2}, 杨树涛², 赵佳敏², 李道奎¹, 马维力³

(1. 国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073; 2. 中国运载火箭技术研究院 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076;

3. 中南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:基于应力梯度非局部薄板理论模型,推导出非局部薄板动力学特性求解的广义有限积分变换方法。通过选取适应边界条件的积分核函数并构建广义积分变换对,应用积分变换将非局部薄板的高阶偏微分方程变换成线性方程组,直接求解得到固有频率。将广义有限积分变换方法的计算结果和有限元法及已有文献的结果进行对比,验证了本文方法的正确性。在此基础上,又研究了非局部参数、薄板的尺度对系统固有频率的影响。该方法为非局部薄板模型的求解提供了一个新的途径。

关键词:非局部理论;薄板;广义有限积分变换

中图分类号:O343 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号:1001-2486(2022)01-063-05



与作者互动
听语音
聊科研

Generalized finite integral transform method for dynamic characteristic analysis of nonlocal thin plate

JIANG Renwei^{1,2}, YANG Shutao², ZHAO Jiamin², LI Daokui¹, MA Weili³

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Beijing Institute of Astronautical Systems Engineering, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China;

3. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: The generalized finite integral transform method was applied to get the dynamic characteristic of a nonlocal thin plate based on the stress gradient nonlocal theory. The integral transform pairs were established by using the integral kernels which can satisfy the boundary conditions. The higher-order partial differential equation of the nonlocal thin plate was transformed into a series of linear algebraic equations through the integral transform, and the nature frequencies of the governing equations can be solved exactly. To confirm the validity of the simulated, the results were compared with the finite element method and the existing ones. The effects of the nonlocal parameter and the dimension of the plate on the nature frequency were studied. The proposed method provides a new way to solve the mathematical problem of the nonlocal plate problem.

Keywords: nonlocal theory; thin plate; generalized finite integral transform

薄板作为工程中应用最广泛的结构之一,其理论诞生以来就一直受到学者们的广泛关注。由于薄板的静、动力学控制方程均为高阶偏微分方程^[1],因此国内外大量学者都致力于研究其求解方法,例如 Ritz 法^[2-3]、Navier 法、Galerkin 法及广义变分原理法^[4]等,这些方法大多具有一定的局限性,仅能求解特定的问题,不具有普适性,直到有限元方法的产生^[5],才彻底解决复杂薄板问题的求解方法。

随着学者们的研究不断深入,研究对象也已经从宏观领域拓展到纳米领域,例如碳纳米管^[6]和石墨烯板^[7]。该类对象的研究手段主要有三种途径:实验方法、分子动力学方法和连续介质力

学方法。实验方法是能够获得结构力学特性最直接、最有效的方法,类如 Jena 等^[8]、Xu 等^[9]皆通过实验方法获得了石墨烯的剪切特性、弹性模量、屈服强度等参数,但实验方法投入大、成本高,经济性较差。分子动力学方法是一种理论数值仿真手段,其能够较好地获得纳米结构原子运动轨迹的微观细节,进而得到想要获得的特性参数^[10],但其缺点也较明显,即计算量大,即使是在计算机技术已经非常先进的今天,也仍难以对其进行快速的计算。相比于上述两种方法,连续介质力学方法具有计算效率高、计算结果相对较准确等优点,因此其被广泛应用于纳米结构的力学行为分析中。

学者们研究发现,适用于宏观尺度的经典连

* 收稿日期:2020-07-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11902348,11872372)

作者简介:姜人伟(1991—),男,辽宁大连人,工程师,博士研究生,E-mail:jiangrw3114@126.com

续介质力学方法,由于纳米尺度材料的尺度效应,往往得不到理想的结果^[11]。此时,Eringen 提出了应力梯度非局部连续介质力学理论^[12],该理论认为,物体中任一点的应力不仅与该点的应变有关,而且与其邻域内所有点的应变皆有关,因此其能够很好地考虑尺度效应。基于该理论,学者们对纳米结构的力学行为做出了大量研究^[13-16]。但同时,由于非局部理论中非局部应力梯度项的引入,导致系统的能量泛函难以给出显示表达式,给控制方程的求解带来了一定的困难。

广义有限积分变换方法为求解线性偏微分方程的重要方法^[17],钟阳等^[18-19]将其引入了弹性矩形薄板问题的求解中,并得到了理想的效果。该方法直接从控制方程出发,通过广义有限积分变换将高阶偏微分方程变换为线性方程组,进而得到待求解问题的精确解。因此,广义有限积分变换方法对求解非局部问题具有较好的适应性。

本文旨在推导基于应力梯度非局部薄板振动特性分析的广义有限积分变换方法,并将计算结果与有限元法及已有文献的结果进行对比,验证了本文推导的正确性。在此基础上,又研究了非局部参数、薄板的尺度对系统固有频率的影响。

1 非局部薄板动力学控制方程

与传统弹性理论不同,非局部弹性理论认为物体中任一点的应力不仅与该点的应变有关,而且与其邻域内所有点的应变皆有关。因此,在非局部弹性理论中,薄板的应力应变关系可以表示为

$$(1 - \mu \nabla^2) \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{nl} = \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (1)$$

其中, μ 为非局部参数, $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{nl}$ 为非局部应力张量, \mathbf{C}_{ijkl} 为四阶弹性张量, $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}$ 为应变张量。

基于式(1),考虑一个长为 a , 宽为 b , 厚度为 h 的矩形薄板,其动力学控制方程可以写成

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (1 - \mu \nabla^2) \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

其中: ρ 为薄板的材料密度; $D = Eh^3/12 \times (1 - \nu^2)$ 为薄板的弯曲刚度, E 为薄板的弹性模量, ν 为薄板的泊松比。

对于四边固支边界条件,可以表示为

$$\begin{cases} w(0, y, t) = \frac{\partial w(0, y, t)}{\partial x} = 0 \\ w(a, y, t) = \frac{\partial w(a, y, t)}{\partial x} = 0 \\ w(x, 0, t) = \frac{\partial w(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \\ w(x, b, t) = \frac{\partial w(x, b, t)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

2 广义有限积分变换求解方法

为了求解式(2)与式(3),定义二维广义积分变换对

$$\begin{cases} W_{mn} = \int_0^a \int_0^b W(x, y) X_m(x) Y_n(y) dx dy \\ W(x, y) = \frac{1}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} X_m(x) Y_n(y) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $X_m(x)$ 和 $Y_n(y)$ 为适应边界条件式(3)的积分核函数,即

$$\begin{cases} X_m(x) \Big|_{x=0, a} = \frac{dX_m(x)}{dx} \Big|_{x=0, a} = 0 \\ Y_n(y) \Big|_{y=0, b} = \frac{dY_n(y)}{dy} \Big|_{y=0, b} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

为满足式(5), $X_m(x)$ 和 $Y_n(y)$ 可取

$$\begin{cases} X_m(x) = \text{ch}(\alpha_m x) - \cos(\alpha_m x) - c_m [\text{sh}(\alpha_m x) - \sin(\alpha_m x)] \\ Y_n(y) = \text{ch}(\beta_n y) - \cos(\beta_n y) - c_n [\text{sh}(\beta_n y) - \sin(\beta_n y)] \end{cases} \quad (6)$$

其中, α_m 和 β_n 分别需要满足

$$\begin{cases} \text{ch}(\alpha_m a) \cos(\alpha_m a) = 1 \\ \text{ch}(\beta_n b) \cos(\beta_n b) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

c_m 和 c_n 分别定义为

$$\begin{cases} c_m = \frac{\text{ch}(\alpha_m a) - \cos(\alpha_m a)}{\text{sh}(\alpha_m a) - \sin(\alpha_m a)} \\ c_n = \frac{\text{ch}(\beta_n b) - \cos(\beta_n b)}{\text{sh}(\beta_n b) - \sin(\beta_n b)} \end{cases} \quad (8)$$

此时,积分核函数 $X_m(x)$ 和 $Y_n(y)$ 具有以下性质

$$\begin{cases} \frac{d^4 X_m(x)}{dx^4} = \alpha_m^4 X_m(x) \\ \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} = \beta_n^4 Y_n(y) \\ \int_0^a X_m(x) X_i(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq i \\ a, & m = i \end{cases} \\ \int_0^b Y_n(y) Y_i(y) dy = \begin{cases} 0, & n \neq i \\ b, & n = i \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

对于控制方程(2),设其解为

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

因此,控制方程(2)可改写成

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + (1 - \mu \nabla^2) \frac{\rho h}{D} \omega^2 W = 0 \quad (11)$$

对式(11)中的每一项做广义积分变换,并进行分部积分并化简,可得

$$\begin{cases} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} X_m(x) Y_n(y) dx dy = \alpha_m^4 W_{mn} \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} X_m(x) Y_n(y) dx dy = \frac{1}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{mr} I_{ns} W_{rs} \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} X_m(x) Y_n(y) dx dy = \beta_n^4 W_{mn} \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} X_m(x) Y_n(y) dx dy = \frac{1}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{mr} J_{ns} W_{rs} \\ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} X_m(x) Y_n(y) dx dy = \frac{1}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{ns} J_{mr} W_{rs} \\ \int_0^a \int_0^b W X_m(x) Y_n(y) dx dy = W_{mn} \end{cases} \quad (12)$$

其中, I_{mr} 、 J_{ns} 、 J_{mr} 及 J_{ns} 的表达式为

$$\begin{cases} I_{mr} = \int_0^a \frac{d^2 X_m(x)}{dx^2} X_r(x) dx \\ = \begin{cases} c_m \alpha_m [2 - c_m (\alpha_m a)], m = r \\ \frac{4(\alpha_m a)^2 (\alpha_r a)^2 [c_r (\alpha_r a) - c_m (\alpha_m a)]}{a[(\alpha_r a)^4 - (\alpha_m a)^4] / [1 + (-1)^{m+r}]}, m \neq r \end{cases} \\ I_{ns} = \int_0^b \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} Y_s(y) dy \\ = \begin{cases} c_n \beta_n [2 - c_n (\beta_n b)], n = s \\ \frac{4(\beta_n b)^2 (\beta_s b)^2 [c_s (\beta_s b) - c_n (\beta_n b)]}{b[(\beta_s b)^4 - (\beta_n b)^4] / [1 + (-1)^{n+s}]}, n \neq s \end{cases} \\ J_{mr} = \int_0^a X_r(x) X_m(x) dx = \begin{cases} a, m = r \\ 0, m \neq r \end{cases} \\ J_{ns} = \int_0^b Y_s(y) Y_n(y) dy = \begin{cases} b, n = s \\ 0, n \neq s \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

将广义积分变换后的结果式(12) 代入控制方程(11),可以得到

$$\begin{aligned} & \alpha_m^4 W_{mn} + \frac{2}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{mr} I_{ns} W_{rs} + \beta_n^4 W_{mn} + \\ & \frac{1}{ab} \mu \frac{\rho h}{D} \omega^2 \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{mr} J_{ns} W_{rs} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{ns} J_{mr} W_{rs} \right) - \\ & \frac{\rho h}{D} \omega^2 W_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

整理式(14),并改写成矩阵形式,可得

$$\begin{bmatrix} M_{11}^{11} & \cdots & M_{11}^{1t} & \cdots & M_{11}^{11} & \cdots & M_{11}^{1t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{1t}^{11} & \cdots & M_{1t}^{1t} & \cdots & M_{1t}^{11} & \cdots & M_{1t}^{1t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{t1}^{11} & \cdots & M_{t1}^{1t} & \cdots & M_{t1}^{11} & \cdots & M_{t1}^{1t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{tt}^{11} & \cdots & M_{tt}^{1t} & \cdots & M_{tt}^{11} & \cdots & M_{tt}^{1t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} \\ \vdots \\ W_{1t} \\ \vdots \\ W_{t1} \\ \vdots \\ W_{tt} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (15)$$

其中

$$M_{mn}^{rs} = \begin{cases} A_{mn} + \frac{2}{ab} B_{mn}^{rs}, m = r \text{ 且 } n = s \\ \frac{2}{ab} B_{mn}^{rs}, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} A_{mn} = \alpha_m^4 + \beta_n^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \\ B_{mn}^{rs} = I_{mr} I_{ns} + \mu \frac{\rho h}{2D} \omega^2 (I_{mr} J_{ns} + I_{ns} J_{mr}) \end{cases} \quad (17)$$

由于式(15)中 W_{11} 、 W_{12} 、 \cdots 、 W_{tt} 不可能同时为零,因此式(15)成立的前提需要满足行列式

$$\begin{vmatrix} M_{11}^{11} & \cdots & M_{11}^{1t} & \cdots & M_{11}^{11} & \cdots & M_{11}^{1t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{1t}^{11} & \cdots & M_{1t}^{1t} & \cdots & M_{1t}^{11} & \cdots & M_{1t}^{1t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{t1}^{11} & \cdots & M_{t1}^{1t} & \cdots & M_{t1}^{11} & \cdots & M_{t1}^{1t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{tt}^{11} & \cdots & M_{tt}^{1t} & \cdots & M_{tt}^{11} & \cdots & M_{tt}^{1t} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (18)$$

式(18)中仅含有未知变量 ω ,通过求解该式,即可得到薄板的固有频率。令非局部参数 $\mu = 0$,上述求解过程即简化为宏观尺度下经典弹性薄板理论的广义有限积分变换求解方法。

3 结果分析

3.1 正确性验证

为了验证本文推导的正确性,将本文计算方法结果与有限元法或已有文献结果进行对比。首先,令非局部参数 $\mu = 0$,将广义有限积分变换法的计算结果与有限元方法计算结果进行对比,计算过程中取薄板的几何参数及材料参数如下:边长 $a = b = 1$ m,厚度 $h = 0.005$ m,密度 $\rho = 2700$ kg/m³,弹性模量 $E = 7.2 \times 10^{10}$ Pa,泊松比 $\nu = 0.33$ 。计算结果对比见表 1,计算中广义有限积分变换法所取截断项数为 4,即 $t = 4$,可见本文所采用的广义有限积分变换法的计算结果介于 10×10 单元和 50×50 单元的有限元法之间,这说明截断项数为 4 的广义有限积分变换法的计算精度要高于 10×10 单元的有限元法,同时也验证了本文方法计算的正确性。

考虑纳米尺度的非局部薄板,其几何尺寸为: $a = 15$ nm, $a/b = 1.5$,厚度 $h = 0.34$ nm,密度 $\rho = 2.25$ g/cm³,弹性模量 $E = 1.06$ TPa,泊松比 $\nu = 0.25$ 。在本算例中,固有频率 ω_k 将通过式(19)无量纲化。

$$\bar{\omega}_k = \omega_k b^2 \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \quad (19)$$

表 1 固有频率计算结果对比 ($\mu=0$)

Tab. 1 Comparison of the nature frequency ($\mu=0$)
单位: Hz

阶次	广义有限积分 变换方法	有限元方法	
		10 × 10 单元	50 × 50 单元
f_{11}	44.998 4	44.410 7	45.159 4
f_{12}	91.461 3	90.425 5	92.052 2
f_{21}	91.461 3	90.425 5	92.052 2
f_{22}	135.634 7	130.239 5	135.438 9

将计算结果与文献[14]中的算例结果进行对比,如表 2 所示。由表 2 可知,在取不同的非局部参数 μ 时,本文方法与已有文献中的结果吻合良好,进而也验证了本文计算方法的正确性。

表 2 不同非局部参数下固有频率计算结果对比

Tab. 2 Comparison of the nature frequency with different nonlocal parameter

单位: Hz

阶次	广义有限积分变换法		文献[14]结果	
	$\mu = 1 \text{ nm}^2$	$\mu = 3 \text{ nm}^2$	$\mu = 1 \text{ nm}^2$	$\mu = 3 \text{ nm}^2$
一阶	24.563	21.041	24.924	21.865
二阶	36.167	28.195	36.293	29.732
三阶	51.772	41.008	53.356	40.719

3.2 参数影响分析

3.2.1 非局部参数对固有频率的影响

图 1 给出了微尺度矩形薄板前四阶无量纲固有频率随非局部参数变化规律曲线,薄板的边长 $a/b = 1.5$,图中 $\bar{\omega}_k$ 的定义与式(19)相同。从图 1

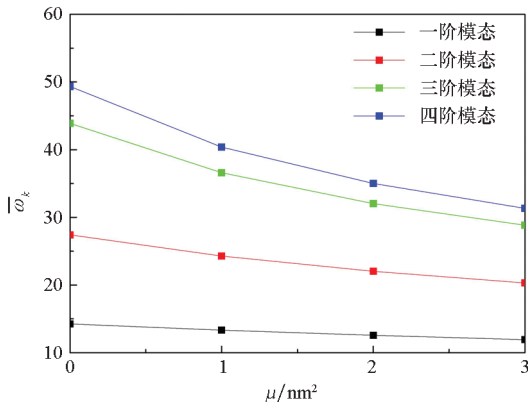


图 1 固有频率随非局部参数变化规律

Fig. 1 Nonlocal parameter effects on the nature frequency

中曲线可以看出,随着非局部参数的增大,薄板的固有频率会减小。同时也可发现,随着模态阶次的增高,其受非局部参数的影响也逐渐增大,而基频受非局部参数相对最小。

3.2.2 薄板尺度对固有频率的影响

图 2 与图 3 分别给出了不同非局部参数下固有频率比随板的边长变化规律和不同阶模态随板边长的变化规律。在该算例中采用方形板,即 $a/b = 1$,厚度、密度及弹性模量等参数与之前算例相同。固有频率比的定义如下:

$$c = \frac{\bar{\omega}_k}{\bar{\omega}_k^{(0)}} \quad (20)$$

其中, $\bar{\omega}_k^{(0)}$ 为 $\mu = 0$ 时,即宏观尺度下经典弹性薄板的无量纲化频率。

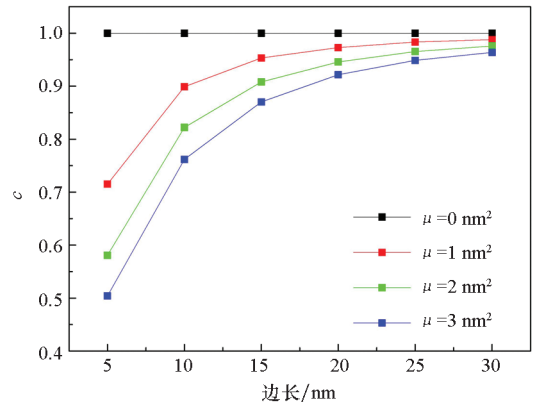


图 2 不同非局部参数下固有频率比随板的边长变化规律

Fig. 2 Dimension effects on the nature frequency for different nonlocal parameters

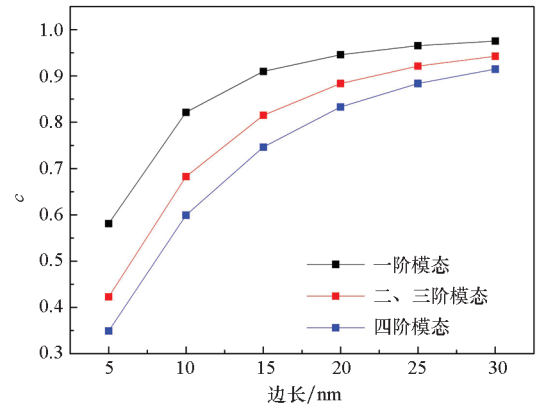


图 3 不同阶固有频率比随板的边长变化规律 ($\mu = 2 \text{ nm}^2$)

Fig. 3 Dimension effects on the nature frequency for different mode ($\mu = 2 \text{ nm}^2$)

从图 2 中可以看出,随着薄板边长的增大,非局部理论结果逐渐靠近经典薄板理论计算结果,这也从侧面说明了非局部理论在纳米尺度下对薄

板的固有频率影响较大,但到了宏观尺度下则可以不用考虑非局部效应,采用经典的弹性薄板理论对结构进行分析即可。从图3中可以看出,高阶模态的固有频率比要小于低阶模态的固有频率比,该结论与文献[20-21]中的结论相同,这也从另一个角度验证了计算的正确性。

4 结论

针对应力梯度非局部薄板理论模型,推导了非局部薄板动力学特性求解的广义有限积分变换方法,得到了非局部薄板的固有频率,并将计算结果与有限元法及已有文献的结果进行对比,验证了本文方法的正确性。在此基础上,研究了非局部参数、薄板的尺度对系统固有频率的影响。主要结论如下:

1) 广义有限积分变换方法直接对非局部理论控制方程进行积分变换,进而对控制方程进行求解,该方法可为难以写出能量泛函的高阶偏微分方程提供新的求解思路。

2) 非局部参数的增大,薄板的固有频率会减小,随着模态阶次的增高,其受非局部参数的影响也逐渐增大。

3) 在纳米尺度结构分析时需要考虑非局部效应,在宏观尺度下则无须考虑。

参考文献 (References)

[1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
XU Z L. Elasticity[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese)

[2] TAN C A, CHUNG C H. Transfer function formulation of constrained distributed parameter systems, part I: theory[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(4): 1004-1011.

[3] CHUNG C H, TAN C A. Transfer function formulation of constrained distributed parameter systems, part II: applications [J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(4): 1012-1019.

[4] 老大中. 变分法基础[M]. 2版. 北京: 国防工业出版社, 2007.
LAO D Z. Fundamentals of the calculus of variations[M]. 2nd ed. Beijing: National Defense Industry Press, 2007. (in Chinese)

[5] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
WANG X C. Finite element method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)

[6] IJIMA S. Helical microtubules of graphitic carbon [J]. Nature, 1991, 354: 56-58.

[7] NOVOSELOV K S, GEM A K, MOROZOV S V, et al. Electric field effect in atomically thin carbon films [J]. Science, 2004, 306(5696): 666-669.

[8] JENA D, FANG T, ZHANG Q, et al. Zener tunneling in semiconducting nanotube and graphene nanoribbon p-n

junctions[J]. Applied Physics Letters, 2008, 93(11): 112106.

[9] XU Z P. Graphene nano-ribbons under tension[J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2009, 6(3): 625-628.

[10] 韩强, 姚小虎. 碳纳米管的原子模拟和连续体描述[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
HAN Q, YAO X H. Atomistic and continuum describe of the carbon nanotube [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)

[11] ERINGEN A C. Nonlocal continuum field theories[M]. New York: Springer, 2004.

[12] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. Journal of Applied Physics, 1983, 54(9): 4703-4710.

[13] LI X F, TANG G J, SHEN Z B, et al. Vibration of nonclassical shear beams with Winkler-Pasternak-type restraint[J]. Acta Mechanica, 2012, 223(5): 953-966.

[14] 姜人伟. 石墨烯质量传感器振动分析的非局部 Galerkin 条形传递函数方法[D]. 长沙: 国防科技大学, 2016.
JIANG R W. Nonlocal Galerkin strip distributed transfer function method for vibration analysis of graphene sheet-based mass sensor [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2016. (in Chinese)

[15] 雷勇军, 赵雪川, 唐国金. 非局部弹性杆固有频率的 Ritz 法求解[J]. 国防科技大学学报, 2006, 28(5): 1-5.
LEI Y J, ZHAO X C, TANG G J. Ritz method for the frequencies of nonlocal elastic bar [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2006, 28(5): 1-5. (in Chinese)

[16] 申志彬. 基于非局部弹性理论的微纳质量传感器振动特性研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2012.
SHEN Z B. Vibration characteristics of micro/nano mass sensor via nonlocal elasticity theory [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012. (in Chinese)

[17] 束仁贵. 有限积分变换法[J]. 大学物理, 1991, 10(6): 8-10.
SHU R G. Finite integral transform method [J]. College Physics, 1991, 10(6): 8-10. (in Chinese)

[18] 钟阳, 孙爱民, 周福霖, 等. 弹性地基上四边自由矩形薄板分析的有限积分变换法[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(11): 2019-2022.
ZHONG Y, SUN A M, ZHOU F L, et al. Analytical solution for rectangular thin plate on elastic foundation with four edges free by finite cosine integral transform method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(11): 2019-2022. (in Chinese)

[19] 钟阳, 王国新, 孙爱民. 弹性地基上四边自由矩形薄板振动分析有限积分变换法[J]. 大连理工大学学报, 2007, 47(1): 73-77.
ZHONG Y, WANG G X, SUN A M. Vibration of a thin plate on Winkler foundation with completely free boundary by finite cosine integral transform method [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2007, 47(1): 73-77. (in Chinese)

[20] SARRAMI-FOROUSANI S, AZHARI M. Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects [J]. Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures, 2014, 57: 83-95.

[21] PRADHAN S C, KUMAR A. Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method [J]. Composite Structures, 2011, 93(2): 774-779.